

量子スピン系における力学的エントロピー

宮寺隆之 (Takayuki MIYADERA)

独立行政法人産業技術総合研究所

National Institute of Advanced Industrial
Science and Technology (AIST)¹

概要

我々は, Alicki と Fannes によって導入された力学的エントロピーを, 一次元量子スピン系に適用した. その結果, この量は相互作用により決まる群速度, 及び状態のエントロピー密度から決まる量によって上から押さえられることがわかった.

1 はじめに

Kolmogorov と Sinai によって導入された古典力学系における力学的エントロピーは, 力学系の位相的分類に大きな役割を果たしてきた. これは, 大雑把に言うならば, 力学系のカオスの性質を特徴付ける量だと考えることができる. すなわち, 系を連続測定しつづけることによって, どれだけ情報が生み出されるか, ということを測る量である. 実際, この量が系の Lyapunov 指数と関係付けられることは Pesin の定理, あるいは Pesin-Ruelle の定理により, よく知られている. では, 量子力学系における力学的エントロピーとはどのようなものであろうか. これまでに, いくつかの提案がなされている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. そのうち, 作用素環の分類に用いることができる Connes-Narnhofer-Thirring による定義 [2], などが良く知られているが, ここで扱うのは Alicki と Fannes による力学的エントロピー [3] である. 量子力学系には相空間, あるいはその上の軌道という概念はなく, カオスという概念を良く知られた軌道の指數的ずれを用いて定義することはできない. しかしながら, 量子力学系においても無論, 測定という概念は存在する. そこで, 系を連続測定しつづけることによってどれだけ情報が生み出されるか, という概念はそのまま移行可能である. これが彼らの定義した量子系における力学的エントロピーである. ここでは, 彼らの定義を簡単に振り返り, それを一般の一次元スピン系に適用した我々の結果 [8] を紹介する. 我々の結果は, 力学的エントロピーを状態のエントロピー密度と系のハミルトニアンから決まる群速度から決まる量によって上から押さえるものである. この結果は, 初めて toy モデル [4, 9, 10] ではない物理的に意味のある非自明な系において, 量子力学系における力学的エントロピーの評加に成功したものである.

¹ -2005.3 東京理科大学理工学部情報科学科

2 量子力学系における力学的エントロピー

この節においては Alicki と Fannes による力学的エントロピー [3, 4] の定義を振り返る。ある離散時間量子力学系があったとしよう。一般に量子力学系は三つ組み, $(\mathcal{A}, \alpha, \omega)$ で記述される。但し, $\mathcal{A}$ は C^* 代数, α は力学をあらわす $\mathcal{A}$ 上の $*$ -自己同型写像, ω は α -不変な状態である。 $\mathcal{A}$ は観測可能量全体のなす代数をあらわし, 古典力学系において対応するのは, 相空間上の (ある程度なめらかな) 関数全体である。古典力学系における力学系エントロピーは, 連続測定によって生み出されるエントロピーの生成率と解釈できた。ここで測定とは, 相空間を何かメッシュにきったとき (分割を導入したとき), どの分割に点が入っているかを測るものという制限があった。(もう少し一般の測定を考えても差し支えない [4].) さて, 量子系における力学的エントロピーを定義する際の考え方も全く同じである。すなわち, 連続測定とそれに伴うエントロピー生成率を取り扱う。この測定という概念をどう導入するかによって, いくつかの定義が考えられるが, ここでは, 測定器との相互作用であると考ええる。(その後, 測定器に POVM を適用して, 古典情報を引き出すことは考えない。) 測定器の観測量のなす C^* 代数を $\mathcal{B}$ と書くと, この相互作用は, transition expectation と呼ばれる写像 [11]:

$$E: \mathcal{B} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}.$$

によって記述される。古典系における測定の種類が, 分割に関する測定 (及びその一般化) に限られていたように, ここで考えるべき測定のクラスもある程度制限される。まず, 我々は無限を数えることはできないのだから, $\mathcal{B}$ の次元は有限次元であるべきである。(つまり, $\mathcal{B}$ は d -次元行列環 ($d = 1, 2, \dots$) となる。) また, 相互作用はあまりにも「鋭い」ものであってはならない。(実際, もし全ての相互作用の形を許すと, III 型, あるいは type I_∞ 型の von Neumann 環については常に力学的エントロピーが無限大になることが示される [10].) この相互作用に対する制限は, 何か稠密な部分代数 $\mathcal{A}_0$ を導入することによって行われる。すなわち, E を $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}_0$ に制限したものの像は, $\mathcal{A}_0$ に入っていないなければならない。

$$E: \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0.$$

さて, 連続測定, すなわち各時刻ごとに繰り返し測定をするという作用は下記の量子マルコフ鎖 [12] で表される:

$$\alpha \circ E \circ (\text{id} \otimes \alpha \circ E) \circ (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \alpha \circ E) \circ \dots (\text{id} \otimes \dots \text{id} \otimes \alpha \circ E): \mathcal{B}^{\otimes n} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}.$$

この作用, もやはり $\mathcal{B}^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0$ という制限を満たすためには, $\mathcal{A}_0$ が α -不変な部分代数となっていればよい。以上のような条件に加えて, Alicki と Fannes は写像 E の端点性を要求している。すなわち, E はそれ以上いかなる CP 写像にもわけることのできないものである。Kraus の表現定理により, このような CP 写像は, 単位分割によって, 表

すことができる. すなわち, $\sum_i x_i^* x_i = 1$ をみたすような $\{x_i\}_{i=1}^Z \subset \mathcal{A}_0$ が存在し,

$$E(A) = \sum_{i,j} x_i^* A_{ij} x_j,$$

と書ける. 但し, A_{ij} は $M_Z(\mathcal{A}_0) = M_Z(\mathbf{C}) \otimes \mathcal{A}_0$ の i, j 成分である. 以上のような設定の下で, 自然に ρ_n over $\mathcal{B}^{\otimes n}$ 上の finitely correlated state [13] が

$$\begin{aligned} \rho_n(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n) &:= \\ \omega \circ \alpha \circ E \circ (\text{id} \otimes \alpha \circ E) \circ \cdots \circ (\text{id} \otimes \cdots \text{id} \otimes \alpha \circ E)(B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n \otimes 1) \end{aligned}$$

で与えられる. これは, 対象とする量子力学系の各時刻の状態に関する情報を吸い出してきた測定器を順番に並べたものである. Alicki と Fannes による力学的エントロピーはこの ρ_n の von Neumann エントロピー $S(\rho_n)$ の時間平均を, 可能な相互作用にわたって極大にしたものとして定義される. $M = 1, 2, \dots$, について, $Z^M \times Z^M$ 行列 $\rho(\{x_i\}_i, M)$ を, $i_s, j_s = 1, \dots, Z$ and $s = 1, \dots, M$ について成分表示 $\omega(x_{i_0}^* \alpha(x_{i_1}^*) \cdots \alpha^{M-1}(x_{i_{M-1}}^*) \alpha^{M-1}(x_{j_{M-1}}) \cdots \alpha(x_{j_1}) x_{j_0})$ で定義しよう. これを用いると, 力学的エントロピーは

$$h(\omega, \alpha, \mathcal{A}_0) := \sup \left\{ \limsup_M \frac{1}{M} S(\rho(\{x_i\}_i, M)) \mid \{x_i\}_{i=1}^Z \subset \mathcal{A}_0; Z = 1, 2, \dots; \sum_{i=1}^Z x_i^* x_i = 1 \right\}$$

と定義される.

3 一次元量子スピン系

我々は, 左右に無限に続く一次元格子上的量子スピン系を扱う. 各格子点 $x \in \mathbf{Z}$ 上には Hilbert 空間 $\mathcal{H}_x$ が乗っている. 但し, これらは $\mathbf{C}^{N+1}$ と同型である. 格子点 x 上の観測量のなす代数は $\mathcal{H}_x$ 上の行列環に他ならず, $\mathcal{A}(\{x\})$ と書かれる. 一点ではなく何か有限個の格子点を集めた領域 $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ 上の観測量のなす代数は $\otimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x$ 上の行列環であり, $\mathcal{A}(\Lambda)$ と書かれる. 包含関係のある領域 $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ どうしでは自然な同一視が行われ, $\mathcal{A}(\Lambda_1) \subset \mathcal{A}(\Lambda_2)$ が成り立つ. この系の観測量のなす代数全体は有限領域での観測量を全部集めてきたもののノルム閉包をとったもの $\mathcal{A} := \overline{\bigcup_{\Lambda: \text{finite}} \mathcal{A}(\Lambda)}^{\|\cdot\|}$ である. これは $\mathbf{C}^*$ 環となる. また一次元鎖の並進に伴う自己同型写像を τ_x ($x \in \mathbf{Z}$) と書こう. (以上について, より詳しくは [14] を参照.)

この系に力学, すなわち 1-経数 $*$ -自己同型群 $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ を導入するためには, 局所的な相互作用を導入しなければならない. すなわち, 任意の有限領域 $\Lambda \subset \mathbf{Z}$ について, ポテンシャル $\Phi(\Lambda) \in \mathcal{A}(\Lambda)$ が定義されている. これらは並進不変性を持つことを仮定しよう. (i.e., 任意の $x \in \mathbf{Z}$ について $\tau_x(\Phi(\Lambda)) = \Phi(\Lambda + x)$ が成り立つ.) これらのポテンシャルは

下記の局所性条件を満たすものとする. すなわち, 以下の条件をみたすような $\lambda > 0$ が存在する:

$$\|\Phi\|_\lambda := \sup \left\{ |X|(N+1)^{2|X|} e^{\lambda D(X)} \|\Phi(X)\| \mid X \text{ is a finite subset of } \mathbf{Z} \right\} < \infty.$$

但し, $D(X) := \sup_{x,y \in X} |x-y|$ である. (この局所性条件は後に, 群速度を定義する際に必要になる.) $\Lambda \in \mathbf{Z}$ における局所ハミルトニアンは

$$H_\Lambda := \sum_{V \subset \Lambda} \Phi(V),$$

で定義されるが, これは $*$ -自己同型群 α_t^Λ ($t \in \mathbf{R}$) を, 任意の $A \in \mathcal{A}$ についての式,

$$\alpha_t^\Lambda(A) := e^{iH_\Lambda t} A e^{-iH_\Lambda t}$$

によって定義する. 局所性条件 (1) により, これは Λ を $\mathbf{Z}$ へと飛ばしたときに, ある $*$ -自己同型 α_t へとノルム収束することが示される. i.e.,

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \mathbf{Z}} \|\alpha_t(A) - \alpha_t^\Lambda(A)\| = 0$$

が成り立つ [14]. これが量子スピン系の力学である.

4 量子スピン系における力学的エントロピー

さて, 以上に導入した量子スピン系について, 力学的エントロピーを考えよう. そのために一つ t -不変な状態 ω を固定し, また $\alpha := \alpha_{t=1}$ と表すことにする. すなわち, 我々が考察するのは, 離散時間量子力学系 $(\mathcal{A}, \alpha, \omega)$ の力学的エントロピーである. そのためには, まず何か α -不変な部分代数 $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ をもってこななければならない. 最も自然な部分代数は, 「厳密に局所的な観測量」のなす代数,

$$\mathcal{A}_{loc} := \bigcup_{\Lambda \subset \mathbf{Z}: \text{finite}} \mathcal{A}(\Lambda)$$

であるが, これは時間不変ではない. そこで, もう少し大きな部分代数を考える必要が生じる. それが以下に導入する「指数的に局在した観測量」のなす代数である. まず, 任意の観測量 $A \in \mathcal{A}$ についてこれがどの程度強く格子点 x にいるか, を測る量を導入しよう.

$$F_x(A) := \sup_{a \in \mathcal{A}(\{0\}), a \neq 0} \left(\frac{\|[A, \tau_x(a)]\|}{\|a\|} \right).$$

指数的に局在した観測量のなす集合は,

$$\mathcal{A}_{exp} := \{A \in \mathcal{A} \mid \exists \mu > 0 \text{ such that } \lim_{|x| \rightarrow \infty} e^{\mu|x|} F_x(A) = 0\}.$$

で定義される. この集合は以下の条件を満たす.

Theorem 1 [8] 指数的に局在した観測量のなす集合 $\mathcal{A}_{\text{exp}}$ は稠密な α_t -不変な *-部分代数である.

そこで, これから我々は力学的エントロピー $h(\omega, \alpha, \mathcal{A}_{\text{exp}})$ を何か並進不変な状態 ω について考えることになる.

さて, 具体的に量子スピン系の力学的エントロピーを見積もる前に, この量が量子スピン系の相互作用長と関係するだろうという予想がつく. 例えば, もし $\Phi(X)$ が $|X| \geq 2$ についてゼロで, なおかつ単位分割が厳密に局在したものであれば, 状態はいつまでたってもある有限な領域以外は乱されることがない. すなわち, 力学的エントロピーはこの場合ゼロである. このような考察を進めると, 力学的エントロピーは群速度を通じて相互作用長と関係があることがわかることを以下に解説する.

まず, $A \in \mathcal{A}_{\text{exp}}$ を厳密に局在した観測量で近似することを考える. [10] でなされたように, 我々は $\mathcal{A}([-L, L])$ ($L > 0$) 上の条件付期待値,

$$id_{[-L, L]} \otimes \tau_{[-L, L]^c}$$

を導入する. 但し, $\tau_{[-L, L]^c}$ は $[-L, L]^c = \mathbf{Z} \setminus [-L, L]$ 上の正規化されたトレースである. すると, $A \in \mathcal{A}_{\text{exp}}$ について,

$$\|A - id_{[-L, L]} \otimes \tau_{[-L, L]^c}(A)\| \leq \sum_{x \in [-L, L]^c} F_x(A)$$

という評価が成り立つ [10]. これを用いると, 以下の補題が成り立つ.

Lemma 1 任意の $A \in \mathcal{A}_{\text{exp}}$ と $\epsilon_1 > 0$ について, 以下を満たすような $M > 0$ が存在する. 任意の $L > M$ について, 厳密に局在した観測量 $A_L \in \mathcal{A}([-L, L])$ で, $\|A - A_L\| < \epsilon_1 e^{-\mu L}$ 及び $\|A_L\| \leq \|A\|$ が成り立つものが存在する.

すなわち, 指数的に局在した観測量は厳密に局在した観測量によって, 十分良く近似されるということがわかる. さて, 厳密に局在した観測量は時間発展を経ると, もはや厳密に局在してはいないが, やはり, 十分良い近似が成り立つことを保証するのが以下の補題である.

Lemma 2 [8] 任意の厳密に局在した観測量 $A \in \mathcal{A}([-L, L])$ と任意の $t \in \mathbf{R}$, 及び $\epsilon_2 > 0$ について, もし $R \in \mathbf{Z}$ が

$$R > L + \frac{2\|\Phi\|_\lambda}{\lambda}|t| + \frac{1}{\lambda} \left\{ \log \left(\frac{2e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \right) + 4(2L + 1) \log(N + 1) + \log(2L + 1) - \log \epsilon_2 \right\},$$

を満たすならば, 不等式

$$\|\alpha_t(A) - \alpha_t^{[-R, R]}(A)\| \leq \epsilon_2 \|A\|$$

が成り立つ.

これらを用いると以下の定理が得られる.

Theorem 2 [8] 一次元量子スピン系について, 並進不変な定常状態 ω における力学的エントロピーは以下の不等式で押さえられる.

$$h(\omega, \alpha, \mathcal{A}_{\text{exp}}) \leq 2V(\Phi)(\sigma(\omega) + \log(N+1)),$$

但し, $\sigma(\omega) := \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbf{Z}} \frac{S(\omega|_{\Lambda})}{|\Lambda|}$ はエントロピー密度であり, $V(\Phi) := \inf_{\lambda} \left(\frac{\|\Phi\|_{\Lambda}}{\lambda} \right)$ は量子スピン系の群速度と呼ばれる量である.

証明は前の二つの補題を組み合わせ, 測定器との相互作用が量子スピン系のどの程度の領域の Hilbert 空間を, 本質的に乱すことができるか, といった見積もりを行うことによって行われる. 証明は文献 [8] を見て欲しい.

5 まとめ

本稿において, 我々は一次元量子スピン系における力学的エントロピーの評価を行った. この結果の多次元系への拡張は自明である. 我々の得た上限は, 測定器の引き起こす擾乱にどの程度の領域が時間が経るにつれ関わり得るか, ということをあらわし自然な解釈をつけることができる. 力学的エントロピーについて下限を得ることは, 非常に重要であるが, これは系のエルゴード的性質に依存し, 我々の結果よりも系の詳細によるものと思われ今後の課題である.

参考文献

- [1] A.Connes and E.Stormer, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, Acta Math. **134** (1975) 289-306.
- [2] A.Connes, H.Narnhofer and W.Thirring, Dynamical entropy of C^* -algebras and von Neumann algebras, Commun.Math.Phys.**112** (1987) 691-719.
- [3] R.Alicki and M.Fannes, Defining quantum dynamical entropy, Lett.Math.Phys.**32** (1994) 75-82.
- [4] R.Alicki and M.Fannes, *Quantum Dynamical Systems*, Oxford Univ. Press (2001)
- [5] N.Muraki and M.Ohya, Entropy functionals of Kolmogorov-Sinai type and their limit theorems, Lett.Math.Phys. **36** (1996) 327-335.

- [6] L.Accardi, M.Ohya and N.Watanabe, Dynamical entropy through quantum Markov chains, *Open System Infor. Dynamics* **4** (1997),71-87.
- [7] A.Kossakowski, M.Ohya and N.Watanabe, Quantum dynamical entropy for completely positive maps, *Infinite Dim. Analysis, Quantum Prob. Related Topics*, **2** 2 (1999) 267-282.
- [8] T.Miyadera and M.Ohya, Quantum dynamical entropy of quantum spin systems, *Rep.Math.Phys.* **56**, No.1 (2005) 1-11.
- [9] J.Andries, M.Fannes, P.Tuyls and R.Alicki, The dynamical entropy of the quantum Arnold cat map, *Lett.Math.Phys.* **35**, (1995) 375-383
- [10] M.Fannes and P.Tuyls, A continuity property of quantum dynamical entropy, *Infinite Dim. Analysis, Quantum Prob. Related Topics*, **2**, (1999) 511-527.
- [11] M.Ohya and D.Petz, *Quantum Entropy and Its Use*, Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag (1993)
- [12] L.Accardi, A.Frigerio and J.Lewis, Quantum stochastic processes, *Publ.RIMS.* **18** (1982) 97.
- [13] M.Fannes, B.Nachtergaele and R.F.Werner, Finitely correlated states on quantum spin chains, *Commun.Math.Phys.* **144**, (1992) 443-490
- [14] O.Bratteli and D.W.Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics. 2. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics.* Texts and Monographs in Physics. (1981) Springer-Verlag, Berlin.