

「 $\times 3 + 1$ 」問題の実験と理論的考察

東大理(情報科学科) 米田信夫

0. 問題提起

0 を含めた自然数の全体を $\mathbb{N}$ とし, $\mathbb{N}_r = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq r\}$ とする.

写像 $\varphi: \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_1$ を

$n \mapsto \text{if } 2 \text{ divides } n \text{ then } n/2 \text{ else } n \times 3 + 1 \text{ fi}$

として定める. $n=1$ からこの写像を重ねて行くと, $1 \mapsto 4 \mapsto 2 \mapsto 1$ というループがでるが, どんな $n \in \mathbb{N}_1$ から始めても, φ を重ねて行けば究極的には, このループに落ちるらしい. すなわち, 写像の長回合成を長乗巾のように記すものとして,

$P_\infty: (\forall n \in \mathbb{N}_1 \mid P(n): (\exists k \in \mathbb{N} \mid \varphi^k(n) = 1))$

ということが予想される. 実際 $n=2, 3, 4, \dots$ に対して $P(n)$ を

$x := n; \text{ while } x > 1 \text{ do } x := \varphi(x) \text{ od}$

という具合に調べて見ても, なかなか反例は見つからない.

この問題は, 日本には1969年Yale大学から来日された角谷静夫氏によって伝えられ, 折しもAlgol 68 に対抗して日本からAlgol N を提言する mission となった筆者に, 立大の岩村聯氏が羽田で教えて下さった. その後島内剛一氏によつて「Lit」誌1969年10月号で紹介され, また他方, 慶大の浦田=氏の最近刊行された著作 [Nievergelt, Farrar, and Reingold: Computer approaches to mathematical problems (1974, Prentice-Hall)] にも, 紹介と若干の考察が述べられている.

この問題は, いろいろな方向から攻められているようである. 就中, 早大の廣瀬健・足立恒雄 両氏は興味ある結果をお持ちのようであるが, それについては別の所で触れることにしたい. ここでは若干の理論的考察と, 学習院大

学の TOSBAC 40.C による実験の結果について述べる. $N_r^m = \{n \in \mathbb{N} \mid r \leq n \leq m\}$ と約束して, 実験結果を端的に云えば,

$$P_m: (\forall n \in N_r^m \mid P(n))$$

が, $m = 7$ 千億 $= 0.7 \times 10^{12}$ 程まで確かめられた, という ことである.

1. 予備的考察

① 奇数 n に対する $\varphi(n) = 3n+1$ は偶数であるから, $\varphi^2(n) = (3n+1)/2 = n + \lfloor n/2 \rfloor + 1$. そこで φ と

$\psi: n \mapsto \text{if } 2 \text{ divides } n \text{ then } n/2 \text{ else } (3n+1)/2 \text{ to}$
に替えて

$$P(n): (\exists k \in \mathbb{N} \mid \psi^k(n) = 1)$$

としても, 前の $P(n)$ と同等であり, φ より ψ のいか追跡しやすくなるので, 以下ではもっぱら ψ について考えることにする.

② 旧々の $n \in N_1$ について独立に $P(n)$ を調べるのは能率が悪い. そこで, $P(n)$ の確かめられた n の集合を, 何らかの仕方管理し, 増殖させて行くようなことを考えられる. たとえば,

$\psi^{-1}(n) = \text{if } n \bmod 3 = 2 \text{ then } \{2n, (2n-1)/3\} \text{ else } \{2n\}$ と
に従って, $S_0 = T = \{1\}$ から始め, $i = 1, 2, 3, \dots$ に対して順次に
$$S_i = \bigcup_{n \in S_{i-1}} \psi^{-1}(n); \quad T := T \cup (S_i \cap N_1^m)$$

と, 相当大きな数 m を目標にして, 構成・集積して行く. 但し S_2 から後は取降いておく. この方式は, $m \leq 10^{10}$ の程度に設定した場合, テープ管理の overhead が大きな障害となる. 他方, 情報の利用効率は悪いが, $P(n)$ の確かめられた n の集合として $N_1^m = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq m\}$ の形のものを管理して行くこと, 言い換えれば, P_m と同等な式として,

$$Q_m := (\forall n \in \mathbb{N}_2^m \mid Q(n) : (\exists k \in \mathbb{N}_1 \mid \psi^k(n) < n))$$

と調べて行く, といふことは, テータの管理が非常に簡単であるといふ利点を持つ, といふ. それで, 以下では原問題をすりかえて

$$Q_\infty := (\forall n \in \mathbb{N}_2 \mid Q(n) : (\exists k \in \mathbb{N}_1 \mid \psi^k(n) < n))$$

と似たものを考えて行くことにしよう.

③ 偶数 n に対しては, $\psi(n) = n/2 < n$ だから, $Q(n)$ は自明である. $n \bmod 4 = 1$ の場合は, $n = 4a + 1$ として, $\psi(n) = 6a + 2$, $\psi^2(n) = 3a + 1 < n$ となり, $Q(n)$ が成立する. 従って $n \bmod 4 = 3$ となる n についてだけ, $Q(n)$ を調べて行けば十分である.

④ 上の考え方を進めて行く, 一般に $n \bmod 2^k$ によつて $\psi(n)$, $\psi^2(n)$, ..., $\psi^k(n)$ までの成行きが定まることを知られる. $n \bmod 2^k = b$, $n = 2^k a + b$ のとき, $\psi^k(n) = 3^l a + c$ の形で, l, c は k と b によつて定まり, a には関係ない. k と b ($0 \leq b < 2^k$) との関数 $l = l(k, b)$ と $c = c(k, b)$ とは, 次のようにして再帰的に定められる.

$$l(0, 0) = 0, \quad c(0, 0) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} l(k+1, b) &= \begin{cases} \text{if } c(k, b) \text{ is even then } l(k, b) \\ \text{else } l(k, b) + 1 \text{ fi} \end{cases} \\ l(k+1, 2^k + b) &= \begin{cases} \text{if } c(k, b) \text{ is odd then } l(k, b) \\ \text{else } l(k, b) + 1 \text{ fi} \end{cases} \\ c(k+1, b) &= \psi(c(k, b)) \\ c(k+1, 2^k + b) &= \psi(3^{l(k, b)} + c(k, b)) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & (0 \leq b < 2^k, \\ & k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

このようにして, $n \mapsto \psi(n) \mapsto \psi^2(n) \mapsto \dots \mapsto \psi^k(n)$ といふ長段のステップの中で, どこが l の入るステップであるかといふ 1 ステップ (2^k 通り) は

2. 計算機実験

1971年頃から筆者は、占有できる計算機が得られる度に、より大きい m まで Q_m を調べた実験をして来た。兎もつき、筆者自身この問題に余り理論的に深入りする興味を欠いているわけではなりのたけれども、折角ある計算機を夜も遊ばせたりするように利用し、かつ、耐久テストをする、というようになつて来て、や、て来たのである。最初は、プログラマブル電卓 SOBAX 2700 で、 m の増分にして日産 3×10^3 位だったと思う。次は 8 ビットレジスタのミニコン TOSBAC 10 で日産 3×10^5 位、そして 1976 年春からは、16 ビットレジスタ $\times$ 16 の TOSBAC 40C で、日産 1.15×10^9 位の割合で進行しており、6月7日現在では、16進で $A715F44E67 =_{16} 717627215463$ まで調べられた。

表1, 2 は、これまでに行われた2種類の記録を並べたものである。表1は、 N から出発したときの $M = \max_k \psi^k(N)$ と、 N によって新記録が出た反に記したもので、 M はおよそ N^2 のオーダーになっている。表2は N から出発して、はじめて $\psi^k(N) < N$ となるまでのステップの回数と、 N によっての新記録又はタイ記録が出る反に記したもので、 $\log N$ のオーダーの程にも見えるが、最後の記録 '345回' は、その N の50倍位まで進んだ現在も、まだ更新されている。なお、表1, 2 では (TESTED UP TO 9F ...) となっているが、上記の $A7 \dots$ までには、追加すべき記録は出ていない。

図1, 2 は京都大学の西村和夫氏に見せて頂いた実験と真似して見たもので、 n から1に落ちるまでのステップ数のヒストグラムである。同じ値かならば傾向が見られるが、これは $\psi^3(8m+4) = \psi^3(8m+5)$, $\psi^5(32m+4) = \psi^5(32m+5) = \psi^5(32m+6)$, $\psi^5(32m+22) = \psi^5(32m+23)$ 等、同ステップで合流するものの所為であろう。

表 1

"3N+1" PROBLEM.

TABLE OF HEIGHT RECORDS

N=INITIAL INTEGER (HEX)

(TESTED UP TO 9FA3311ACF)

M=LARGEST VALUE ATTAINED FROM N (HEX)

N	M
1B	1208
2BF	1 E944
71B	9 BE04
109F	33 F50C
11EF	3E 350A
25BF	CE DDDC
67FF	32B 7282
EE2F	11AE 5C58
1 2F67	2ED0 7110
1 BAE7	49F9 01BA
2 6EFF	2 00AB BA0C
12 7FFF	10 410C 0CD4
28 F6E7	29 0CD4 69E8
2E 6767	48 7E70 8D9A
3B 1AFF	63 F2F0 1D94
46 C51B	99 875F 044A
56 4E7F	118 D9E9 9AF0
61 E8EF	22E CB0E 71EC
65 30FB	1B70 CDF1 C068
12B A87F	8B49 A786 1694
4C5 74EF	3 E1B0 38DC 43DA
C93 0F9F	B 6090 85D2 D2F8
130F D59F	9D0 3047 1593 8FA8
540C C8A7	3172 1D61 DF33 BA60
1 FC5B 6D67	7DE7 467B 0D3E DD84
2 DECB BFFF	8FCA 6002 A586 D6A8
5 5D06 67FF	1 DDA9 215F 6616 E8F0
A AE2E 989F	2 3B5C 26B4 B080 93AA
C 0BE7 9EFF	3 1B78 DE33 A857 98B4
D C5C5 AC1F	4 1B3C EEEC 507F 1E64
D D6AB 74EF	5 9395 3E0C 3C0A D984
10 54BE AFFF	B 690B CFCE 3B3E D624
12 0F50 C3BF	18 D847 D2C2 BEC0 6D98
19 AB00 1EFF	25 334F 6D5A CEEF EA64
2F 9903 9AFF	26 5C58 306F 4310 0478
35 FF22 B2EF	3B 5E90 3B70 F6BF F44A
3F 55FE 2C7F	252 EA33 054B C8B4 3D72
67 F900 E67F	42F 8D36 D309 8F2C 0DC8
84 35E4 AF67	AA5 2598 5800 5E13 F72A
---	---

表 2

"3N+1" PROBLEM.

TABLE OF DURATION RECORDS

N=INITIAL INTEGER (HEX)

(TESTED UP TO 9FA3311ACF)

K=NO. OF "3+1" STEPS UNTIL
IT GETS < N

N	K
1B	37
2BF	51
57F	51
2767	66
8B47	85
4 1FBF	103
5 8767	104
5 D31F	109
9 8E9B	111
F AD67	115
11 2E7F	141
7B 69FF	155
CC CC67	181
13A EA7F	184
197 A9FF	188
364 9B1B	194
3CC 69FF	237
CFA 72EF	249
4795 AE2F	251
6CEB DFBF	273
1 186D 04EF	276
1 75E6 B13F	277
2 D944 34EF	345
3 6050 D667	345
---	---

$\times 3 + 1) \div 2$ の 1 に至るまでのステップ数 (9)

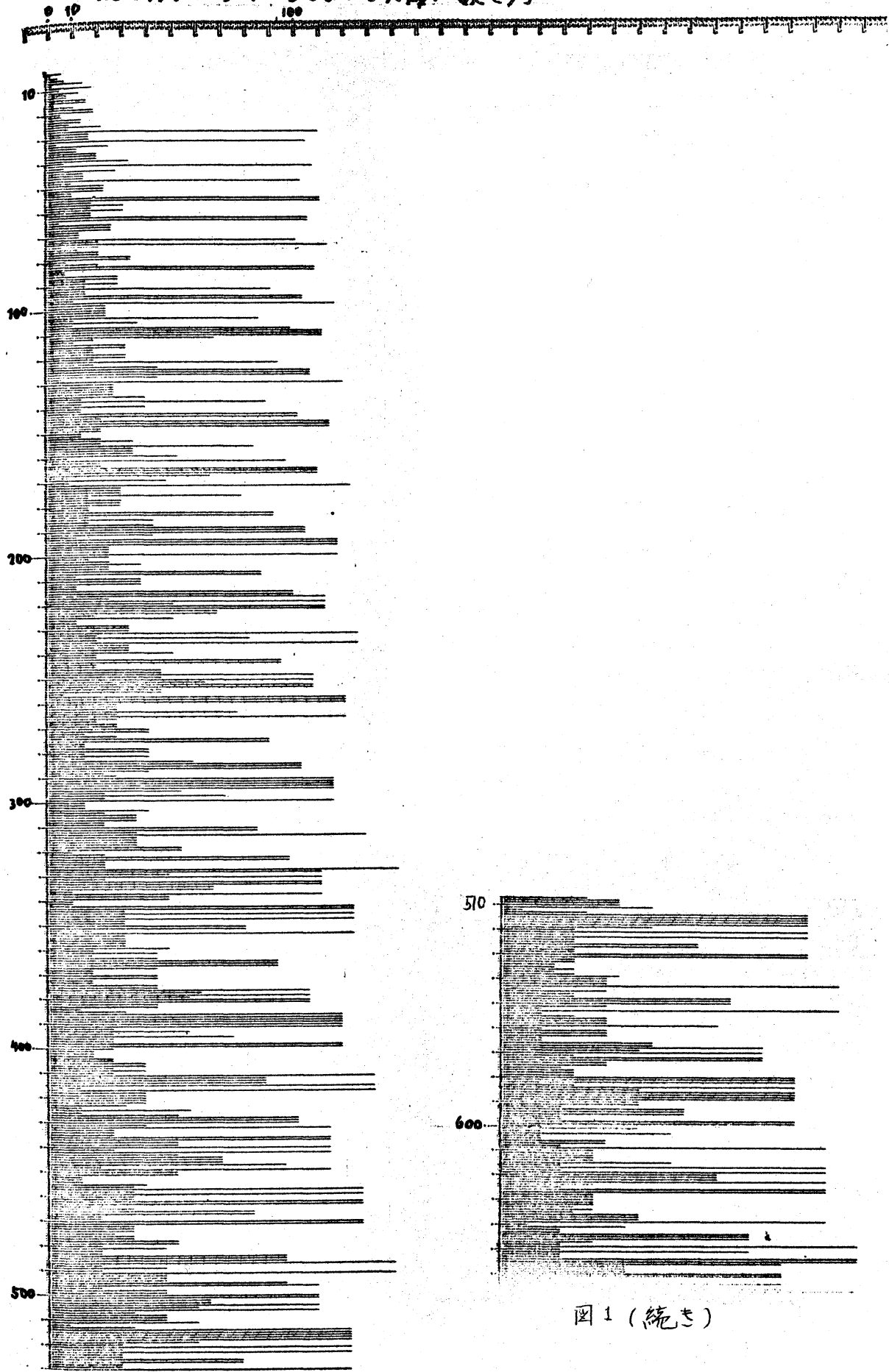
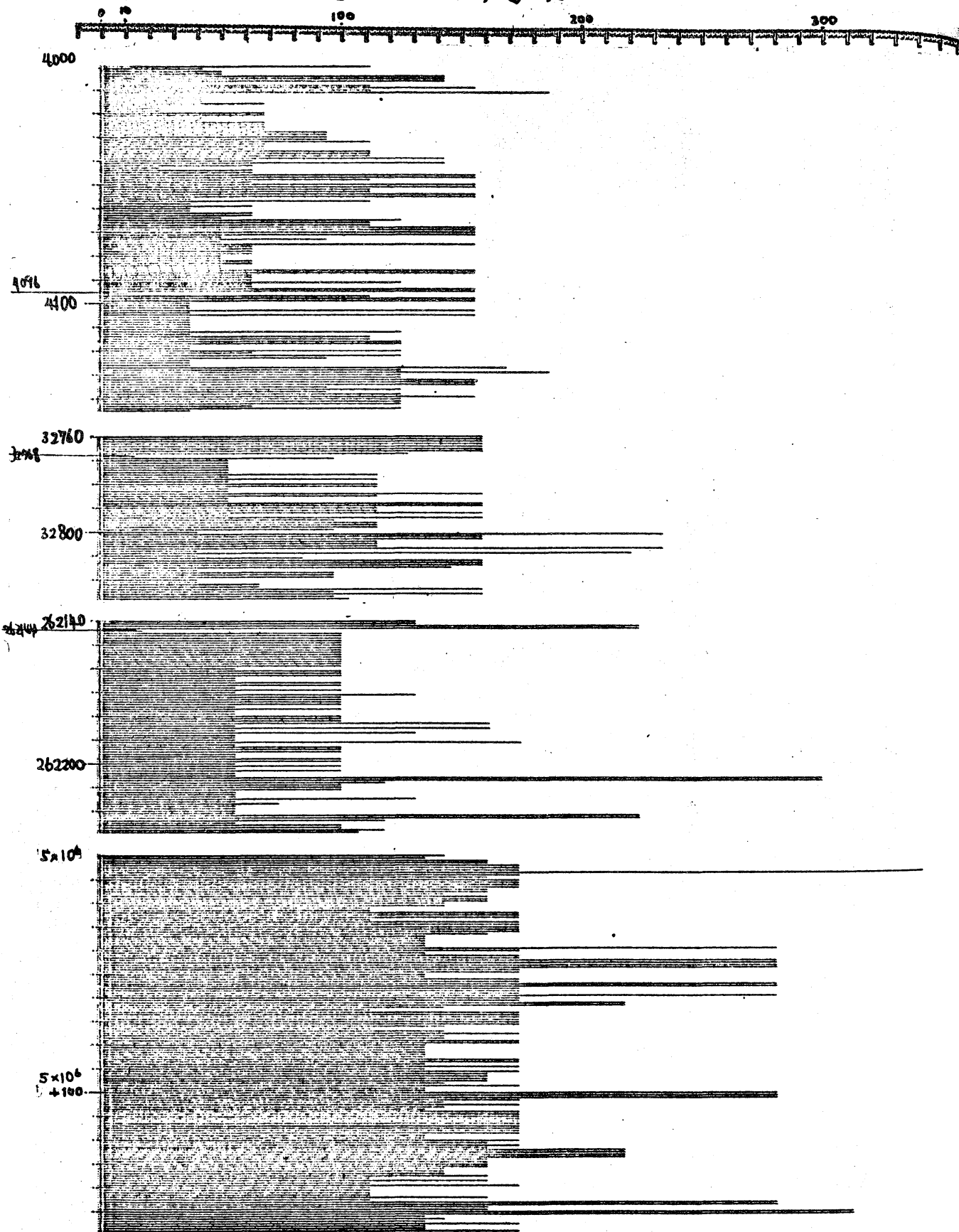


図1 (続き)

図2

 $\times 3 + 1) \div 2$ の 1 に至るまでのステップ数 (4)

3. ループの非存在に対する整数論的問題

この問題に反例があるとするれば, $\{\psi^m(n) \mid m \in \mathbb{N}\}$ が非有界 (無限集合) となる n が存在するか, あるいは, 3以上の奇数 n で, ある回数 m で $\psi^m(n) = n$ となる (ループかてき) ものが存在するか, ということになる。

仮に, 3) ii) ループ $\psi^m(n) = n$ があったとすると, m 回の ψ ステップ中に T ステップ $\lceil (x+1)/2 \rceil$ が l 回あったとし, 各 T ステップはそれぞれ後に m_1-1 回, m_2-1 回, $\dots$, m_l-1 回の D ステップ $\lceil \div 2 \rceil$ を続けたものとする, T, D をそれぞれ作用子と考えると $n \underbrace{TD^{m_1-1}TD^{m_2-1}\dots TD^{m_l-1}}_{T \text{ が } l \text{ 回}} = n$, となる。

$$\frac{n \cdot 3 + 1}{2^{m_1} \cdot 3 + 1} \cdot \frac{3 + 1}{2^{m_2} \cdot \dots \cdot 3 + 1} = n \quad (1)$$

両辺に $2^m = 2^{m_1+m_2+\dots+m_l}$ を掛けると

$$n \cdot 3^l + 3^{l-1} + 3^{l-2} \cdot 2^{m_1} + 3^{l-2} \cdot 2^{m_1+m_2} + \dots + 3^0 \cdot 2^{m_1+m_2+\dots+m_{l-1}} = n \cdot 2^m$$

従って, $k_0=0, k_1=m_1, k_2=m_1+m_2, \dots, k_{l-1}=m_1+m_2+\dots+m_{l-1}, k_l=m$

とよいて,

$$n = \frac{\sum_{j=0}^{l-1} 3^{l-1-j} \cdot 2^{k_j}}{2^{k_l} - 3^l} \quad (0=k_0 < k_1 < \dots < k_{l-1} < k_l) \quad (2)$$

すなわち, (2) の右辺の形で分子か分母で整除されるような l と k_j が存在すれば, その商 n からは, 上述のような T, D ステップのパターンを経て, ループかてきとなる。

$$L: \neg (\exists l \geq 2, 0=k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_l \mid (2^{k_l} - 3^l) \text{ divides } \sum_{j=0}^{l-1} 3^{l-1-j} \cdot 2^{k_j})$$

という整数論的命題が, ループの非存在と同値である。

この理論的問題は、一般的に解決することだけ難しいとしても、 k_j の分布の特別な場合には、解決されているものもあるようである(早大 廣瀬 健氏による)。解決された k_j の分布のパターン の種類を、少しずつでも増やして行くことが出来れば良いかと思っている。

4. ある拡張問題 (研究集会では触れなかったが、参考として記す)

$p \in \mathbb{N}_2$, d は整数 ≥ -1 として, $\psi_{p,d} : \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_1$ と

$$n \mapsto \text{if } p \text{ divides } n \text{ then } n/p \text{ else } n + \lfloor (n+d)/p \rfloor$$

として定義する。今までの ψ は $\psi_{2,1}$ であるが、このように拡張したもののについても、同様な問題を考えられる。 $p > d \geq 0$ として調べて見た結果を次の場ける。(p, d)-問題で調べた n の範囲, ルーアの根(あれば示す)は p 進法で記した。たとえルーアがある場合でも、ルーアの高々数個しかないようである。(2, 1)-問題の延長である (p, 1)-問題に $p = 13, 14$ で初めて反例がでることは興味深い。

(2, 0) 101\$, 10001\$, 100 01010 01000 00001 まで

(3, 0) 211\$, 10 12112 10001 まで

(3, 1) 2 21010 01011 までなし

(3, 2) 21\$, 111 10210 21122 22101 まで

(4, 0) 102\$, 3133 33033 まで

(4, 1) 1332 10002 までなし

(4, 2) 21\$, 2232 12213 まで

(4, 3) 113\$, 110030 13301 まで

(5, 0) 212\$, 143 42212 まで

(5, 1) 333 33311 までなし

(5,2) 42\$. 1022 44203 37

(5,3) 133\$. 404 33223 37

(5,4) 13 34404 11141 37

(6,0) 213 23125 37

(6,1) 34 05211 37

(6,2) 302 12021 37

(6,3) 102 30403 37

(6,4) 143 00213 37

(6,5) 35\$, 224\$, 35 12031 37

(7,0) 36 64241 37

(7,1) 51 42333 37

(7,2) 104 05255 37

(7,3) 41 45011 37

(7,4) 6335\$. 26 52114 37

(7,5) 32\$, 34\$. 52 11426 37

(7,6) 13 56604 37

(8,0) 134\$ 1 74224 37

(8,1) ? 37

(8,2) 1 01233 "

(8,3) 2 07151

(8,4) 2 25441

(8,5) 2 15226

(8,6) 1 74545

(9,0) 332\$

(9,1) ? 37

(9,2~8) ?

(10,0) 44699 37

(10,1) ? 37

(10,2~9) ?

(11,0) 25148 37

(11,1) ? 37

(11,2~10) ?

(12,0) 21\$, 53\$

(12,1) ? 37

(12,2~11) ?

(13,0) B4\$, 2929 37

(13,1) B4\$. 4A82 37

(13,2~12) ?

(14,0) C13D 37

(14,1) 87\$

(14,2~13) ?

(15,1) ? 37

(16,1) "

(17,1) "

(18,1) "

(19,1) "

(20,1) "