

converging factor について

広島大 理 新 谷 尚 義

収束級数

$$(1) \quad U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots$$

の和 S を, 部分和 $S_R = \sum_{l=0}^R U_l$ を計算して求める場合を考えよう。

$$(2) \quad S = S_{n-1} + U_n C_n \quad (n \geq m, U_n \neq 0)$$

と表わすことができるとき C_n を converging factor という。

C_n はつきの方程式をみたす。

$$(3) \quad U_n - U_n C_n + U_{n+1} C_{n+1} = 0$$

$$r_n = U_n / U_{n-1} \text{ か}$$

$$(4) \quad r_n = A_0 + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \frac{A_3}{n^3} + \cdots$$

と展開できる場合を考えよう。

$$(i) \quad A_0 \neq 1 \text{ のとき}$$

$$(5) \quad C_n = B_0 + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} + \cdots$$

と展開できる。 くだし

$$B_0 = 1/(1-A_0), \quad B_1 = B_0^2 A_1, \quad B_2 = B_0^2 A_2 + B_0^3 A_1 (A_1 - 1)$$

である。

(ii) $A_0 = 1$ のとき

$$(6) \quad C_n = n B_{-1} + B_0 + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} + \dots$$

と展開できる。ただし

$$B_{-1} = -1/(1+A_1), \quad B_0 = -A_2 B_{-1}/A_1$$

$$B_1 = (B_0 A_2 + A_3 B_{-1})/(1-A_1),$$

である。

C_n^* を C_n の近似とする。

$$(7) \quad v_n = S_{n-1} + u_n C_n^* \quad (n = m, m+1, \dots)$$

とおくと $\{S_n\}$ の代りに、速く収束する数列 $\{v_n\}$ がえられる。これは

$$(8) \quad d_n = 1 - C_n^* + \gamma_{n+1} C_{n+1}^*$$

とおくと、(1)を級数

$$(9) \quad S_{m-1} + u_m C_m^* + u_m d_m^* + u_{m+1} d_{m+1}^* + \dots$$

で置きかえたことになる。

C_n に γ_j を使って近似しよう。

(i) $A_0 \neq 1$ のとき

$$(10) \quad C_n^{(1)} = \frac{1}{1 - \gamma_{n+1}} = C_n + O(n^{-2})$$

$$(11) \quad C_n^{(2)} = 1 + \frac{\gamma_{n+1}(1 - \gamma_{n+2})}{1 - 2\gamma_{n+2} + \gamma_{n+1}\gamma_{n+2}} = C_n + O(n^{-3})$$

$$(12) \quad d_n^{(1)} = \frac{\gamma_{n+1}(\gamma_{n+2} - \gamma_{n+1})}{(1 - \gamma_{n+1})(1 - \gamma_{n+2})}$$

$$(13) \quad d_n^{(2)} = \frac{\gamma_{n+1}\gamma_{n+2} \{ (1 - \gamma_{n+1})(\gamma_{n+3} - \gamma_{n+2}) + (1 - \gamma_{n+3})(\gamma_{n+1} - \gamma_{n+2}) \}}{\{ 1 - 2\gamma_{n+2} + \gamma_{n+1}\gamma_{n+2} \} \{ 1 - 2\gamma_{n+3} + \gamma_{n+2}\gamma_{n+3} \}}$$

がえられる。

(ii) $A_0 = 1$ の場合

$$(14) \quad C_n^{(2)} = C_n + O(n^{-1})$$

$$(例1) \quad U_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\gamma_n = -1 + \frac{1}{n}$$

$$C_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^3} + \frac{1}{4n^5} - \frac{17}{16n^7} + \dots$$

C_n の近似として

$$C_n^{(1)} = \frac{2n+1}{4n}, \quad C_n^{(2)} = \frac{2n^2+n+1}{2(2n^2+1)}, \quad C_n^{(3)} = \frac{4n^3+2n^2+8n+3}{8n(n^2+2)}$$

がえられる,

$$d_n^{(1)} = -\frac{1}{4n(n+1)^2}, \quad d_n^{(2)} = \frac{3}{2(n+1)(2n^2+1)(2n^2+4n+3)}$$

であるから, 級数

$$S = S_{n-1} + (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{4n^2} + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{4m^2(m+1)^2}$$

$$S = S_{n-1} + (-1)^{n+1} \frac{2n^2 + n + 1}{2n(2n^2 + 1)}$$

$$+ \sum_{m=n}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{3}{2m(m+1)(2m^2+1)(2m^2+4m+3)}$$

がえられる。

n	S_n	$V_n^{(1)}$	$V_n^{(2)}$	$V_n^{(3)}$
2	0.5000000000	0.7500000000	0.6666666667	0.7083333333
26	0.67428596108	0.69314749954	0.69314717980	0.69314718056
59	0.70154994870	0.69314716952	0.69314718056	
400	0.69189874306	0.69314718056		
6000	0.69306385417			

$$(例) 2) \quad u_n = \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

C_n の近似として

$$C_n^{(1)} = n + \frac{1}{2}, \quad C_n^{(2)} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6n}, \quad C_n^{(3)} = n + \frac{1}{2} + \frac{35n^2 + 18}{6n(35n^2 + 25)}$$

がえられる。

n	S_n	$V_n^{(1)}$	$V_n^{(2)}$	$V_n^{(3)}$
2	1.2500000000	1.5000000000	1.6666666667	1.6472222222
14	1.5759958390	1.6448582952	1.6449341562	1.6449340668
115	1.6362761123	1.6449339544	1.6449340668	
1194	1.6440968965	1.6449340668		
2000	1.6444341918			

- [1] Lubkin, S. : A method of summing infinite series, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B., 48(1952), 228-254.
- [2] Rosser, B. J. : Transformations to speed the convergence of series, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B., 46(1951), 56-64.
- [3] Szasz, O. : Summations of slowly convergent series, J. Math. Phys., 28(1949), 272-279.
- [4] Wynn, P. : On a connection between two techniques for the numerical transformation of slowly convergent series, Nedrl. Akad. Wetensch. Indag. Math., 65(1962), 149-154.
- [5] Wynn, P. : On the computation of certain functions of large argument and parameter, BIT, 6(1966), 228-259.