

多変数フーリエ級数の球形総和法に関する

Dirichlet 核の評価について

弘前大理学部 倉坪茂彦

§0 序 多変数 Fourier 級数論において「部分和を如何にとるか」という問題は、「多変数 Fourier 級数を如何にとるべきか」という問題に直結し、かつ解析手段を始めとして研究全般に著しい影響を与えようという意味で、本質的である。代表的な部分和のとり方としては矩形和によるもの、球形和によるものがある。この報告は専ら後者についてである。

一次元のとまこれらは同一となり、「 $p > 1$ のとき L^p -可積分関数の Fourier series は概収束する」という L. Carleson [4] R. A. Hunt [7] の結果がよく知られている。一方二次元以上では矩形和については概収束するが、球形和については一般には概収束しないという C. Fefferman [6] [5] が知られている。このように二次元以上では矩形和と球形和の差は著しい。これらの話題に関しては同講究録の小嶋氏の報告が詳しい。以下 §1 で球形和及びそれに関連する Dirichlet 核について

て, §2 で Dirichlet 核の一樣評価について, §3 で Dirichlet 核の点毎 (pointwise) 評価, §4 では三角級数 $\sum |m|^\alpha e^{2\pi i m x}$ の収束性について述べる。

§1. 球形絶対法と Dirichlet 核

この報告書を通じて T^N を N 次トーラス i.e. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^N$, $\mathbb{Z}^N$ を N 次元格子点の全体 i.e. $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$ とは各 $m_i \in \mathbb{Z}$ なることとする。次の3つの観点から Dirichlet 核の意味を考える。

1° 多変数 Fourier 級数 $f \in L(T^N)$ に対して, その Fourier 係数を $\hat{f}(m) = \int_{T^N} f(x) e^{2\pi i m x} dx$ ($m \in \mathbb{Z}^N$) とし, その $\lambda (\geq 0)$ 次球形部分和を

$$S_\lambda(f, x) = \sum_{|m| \leq \lambda} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$$

とすると, Dirichlet 核 $D(\lambda, x) = \sum_{|m| \leq \lambda} e^{2\pi i m x}$ を用いて

$$S_\lambda(f, x) = \int_{T^N} f(y) D(\lambda, x-y) dy$$

と書ける。 $D(\lambda)$ の L^1 評価は Lebesgue 定数とも呼ばれ, Fourier 級数の一樣収束性と密接な関係がある。これに関しては次の評価がある。(i) $\|D(\lambda)\|_1 = O(\lambda^{\frac{N-1}{2}})$ H.S. Shapiro [14] (ii) $\|D(\lambda)\|_1 = \Omega(\lambda^{\frac{N-1}{2}})$ V.A. Il'in [8]。 $D(\lambda)$ の一樣評価及び点毎評価について若干の結果を紹介するのがこの報告の主目的である。

2° Laplace 作用素 領域 $D = T^N$ で作用素 $-\Delta = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$
 と境界条件 $f(x_i, -\frac{1}{2}) = f(x_i, \frac{1}{2})$ ($i=1, 2, \dots, N, x \in T^N$)

(ただし, $(x_i, z_i) = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ とする。)

の下で考えると固有値, 固有関数の系として $\{4\pi^2|m|^2\}_{m \in \mathbb{Z}^N}$,
 $\{e^{2\pi i m \cdot x}\}_{m \in \mathbb{Z}^N}$ を得るが, この境界値問題に対応するスペクトル分解 $\{E_\lambda\}_{\lambda \geq 0}$ は $(E_\lambda f)(x) = S_{\chi_{\sqrt{\lambda}}}(f, x)$ とする球形部分
 和はスペクトル分解から自然に解釈されることかわかる。又

この問題の spectral function (定義については Alimov,

Il'in & Nikishin [1] を参照) は $\theta(x, y, \lambda) = \sum_{4\pi^2|m|^2 \leq \lambda} e^{2\pi i m \cdot (x-y)}$

で与えられ, $D = R^N$ に対応する spectral function は $\theta_0(x, y, \lambda) = \int_{4\pi^2|s|^2 \leq \lambda} e^{2\pi i (x-y) \cdot s} ds$ で与えられ, spectral function の一般論

から $\theta(x, y, \lambda) - \theta_0(x, y, \lambda) = O(\lambda^{\frac{N-1}{2}})$ unif. in T^N

がよく知られており, かつこの評価は $N \geq 4$ ならば改善できる
 ことを示している。

3° 特殊三角級数 S. Wainger [16] は次の特殊三角級数を
 取り扱っている。(i) $\sum \frac{e^{i|m|(\log|m|)^d}}{|m|^\alpha (\log|m|)^\beta} e^{2\pi i m \cdot x}$, (ii) $\sum \frac{e^{2\pi i |m|^\alpha}}{|m|^\alpha} e^{2\pi i m \cdot x}$
 (iii) $\sum \frac{e^{2\pi i m \cdot x}}{|m|^\alpha}$. (i) は Lipschitz class と Fourier 級数の絶
 対収束性に関連し, (ii) は multiplier に関連し, (iii) は fractional
 integration に関連する重要な級数である。これはそれぞれ

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{|m| \geq k} e^{2\pi i m \cdot x} \right)$ の形に書ける。(iii) については Dirichlet
 核の評価と Abel 変換を用いてある程度収束性を論ずることが

できることを §4 で述べる。また (i), (ii) によりこれは一次元の
ときそうであったように (例えば Zygmund [17], p.197~202)
Van der Corput タイプの定理の開発をまたなければならぬ。

§2 $D(\lambda, x)$ の一様評価

$$R(\lambda, x) = D(\lambda, x) - \int_{|s| \leq \lambda} e^{2\pi i x s} ds = D(\lambda, x) - \pi^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 (2\pi |s|)^{\frac{N}{2}-1} j_{\frac{N}{2}}(2\pi |s| \lambda x) ds$$

(ただし, $j_{\alpha}(z) = (\frac{2}{z})^{\alpha} J_{\alpha}(z)$, J_{α} は α 次の Bessel 関数, $j_{\alpha}(1) = \Gamma(\alpha+1)^{-1}$)
とよくと次の一様評価が得られる。

定理 $|R(\lambda, x)| \leq \begin{cases} C \lambda^{\frac{N}{2}-1} & (N \geq 4) \\ C \lambda \log^2 \lambda & (N=4) \end{cases} \quad \text{unif. in } T^N$

これは K.I. Babenko の 1978 年 [3] の結果である。昨秋仙台で行われた「実解析セミナー 1999」でこの結果を紹介した折「証明は未だ follow できていない」と述べたが、その後、B. Novák の 1968 年 [12] の次の命題；

$$P(\lambda, x) = D(\lambda, x) - \pi^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{N}{2}+1) \delta(x) = O(\lambda^{\frac{N}{2}-1}) \quad \text{for all } x$$

(ただし, $\delta(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{Z}^N)$ and $= 0 \quad (x \notin \mathbb{Z}^N)$)

の証明を少し修正すれば定理の証明が得られることが分ったのでその概略を紹介する。以下簡単のため $N \geq 4$ の場合を述べる。先一段 $\mathcal{A}(s, x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} e^{2\pi i m x - |m|^2 s} \quad (s \in \mathbb{C})$

$$D'(\lambda, x) = \begin{cases} D(\lambda, x) & (\lambda: \text{not integer}) \\ D(\lambda, x) - \frac{1}{2} \sum_{|m|=\lambda} e^{2\pi i m x} & (\lambda: \text{integer}) \end{cases}$$

とす。と、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{e^{us}}{s} ds = \begin{cases} 1 + \mu \frac{e^{ub}}{(T-b)u} & (u > 0) \\ \frac{1}{2} + \mu \frac{b}{T} & (u = 0) \\ \mu \frac{e^{ub}}{\pi u} & (u < 0) \end{cases}$$

(ただし, μ は $|\mu| \leq 1$ なる複素数とする。)

に注意して次の Lemma を得る。

Lemma 1 $T \gg \lambda^N$, $\langle \lambda \rangle \geq \lambda^{-\frac{N}{2}}$ or $\langle \lambda \rangle = 0$ のとき,

$$D'(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{\lambda} - iT}^{\frac{1}{\lambda} + iT} \frac{e^{\lambda s} \Phi(s, x)}{s} ds + O(1)$$

(ただし, $\langle \lambda \rangle = \min_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda - k|$, $O(1)$ は λ, T, x に関して一様)

(注) 以後表わした large order はすべて x に関して一様である。又 五段 終了まで $\langle \lambda \rangle \geq \lambda^{-\frac{N}{2}}$ or $\langle \lambda \rangle = 0$ の仮定は持続するものとする。

二段 次に一般 Gauss 和 $S_{h,k,m}$ を定義する。

$$S_{h,k,m} \equiv \sum_{a_1, \dots, a_N=1}^k \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} |a|^2 + \frac{2\pi i m a}{k}\right) \quad (a = (a_1, \dots, a_N))$$

$$= \prod_{j=1}^N \left\{ \sum_{a=1}^k \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} a^2 + \frac{2\pi i m a}{k}\right) \right\}$$

$$\text{一般に: } |S_{h,k,m}| \leq c k^{\frac{N}{2}}$$

(注) このより以降 h, k が同時に式に現われたときは $(h, k) = 1$ と常に仮定する。

$$\begin{aligned} \text{フーリエ変換を使うと} \quad \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m x - m^2 s} &= \sum_{a=1}^k \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i (jka + x - (jka)s)} \\ &= \sum_{a=1}^k e^{-2\pi i \frac{h}{k} a^2} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-(s - 2\pi i \frac{h}{k}) |a + bj|^2 + 2\pi i x(a + bj)} \right\} = \sum_{a=1}^k e^{-2\pi i \frac{h}{k} a^2} \left\{ \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{k(s - 2\pi i \frac{h}{k})^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi i a j}{k} - \frac{\pi^2 (j - ka)^2}{k(s - 2\pi i \frac{h}{k})}} \right\} \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{k(s - 2\pi i \frac{h}{k})^{\frac{1}{2}}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 (j - ka)^2}{k^2 (s - 2\pi i \frac{h}{k})}} \left\{ \sum_{a=1}^k e^{-2\pi i \frac{h}{k} a^2 + \frac{2\pi i a j}{k}} \right\} \end{aligned}$$

Lemma 2 $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > 0$ のとき, 任意の h, k に対して

$$\mathcal{A}(s, x) = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{k^N (s - 2\pi i \frac{h}{k})^{\frac{N}{2}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} S_{h,k,m} \exp\left(-\frac{\pi^2 |m - kx|^2}{k^2 (s - 2\pi i \frac{h}{k})}\right)$$

次に, $R_k(x) \equiv \min_{m \in \mathbb{Z}^N} |m - kx|^2$, 又 $R_k(x) = |m - kx|^2$ のとき

$S_{h,k}(x) \equiv S_{h,k,m}$ と定義すると, $|t - 2\pi h/k| \leq 2\pi/k\sqrt{x}$ のとき,

Lemma 3

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s, x) &= \frac{\pi^{\frac{N}{2}} S_{h,k}(x)}{k^N (s - 2\pi i \frac{h}{k})^{\frac{N}{2}}} \exp\left\{-\frac{\pi^2 R_k(x)}{k^2 (s - 2\pi i \frac{h}{k})}\right\} \\ &+ C\mu \frac{\lambda^{\frac{N}{2}}}{k^{\frac{N}{2}} (1 + \lambda^2 |t - 2\pi i \frac{h}{k}|^2)^{\frac{N}{4}}} \exp\left\{-\frac{C\lambda}{k^2 (1 + \lambda^2 |t - 2\pi i \frac{h}{k}|^2)^2}\right\} \end{aligned}$$

(ただし, $s = \frac{1}{\lambda} + it$, C は定数, μ は x に依存する, $|\mu| \leq 1$ する複素数)

4 三段 $\sqrt{x}$ に属する Farey 数列とは分母が正で $\sqrt{x}$ に近くなるようなすべての既約分数を増大する順に並べたものであるが, 相隣接する 2 つの分数 $\frac{h'}{k'} < \frac{h}{k} < \frac{h''}{k''}$ とするとき, $2\pi h/k$ を含む小区間 $V_{h,k} \in [2\pi \frac{h'+h}{k'+k}, 2\pi \frac{h''+h}{k''+k}]$ と定めよう。このとき, $t \in V_{h,k}$ ならば $|t - 2\pi h/k| \leq 2\pi/k\sqrt{x}$ である。

今区間 $[-2\pi\lambda^N, 2\pi\lambda^N] \in \{V_{h,k}\}_{k \leq \sqrt{x}}$ で分割し, Lemma 1 に注意すれば $D'(\lambda, x) = \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{|h| \leq kT_1} \frac{1}{2\pi} \int_{V_{h,k}} \frac{e^{\lambda s} \mathcal{A}(s, x)}{s} ds + O(1)$
(ただし, $T_1 = \lambda^N$) を得, したがって Lemma 3 を代入して,

Lemma 4

$$D'(\lambda, x) = \pi^{\frac{N}{2}} \sum_{k \leq \sqrt{x}} \sum_{|h| \leq kT_1} \frac{S_{h,k}(x)}{k^N} \frac{1}{2\pi} \int_{V_{h,k}} \frac{\exp\left\{\lambda s - \frac{\pi^2 R_k(x)}{k^2 (s - 2\pi i \frac{h}{k})}\right\}}{(s - 2\pi i \frac{h}{k})^{\frac{N}{2}} s} dt + O(\lambda^{\frac{N}{2}} \log \lambda)$$

すなわち, $F(\lambda, a, b) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{\lambda}-i\infty}^{\frac{1}{\lambda}+i\infty} \frac{e^{\lambda s - \frac{b}{s+ia}}}{(s-ia)^{\frac{N}{2}} s} ds$ とおけば,

Lemma 5

$$D'(\lambda, x) = \pi^{\frac{N}{2}} \sum_{k \leq \sqrt{\lambda}} \sum_{|a| \leq k T_1} \frac{S_{R,k}(x)}{k^N} F(\lambda, 2\pi R/k, \pi^2 R^2(a)/k^2) + O(\lambda^{\frac{N}{4}} \log \lambda)$$

Ⅳ 四段 次に, n を $N/4 - 1 \leq n$ なる最小の整数とし,

$$\frac{1}{s+ai} = \frac{1}{ai} \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{s}{ai}\right)^j + \frac{\left(-\frac{s}{ai}\right)^n}{s+ai} \quad \text{と} \quad \text{す.}$$

$$\left| \frac{1}{(ai)^n} \int_{\frac{1}{\lambda}-i\infty}^{\frac{1}{\lambda}+i\infty} \frac{e^{\lambda(s+ai) - \frac{b}{s}}}{s^{\frac{N}{2}-n} (s+ai)} ds \right| \leq \frac{\lambda^{\frac{N}{2}-n-1}}{|a|^n} \log(1+\lambda|a|)$$

を考慮し, Hankel の公式

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{\lambda s - \frac{b}{s}}}{s^{\nu+1}} ds = \begin{cases} \lambda^{\nu} j_{\nu}(\sqrt{b\lambda}) & (b > 0) \\ \frac{\lambda^{\nu}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)} & (b = 0) \end{cases}$$

を用いて得る。

Lemma 6 $D'(\lambda, x) = \pi^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi \sqrt{R(a)\lambda})$

$$= \pi^{\frac{N}{2}} \sum_{0 \leq j < \frac{N}{2}+1} \frac{(-1)^j}{(2\pi i)^{j+1}} \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{\lambda}} \frac{\lambda^{\frac{N}{2}-j-1}}{k^{N-j-1}} j_{\frac{N}{2}-j-1}(2\pi \sqrt{\frac{R_k(a)\lambda}{k^2}}) \sum_{|a| \leq k T_1} \frac{S_{R,k}(x) e^{2\pi i \frac{R}{k} \lambda}}{k^{j+1}} + O(\lambda^{\frac{N}{4}} \log \lambda)$$

Ⅴ 五段 $\sum_{|a| \leq k T_1} \frac{S_{R,k}(x) e^{2\pi i \frac{R}{k} \lambda}}{k} = \sum_{0 \leq R < k} \sum_{0 \leq \frac{R}{k} + m \leq T_1} \frac{S_{R+k m, k}(x) e^{2\pi i (\frac{R}{k} \lambda + m \lambda)}}{k + k m}$

$$= \frac{1}{k} \sum_{0 \leq R < k} S_{R,k}(x) e^{2\pi i \frac{R}{k} \lambda} \sum_{0 \leq \frac{R}{k} + m \leq T_1} \frac{e^{2\pi i m \lambda}}{k + m}$$

すなわち,

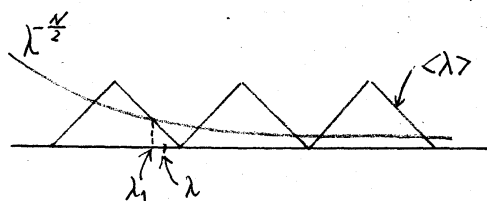
$$\sum_{0 < \frac{k}{h} + m \leq T_1} \frac{e^{2\pi i m \lambda}}{\frac{k}{h} + m} = \sum_{0 < |m| \leq T_1} \frac{e^{2\pi i m \lambda}}{m} + O(\max(\frac{k}{h}, \frac{k}{h-1}))$$

に注意すれば、次を得る。

Lemma 7 $|D'(\lambda, x) - \pi^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi \sqrt{R(\alpha)\lambda})| \leq C \lambda^{\frac{N}{2}-1}$

六段 前段までは $\langle \lambda \rangle \geq \lambda^{-\frac{N}{2}}$ or $\langle \lambda \rangle = 0$ を仮定してきたが、この制限は次のようには必ずしもとける。 $\lambda \in$

$0 < \langle \lambda \rangle < \lambda^{-\frac{N}{2}}$ とする。 $\lambda_1 \in \langle \lambda_1 \rangle = \lambda_1^{-\frac{N}{2}}$ and $|\lambda - \lambda_1| \leq \lambda_1^{-\frac{N}{2}}$



なる実数とすれば、

$$D'(\lambda, x) = D'(\lambda_1, x) = D(\lambda, x)$$

$$|\lambda_1^{\frac{N}{2}-1} - \lambda^{\frac{N}{2}-1}| \leq C$$

よって、 $|\lambda_1^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi \sqrt{R(\alpha)\lambda_1}) - \lambda^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi \sqrt{R(\alpha)\lambda})| \leq C$ となり

Lemma 8 任意の $\lambda \geq 1$ に対し

$$|D'(\lambda, x) - \pi^{\frac{N}{2}} \lambda^{\frac{N}{2}} j_{\frac{N}{2}}(2\pi \sqrt{R(\alpha)\lambda})| \leq C \lambda^{\frac{N}{2}-1}$$

こゝで、 $\lambda = k$ (integer) のとき $D(k, x) = \lim_{\lambda \rightarrow k+0} D'(\lambda, x)$

に注意すれば求める定理を得る。

§3 $D(\lambda, x)$ の点毎評価

B. Novák は "Gitterpunkte mit Gewichte" を表題とする一連の研究で Dirichlet 核の各種の評価を得ている。そのうちの点毎評価に関連する部分を定理の形にまとめる次のようにする。

定理 (i) $N > 4$ とし, $P(\lambda, x) = O(\lambda^{\frac{N}{2}-1})$ (all x)

(ii) $N > 4$ とし, $P(\lambda, x) = o(\lambda^{\frac{N}{2}-1})$ ($x \notin \mathbb{Q}^N$)

(iii) $N > 4$ とし, $P(\lambda, x) = \Omega(\lambda^{\frac{N}{2}-1})$ ($x \in \mathbb{Q}^N$)

(iv) $N > 4$ とし, $P(\lambda, x) = O(\lambda^{\frac{N}{2}} \log \lambda)$ (a.e x)

(v) $N \geq 2$ とし, $P(\lambda, x) = \Omega(\lambda^{\frac{N-1}{2}})$ (all x)

((i), (ii), (iii) は [12], (iv) は [13] (v) は [11])

(注₁) (iv) に関しては, 直交級数論の Rademacher-Menchoff の定理により, 「 $N \geq 2$ のとき, $O(\lambda^{\frac{N}{2}} \log^\alpha \lambda)$ ($\alpha > \frac{3}{2}$) (a.e x)」が従うことは昨秋の実解析セミナーで報告した。[10]

(注₂) $N = 2, 3, 4$ のとき, (i), (iii) の評価を得ることは興味深い問題である。とくに $N = 2$, $x = 0$ のときは格子点問題と呼ばれ (岩波・数学辞典 p 711) $O(\lambda^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) が予想されていまだ未解決である。

(注₃) 「 $\frac{N-1}{2} \leq \alpha_0 \leq \frac{N}{2}$ なる α で $O(\lambda^{\alpha+\varepsilon})$ for a.e x , かつ $\Omega(\lambda^{\alpha-\varepsilon})$ for a.e x なるものが存在するか」は興味ある問題と思うが, これは次第と関係が深い。

§4 三角級数 $\sum |m|^\alpha e^{2\pi i m x}$ の収束性

この級数は $f_\alpha(x) = C_\alpha |x|^{\alpha-N} + g_\alpha(x)$ (ただし, $g_\alpha \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$

$C_\alpha = \pi^{\alpha+\frac{N}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{N-\alpha}{2})^{-1}$) の Fourier 級数である。とくに

$N=1$ のときはその性質が詳細に研究され (Zygmund [17]_I p186~p194), Capacity の問題 ([17]_I p194~p197) あるいは Fractional integration の問題 ([17]_{II} p133~p142) 等とでは重要な役割を果たしてゐる。 $N \geq 2$ のときこの級数について乙次のような研究がある。

(1) M.J. Kohn [9] $N \geq 1, N-1 < \alpha < N$ とき,

$$\exists K > 0; \left| \sum_{0 < |m| \leq t} |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m x} \right| \leq K |x|^{N-\alpha} \text{ unif. in } x \in \mathbb{T}^N$$

(2) E.M. Stein & G. Weiss [15] (p268)

$$N \geq 2 \text{ のとき, } \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{0 < |m| \leq t} |m|^{-\frac{N-1}{2}} e^{2\pi i m x} \right| = \infty \text{ a.e. } x$$

(3) Sh. A. Alimov, V. A. Il'in and E. M. Nikishin [2]

$$N \geq 2 \text{ のとき, } \left\| \sum_{0 < |m| \leq t} |m|^{-\frac{N-1}{2}} e^{2\pi i m x} \right\|_1 = O(1)$$

(4) S. Kuratsuoka [10]

$$N \geq 2 \text{ のとき, } \lambda^{-1} \int_0^\lambda \left| \sum_{0 < |m| \leq t} |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m x} \right| dt = O(1) \\ \text{a.e. } x \text{ for } \alpha > \frac{N-1}{2}$$

これらに関連して次の (5), (6) が成立する。

(5) (I) の不等式は $N \geq 4$ のときは $N-2 < \alpha < N$ に対して成立し, $\alpha < 1$: $N \geq 4$ のときは, $0 < \alpha < N-2$ で成立し得る。

(6) (I) $N \geq 4$, $\alpha > N-2$ ならば $x=0$ を除いて各点で収束

(II) $N \geq 4$, $\alpha < N-2$ ならば $x \in \mathbb{Q}^N$ で発散

(III) $N \geq 2$, $\alpha > N/2$ ならば a.e. x で収束

(IV) $N \geq 2$, $\alpha < \frac{N-1}{2}$ ならば 各点で発散

このうち (5) の前半は [10] (ただし, P_5 の I_4 の評価は少し修正を要する), 後半は (6) の (ii) より従う。又 (6) は §3 の定理と Abel 変換より従う。最後に注意を述べてこの報告を終える。

(注) $N \geq 2$ とし, $\alpha_0 \equiv \inf \{ \alpha \mid \sum |m|^{-\alpha} e^{2\pi i m x} \text{ が概収束} \}$ とすると, (iii), (iv) より $\frac{N-1}{2} \leq \alpha_0 \leq \frac{N}{2}$ が従うが, この α_0 を求めるとこの問題は §3 の (注,) と関連して興味がある。§3 の (注,) で述べた格子点問題の予想, 及び (3) (4) より $\alpha_0 = \frac{N-1}{2}$ が予想される。

References

- [1] Sh. A. Alimov, V. A. Il'in & E. M. Nikishin Convergence problems of multiple trigonometric series and spectral decomposition I Russian Math. Surveys 31 (1976) no. 6 p. 79-86
- [2] 同上 II Russian Math. Surveys 32 (1977) no. 1 p. 115-139.
- [3] K. I. Babenko On the asymptotics of the Dirichlet kernel of spherical means of multiple Fourier series Dokl. Akad. Nauk. SSSR vol. 19 (1978) p. 1457-1461.
- [4] L. Carleson On convergence and growth of partial sums of Fourier series Acta. Math. vol. 116 (1966) p. 125-157.

- [5] C. Fefferman The multiplier problem for the ball
Ann. Math. vol. 94 (1971) p 330-336.
- [6] 同上 On the convergence of multiple Fourier series
Bull. Amer. Math. Soc. vol. 77 (1971) p 744-745.
- [7] R. A. Hunt On the convergence of Fourier series
Orthogonal expansions and their continuous analogues.
Southern Illinois Univ. Pr. 1968 p 235-255.
- [8] V. A. Il'in Problems of localization and convergence for
Fourier series in fundamental systems of functions of the
Laplace operator Russian Math. Surveys vol. 23 (1968) p 61-120.
- [9] M. J. Kohn Spherical convergence and integrability of
multiple trigonometric series on hypersurface
Studia Math. vol. 43 (1972) p 345-354.
- [10] S. Kuratsuji 実解析セミナー - 1979.
- [11] B. Norák Über Gitterpunkte mit Gewichte Mehrdimensionalen Ellipsoiden : Mittelwertsätze
Czechoslovak. Math. J. vol. 17 (92) 1967 p 609-623.
- [12] 同上 Verallgemeinerung eines Petersson'schen Satzes
und Gitterpunkte mit Gewichten Acta. Arith. XIII 1968 p 423-454.
- [13] 同上 On a certain sum in number theory II
Trans. Amer. Math. Soc. vol. 195 (1974) p 357-364.

- [44] H.S. Shapiro Lebesgue constants for spherical partial sums
 Jour. Approx. theory. vol.13 (1975) p 40-44.
- [45] E.M. Stein & G. Weiss Introduction to Fourier analysis
 on Euclidean spaces Princeton Univ. Pr. (1971)
- [46] S. Wainger Special trigonometric series in k -dimensions
 Memoirs Amer. Math. Soc. no.59 (1965)
- [47] A. Zygmund Trigonometric series vol I, vol II
 Cambridge Univ. Pr. (1959)
 ([47]_I is vol I, [47]_{II} is vol. II (註す。))