

Brown 運動と調和解析 II — Varopoulos の方法の周辺 —

東北大理 新井 仁之 (Hitoshi Arai)

Brown 運動をはじめとする種々の拡散過程や martingale が解析学、とりわけ古典調和解析学に及ぼした影響は少なくない。その中でも、N. Th. Varopoulos が行なった研究 ([19], [20], [21]) は、Burkholder, Gundy, Silverstein [1] 以来のこの方面の研究方法を著しく発展させ、martingale 理論、関数環論に影響を及ぼし、さらに、古典調和解析学にも新しい結果をもたらした。

本稿では、その Varopoulos の方法を、調和解析学への応用という立場から紹介し、「Brown 運動と調和解析 I」(以下「I」と略記)の定理1'をもとに、その適用範囲を広げることと試み、調和解析学への応用をいくつか与える。また、「I」との関連から) 関数環論に現れる一つの解析射影の確率的な構成についても述べる。

§1. 解析学から見た Varopoulos の方法

$\{B_t\}$ を n -次元 Brown 運動で、 $B_0 = 0$ a.s. なるものとし、

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を $\{B_t\}$ が定義されている完備確率空間とする。

$$\mathcal{F}_t := \sigma[B_s : 0 \leq s \leq t] \vee \{P\text{-null sets}\}$$

とし、以下では、簡単のため、 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$ ($:= \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$) と仮定して

おく。このとき、組 $(\Omega, \mathcal{F}, P; (\mathcal{F}_t); (B_t))$ を n -次元 Brownian space といい、 B_n で表わす。 $B_t = (x_t^1, \dots, x_t^n)$ とおく。

B_n の偶数次元化のため、

$$B_{n'} := \begin{cases} B_n & (n \text{ が偶数}) \\ B_n \otimes B_1 & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

とおく。ここで、 $B_n \otimes B_1$ とは、 B_n を 1 次元もち上げることで、

これは、1 次元 Brownian space $(\Omega', \mathcal{F}', P'; (\mathcal{F}'_t); (B'_t))$ を適当に

とることによって、 $(\Omega \otimes \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \otimes P'; (\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t); (B_t, B'_t))$

としたものである。 $n' = 2m$ のとき、 $B_{n'}$ に対して、

$$z_t^j := x_t^{j-1} + \sqrt{-1} x_t^{2j} \quad ; \quad (B_t, B'_t) = (x_t^1, \dots, x_t^{2m}) \quad (j=1, \dots, m)$$

とおく。

この $B_{n'}$ は、Varopoulos の理論では、重要な役割を果たす。

さて、martingale 理論で定義され研究されている Hardy 空間 $\mathcal{M}^p$ は次のようなものである：

$$\mathcal{M}^p(B_n) := \left\{ X_\infty : \begin{array}{l} X = (X_t) \text{ は } \mathcal{F}_t \text{ に適合した martingale で、} \\ \|X\|_{\mathcal{M}^p} := \left\| \sup_{0 \leq t < \infty} |X_t| \right\|_{L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)} < \infty \end{array} \right\}$$

($1 \leq p \leq \infty$)。よく知られているように、 $\mathcal{M}^p(B_n) \subsetneq L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ かつ $\mathcal{M}^p(B_n) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ($1 < p \leq \infty$) である。

以下で行う議論は、主として $\mathcal{M}^p(B_n)$ に関するものであるが、その多くは、 $BMO(B_n)$ に対しても成立している。

Varopoulos の理論は、この $\mathcal{M}^p(B_n)$ と球面 $S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$ 上の Hardy 空間との関係を求めることが、その基礎となっている： $U = \{z \in \mathbb{R}^n : |z| < 1\}$, $\partial U = S^{n-1}$ とし、 σ を ∂U 上の Lebesgue 測度とする。 $H^p(\sigma)$ の定義は、「 I_1 」と同じものとする。 $\tau := \inf \{t > 0 : B_t \not\subset U\}$ とし、 $H^p(\sigma)$ と $\mathcal{M}^p(B_n)$ とを次の二つの変換で関連づけておく： $f \in L^1(\sigma)$ に対して、

$$Mf_t := \begin{cases} PI[f](B_t) & (0 \leq t < \tau) \\ f(B_\tau) & (\tau \leq t) \end{cases}$$

とおく。但し、ここで、 $PI[f]$ は f の Poisson 積分である。このとき、 Mf_t は $\mathcal{F}_t$ に適合した martingale で、 $Mf_\infty = f(B_\tau)$ a.s. となっている。また、 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に対して、

$$NX(x) := E[X | B_\tau = x] \quad (x \in \partial D)$$

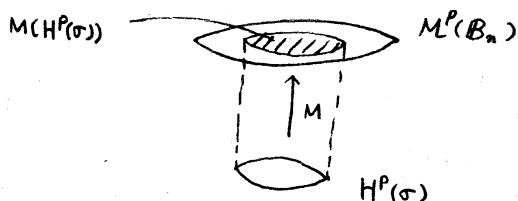
とおく。明らかに、

$$\|NX\|_{L^p(\sigma)} \leq C_p \|X_\infty\|_{L^p} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

である。

このとき、Burkholder-Gundy-Silverstein [1] (あるいは P. Meyer [22], Arai [14]) より、 $M: f \mapsto Mf_\infty$ は、 $H^p(\sigma)$ の

$M^p(B_n)$ の中への埋め込みになっている。



Varopoulos 以前の研究方法は、この埋め込みの考え方に依るものが多い。すなわち、 $H^p(\sigma)$ の元を M によって、 $M^p(B_n)$ の元とみなし、 $M^p(B_n)$ の中において、 $M(H^p(\sigma))$ の範囲を越えないように確率論的に解析し、それを M の逆像によって、 $H^p(\sigma)$ の結果に引き戻すというもの——ないしは、このタイプのもの——である。

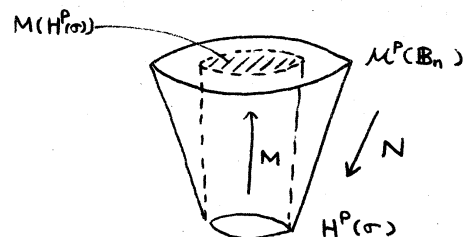
しかし、ここで、“ $M(H^p(\sigma))$ の範囲を越えない”という制限は、確率解析の使用に多くの制限を課し、martingale 理論の古典解析学への応用範囲をせばめてしまっている。

Varopoulos の方法の第 1 のポイントは、写像 N の

$$\|NX\|_{H^p(\sigma)} \leq C_p \|X\|_{M^p} \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

なる有界性を示し、この有界性を用いて、“ $M(H^p(\sigma))$ の範囲を越えない”なる制限を除去できる可能性を示したことである。すなわち、 $f \in H^p(\sigma)$ の M による像 Mf の確率解析による結果が $M(H^p(\sigma))$ の範囲を越えるものであっても、それを N によって、 $H^p(\sigma)$ の結果に引き戻せることをいくつかの例によ

て示したのである。



Varopoulos の方法の

第2のポイントは、 $M^p(B_n)$

を $M^p(B_n)$ に埋め込んで考えても、不都合は（現時点では）生じないことに着目し、一般次元における解析も、偶数次元の Brownian space の中で考えることができて示したことである。さらに、第3のポイントは、 B_n を偶数次元化した B_n において、次の分解を行なったことである：

$\forall x \in M^p(B_n) \quad (1 \leq p) \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_m; \beta_1, \dots, \beta_m \text{ (non-anticipating functional)}$

$$X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j(s) dz_s^j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j(s) d\bar{z}_s^j \quad (0 \leq t)$$

(-は複素共役)

この分解自身は、Ito representation theorem (cf. [23]) と簡単な計算によって導びかれるが、しかし、この分解の効用は大きい。実際、

$$\mathcal{H}^p(B_n) := \left\{ X_\infty \in M^p(B_n) : X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j(s) dz_s^j ; \alpha, \dots, \alpha_m \text{ は } \right. \\ \left. \text{non-anticipating functional} \right\}$$

$(1 \leq p \leq \infty)$ とおくとき、次のことが成り立つ ([20])：

$$(1.1) \quad M^p(B_n) = \mathcal{H}^p(B_n) \oplus \overline{\mathcal{H}}_0^p(B_n) \quad (1 \leq p < \infty)$$

但し、ここで、 $\overline{\mathcal{H}}_0^p(B_n) := \{ \bar{X} : X \in \mathcal{H}^p(B_n), X_0 = 0 \}$;

$$(1.2) \quad X \in \mathcal{H}^p(B_n), Y \in \mathcal{H}^q(B_n) \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \geq 1 \right) \text{ のとき、}$$

$Z_t := X_t Y_t$ は martingale で、さらに $Z_\infty \in \mathcal{H}^1(B_n)$;

$$(1.3) \quad \mathcal{H}^\infty(B_n) \text{ は } * \text{弱 Dirichlet 環} \text{ になっている。}$$

とりわけ、(1.3) が本質的である。*弱 Dirichlet 環とは、可換 Banach 環の一種で、単位円周 Γ 上の $H_A^\infty(\Gamma, \frac{d\theta}{2\pi})$ (「I」参照) と抽象化したものである ($\frac{d\theta}{2\pi}$ は、 Γ 上の正規化した Lebesgue 測度)。その定義は、次のものである。

定義 (Srinivasan, Wang ; [16] 参照) $(S, \mathcal{B}, m)$ を確率空間とする。 $A \subset L^\infty(S, \mathcal{B}, m)$ が次の条件を満たすとき、 A を *弱 Dirichlet 環という：

- (i) $A \ni 1$;
- (ii) A は $L^\infty(S, \mathcal{B}, m)$ の部分空間で、かつ $f \in A, g \in A$ ならば $fg \in A$ である ;
- (iii) $\int fg dm = \int f dm \int g dm \quad (f, g \in A) ;$
- (iv) $A + \overline{A}$ は $L^\infty(S, \mathcal{B}, m)$ で *弱相密である。

勿論、 $H_A^\infty(\Gamma, \frac{d\theta}{2\pi})$ ($A := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$) は、*弱 Dirichlet 環の

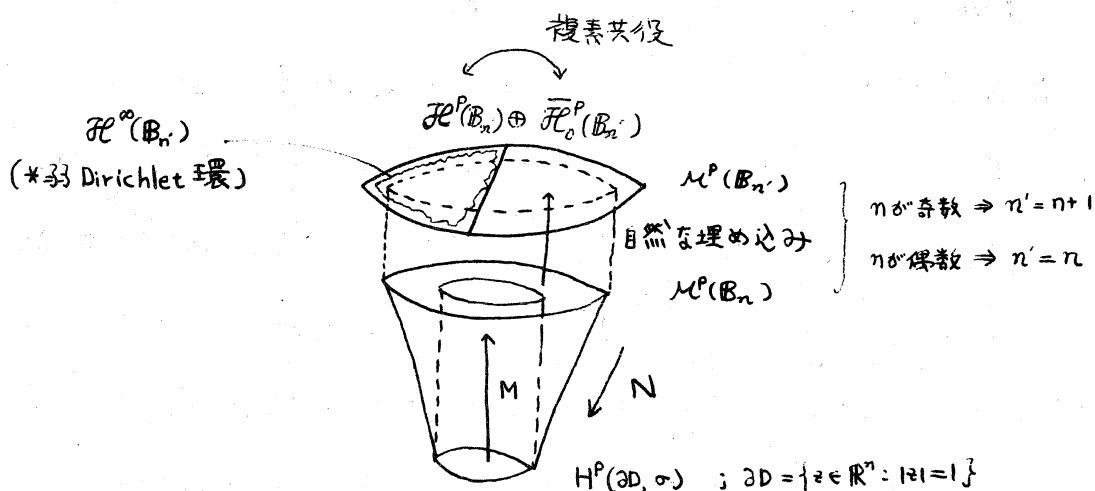
一例である。*弱 Dirichlet 環の例及び定理については、[16] [25] に詳述されている。

注意. $X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j(s) dz_j^s$ なる表現をもつ martingale は、holomorphic martingale と呼ばれている。holomorphic martingale は、Georgii-Skarpe [36] の Conformal martingale になっている。しかし、逆は成立しない。たとえば、 $\bar{z}_t^1$ は Conformal mart. であるが holomorphic mart. ではない。しかし、martingale X に対して、次の成立する：

X が Conformal martingale $\Leftrightarrow X$ および $\bar{X}$ が holomorphic martingale.

Varopoulos の方法において、martingale を holomorphic な部分に分解することは本質的で、これを conformal に置きかえることは難しい。実際、(1.2), (1.3) は、holomorphic mart. 特有の性質である。たとえば、(1.2) によれば、 $z_{\tau \wedge t}^1, \bar{z}_{\tau \wedge t}^1$ ($\tau = \inf\{t > 0 : |z_t^1| > 1\}$) はともに conformal であるが、 $z_{\tau \wedge t}^1 \bar{z}_{\tau \wedge t}^1 = |z_{\tau \wedge t}^1|^2$ は martingale ではない。

以上述べてきた Varopoulos の方法の 3 つのポイントをまとめて、図式化すると次のようになる：



ここで、注目すべき事柄は、

$$(*) \quad H^p(B_{n'}) = H^p(B_n) \oplus \bar{H}_0^p(B_n) \quad 1 \leq p < \infty$$

なる分解が、いっは、2次元的(複素1次元的)現象である
 ということである。実際、解析学の場合、 $D := \{z \in \mathbb{C}^m : |z| < 1\}$
 $\sigma := "$ ∂D 上の Lebesgue 測度" $"$ のとき、

$$H^p(\partial D, \sigma) = H_A^p(\partial D, \sigma) \oplus \bar{H}_{A,0}^p(\partial D, \sigma)$$

($\bar{H}_{A,0}^p(\partial D, \sigma) := \{\bar{f} : f \in H_A^p(\partial D, \sigma), \int f d\sigma = 0\}$) なる分解は、 $m=1$

(i.e. $n=2m=2$) の場合に限られている。しかし、上図の示すところ
 は、 $m>1$ に対して解析学的に不可能であった分解が、
 martingale の設定のもとでは、可能になっているということ
 である。このことの裏付けは大きい。なぜなら、関数環論
 が明らかにしているところによれば、単位円周上の古典調和
 解析に現れる多くの結果は、ほとんど、2次元的分解

$L^2 = H_A^2 \oplus \bar{H}_A^2$ にもとずいていえるものだからである。しかも、その結果の多くは、すでに、*弱 Dirichlet 環の場合にまで抽象化されている。たとえば、Helson-Szegö の定理 (cf. [26], [27], [20])、不変部分空間に関する種々の定理、因数分解定理、などである (cf. [16])。従って、前頁の図からわかるように、 $H^p(\partial D, \sigma)$ ($\partial D := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$) の解析の問題は、 $M^p(B_{\mathbb{R}^n})$ にまで引き上げて考察すれば、holomorphic martingale と *弱 Dirichlet 環の理論と通することによって、単位円周上での手法を用いて解析することができることがわかる。この Varopoulos の方法の適用例として次のようなものがあげられる：

例 1 ([20]). $\mathcal{H}^\infty(B_{\mathbb{R}^n})$ (*弱 Dirichlet 環) に対する「Helson-Szegö の定理」 $\Rightarrow$ 「Garnett-Jones の BMO と L^∞ の距離に関する定理 ([28]) の $\partial D := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$ での証明」

例 2. 「 $\mathcal{H}^\infty(B_{\mathbb{R}^n})$ (*弱 Dirichlet 環) に対する Inner-Outer 分解」 $\Rightarrow$ 「C. Fefferman の H^1 -BMO に関する不等式 ([2]) の $\partial D := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$ での証明」

しかし、この方法には欠点もある。それは、 $M^p(B_{\mathbb{R}^n})$ での解析の結果と N によって $H^p(\partial D, \sigma)$ の結果に引き戻しても、それが、解析学的には、意味のない結果に変化してしまうこと

とが (ひんぱんに) あるということである。その例を一つ示しておく。

例3 (コロナ問題に関して)。 $\partial D := \{z \in \mathbb{C}^m : |z| = 1\}$ とおく。

このパラグラフでは、 $f \in L^1(\partial D, \sigma)$ に対して、 $f(z) = PI[f](z)$ ($z \in D$)

と略記する。コロナ問題とは、

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} f_1, \dots, f_R \in H_A^\infty(\partial D, \sigma) \text{ (但し, } \exists \delta > 0 : \inf_{z \in D} \sum_{j=1}^R |f_j(z)| \geq \delta) \text{ に対して,} \\ \exists g_1, \dots, g_R \in H_A^\infty(\partial D, \sigma) : \sum_{j=1}^R f_j(z) g_j(z) = 1 \text{ (} \forall z \in D \text{)} \end{array} \right. ?$$

なる問題である。 $m=1$ の場合は、L. Carleson [29] によって肯定的に解かれたが、 $m>1$ の場合は、未解決である。ところで、

Varopoulos は次の定理を証明した：

定理 V ([20]; see also [30]) . $X^{(1)}, \dots, X^{(R)} \in \mathcal{H}^\infty(B_{n'})$ が

$\inf_{t \geq 0} \sum_{j=1}^R |X_t^{(j)}| \geq \exists \delta > 0$ を満たすならば、ある $Y^{(1)}, \dots, Y^{(R)} \in \mathcal{H}^\infty(B_{n'})$ が、
 $\sum_{j=1}^R X_t^{(j)} Y_t^{(j)} = 1$ ($\forall t$) a.s. なるものが存在する。

この定理 V と、8頁の図式より、次のことがわかる：

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} f_1, \dots, f_R \in H_A^\infty(\partial D, \sigma) \text{ が } \inf_{z \in D} \sum_{j=1}^R |f_j(z)| \geq \exists \delta > 0 \text{ を満たせば,} \\ \exists g_1, \dots, g_R \in N\mathcal{H}^\infty(B_{2m}) : \sum_{j=1}^R f_j(z) g_j(z) = 1 \text{ (} \forall z \in D \text{)} \end{array} \right.$$

Varopoulos [20] によれば、 $m=1$ のとき $N\mathcal{H}^\infty(B_2) = H_A^\infty(\partial D)$

である。すなわち、 $m=1$ の場合、(*) は問題 (c) に肯定的な解を与えたことになる。これは、L. Carleson の定理の確率論

的証明である。

しかし、一般の m について、このようなことはいえない。

実際、次の定理が得られる：

定理 1. $\partial D = \{z \in \mathbb{C}^m : |z| = 1\}$ とする。

$$N\mathcal{H}^\infty(B_{2m}) \subset H_A^\infty(\partial D, \sigma) \iff m = 1.$$

(証明) $m > 1 \Rightarrow N\mathcal{H}^\infty(B_{2m}) \not\subset H_A^\infty(\partial D, \sigma)$ を示せばよい。このた

め、 $N\mathcal{H}^\infty(B_{2m}) \subset H_A^\infty(\partial D, \sigma)$ ($m > 1$) として矛盾を導く。

$u(z_1, z_2) = z_1 \bar{z}_2$ とおくと、 u は、 $D := \{z \in \mathbb{C}^m : |z| < 1\}$ 上の有界調和関数である。従って、Fatou の定理より、 $\exists f \in L^\infty(\partial D, \sigma) : u = P[f]$ 。ゆえに、 $Mf \in \mathcal{M}^\infty(B_{2m}) \subset \mathcal{H}^2(B_{2m}) \oplus \overline{\mathcal{H}}_0^2(B_{2m})$ 。すなわち、 $\exists X, Y \in \mathcal{H}^2(B_{2m}) : Mf = X + \bar{Y}$ である。さらに、仮定より、 $f = NX + \overline{NY} \in H_A^2(\partial D, \sigma) + \overline{H_{A,0}^2(\partial D, \sigma)}$ ($N\mathcal{H}^\infty(B_{2m}) \subset H_A^\infty(\partial D, \sigma)$ より、 $N\mathcal{H}^2(B_{2m}) \subset H_A^2(\partial D, \sigma)$ が導かれる)。このことから、 $u = P[f] = P[NX] + \overline{P[NY]}$ は、pluriharmonic でなければならぬ。ところが、 u の定義より明らかに、 u は pluriharmonic ではない。

§2 $\mathcal{H}^p$ と H_A^p . 前 § で述べたように、Varopoulos の方法の本質的な部分の一つは、 $H^p(\partial D, \sigma)$ ($\partial D := \{z \in \mathbb{R}^n : |z| = 1\}$) の解析を $\mathcal{H}^p$ の解析に持ち込むというところである。このため、 $\mathcal{H}^p$ を H_A^p との関連から、その構造を明らかにしておく必要が

ある。定理 1 より、 $H_A^p(\partial D, \sigma)$ ($\partial D := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) と $\mathcal{H}^p(B_2)$ との構造の比較をしておくことが、まず問題になる。これについては、次のことが知られている：

	単位円周上の H_A^∞	$\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}^\infty(B_{2m})$ ($m \geq 1$)
*弱 Dirichlet 性	成立 (cf. [25])	成立 ([20])
コロナ性	成立 ([29])	成立 ([20]; [30])
解析構造	もつ (trivial)	もたない ([31])
*弱極大性	もつ ([6])	もたない ([32])
零集合の形	$f \in H_A^\infty$, $Z(f) := \{x \in \partial D : f(x) = 0\}$ $\Rightarrow \sigma(Z(f)) = 2\pi$ or 0 ([6])	$\mathcal{S}' := \{T : T(\infty) \text{ なる } \mathcal{F}_t\text{-stopping time } f, \tilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{T \in \mathcal{S}'} \mathcal{F}_T$ $\forall G \in \tilde{\mathcal{F}} \exists x \in \mathcal{H}^\infty : G = \{X_\infty = 0\} \text{ a.s.}$ ([32])
単位球の端点の形	f が H_A^∞ の単位球の端点 $\Leftrightarrow \ f\ _\infty = 1$ & $\int_{\partial D} \log f d\sigma = -\infty$ ([6])	X_∞ が $\tilde{\mathcal{F}}$ -可測とする。 X が $\mathcal{H}^\infty$ の単位球の端点 $\Leftrightarrow X_\infty = 1$ a.s. ([32])
カル＝カル環の形	$H_{\min}^\infty = L^\infty$, $H_{\max}^\infty = H_A^\infty$ ([6])	$H_{\min}^\infty = \mathcal{H}^\infty$, $H_{\max}^\infty = L^\infty$ ([32])

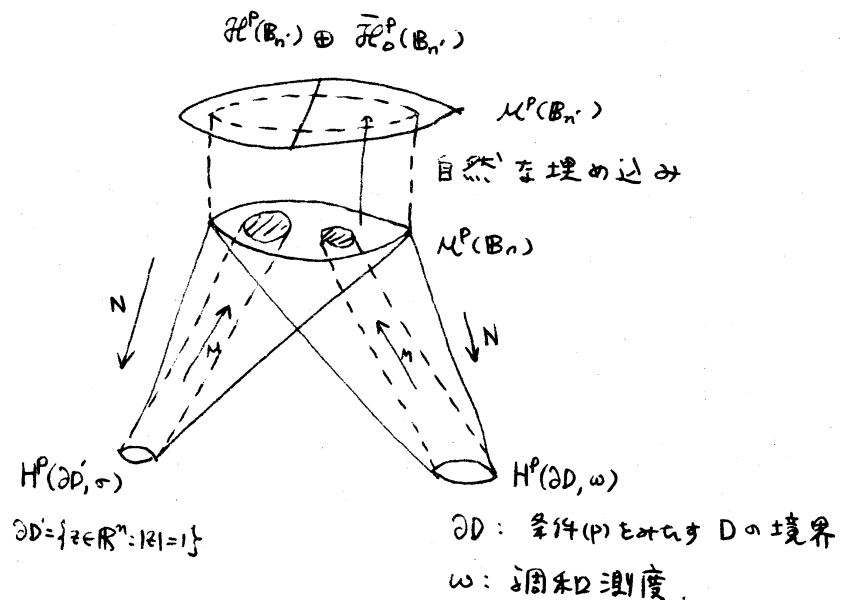
§3. Varopoulos の方法より得られる その他のメリット.

$D \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域で、 D においては *Dirichlet* 問題が解けて
いるものとする。このとき、次のような条件を考える:

$$\text{条件 (P)} \quad \begin{cases} \|Mf\|_{\mathcal{M}} \leq C, \|f\|_{H^1} \\ \|NX\|_{H^1} \leq C, \|X\|_{\mathcal{M}} \end{cases}$$

($\mathcal{M}^p = L^p(\Omega)$ ($1 < p \leq \infty$) であるから、条件としては、 $p=1$ を考
えれば十分である。)

まず、§1 で書いた図は、条件 (P) をみたすような D に対しても
書けることに注意する:



この図は、領域 D が、(そこで *Dirichlet* 問題が解ける) 条件

(P) をみたし、かつ有界であれば、§1 で述べた球の場合と同様、 $H^p(\partial D, \omega)$ の解析に、単位円周での手法を用いることができるということを示している。そこで、どのような D に対して、条件 (P) が成立するかということが重要な問題となる。これに対しては、次の結果がある：

定理 2 ([14], [15]). $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) が NTA 領域ならば、 D は条件 (P) をみたす。(NTA 領域の定義は [10] 又は [1] §2 参照)。

定理 2 から、non-smooth domain 上の解析に Varopoulos の方法が用いられることがわかる。この点に着目して、non-smooth domain 上の調和解析に関する結果を証明したもののとして、[14], [15] がある。また、以上のことの 2 径数化も可能で、それについては、[33], [34], また、martingale の考え方も利用したもののに [35] がある。(なお、これらの結果のいくつかは、その解析的証明はまだ見出されていない。)

§4. 解析射影の確率的構成. $D \subset \mathbb{C}$ と $0 \in D$ なる有界領域で、 D においては、Dirichlet 問題が解け、かつ条件 (P) をみたすものとする。 ω を D と 0 に関する調和測度とする。

さて、 $M^2(B_2)$ において

$$m: x_0 + \int_0^\infty \alpha_j(s) dz_s^j + \int_0^\infty \beta_j(s) d\bar{z}_s^j \mapsto x_0 + \int_0^\infty \alpha_j(s) dz_s^j$$

とし、

$$T = N \circ m \circ M$$

とおく。明らかに、 T は $L^2(\omega)$ から $L^2(\omega)$ への有界線形作用素であり、かつ条件 (P) より、

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C_1 \|f\|_{H^p} \quad (f \in L^2(\omega) \cap L^p(\omega)), \quad 1 \leq p < \infty$$

である。

もし、 D が単連結の場合には、 $T = P_\omega$ となることが容易に示せる ([15])。従って、

定理 3. $D \subset \mathbb{C}$ が有界単連結領域で、Dirichlet 問題が解け、かつ条件 (P) をみたすならば、 $P_\omega = T$ かつ P_ω は $H^p - L^p$ 有界である。(see also 「I」定理 1)。

注：どのようなとき、 $P_\omega = T$ になるかという問題もあるが、いかなる有限連結領域に対しても、単連結でなければ、 $P_\omega \neq T$ であり、 $\text{Range } T \not\subset H_A^2(\omega)$ である。このことは、 $L^2(\omega)$ と $M^2(B_2)$ との holomorphic Hardy space への分解の形をみればわかることである。

参考文献 (文献番号は「1」から続く)

- [19] N. Th. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO, Pacific J. Math. 90 (1980), 201-221.
- [20] N. Th. Varopoulos, The Helson-Szegö theorem and A_p -functions for Brownian motion and several variables, J. Funct. Anal. 39 (1980), 85-121.
- [21] N. Th. Varopoulos, Probabilistic approach to some problem in complex analysis, Bull. Sc. math. 2^e serie, 105 (1981), 181-224.
- [22] P. A. Meyer, Le dual de $H^1(\mathbb{R})$; demonstrations probabilistes, Lect. Notes in Math., Springer, 581 (1977), 132-195.
- [23] H. P. McKean, Stochastic Integrals, Academic Press, New York, 1969.
- [24] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Process, North Holland/ Kodansya, Tokyo, 1981.
- [25] 中路, *33 Dirichlet 環の不変部分空間について, 数学 30 (1978), 207-217.
- [26] I. I. Hirschman and R. Rochberg, Conjugate function theory in weak * Dirichlet algebras, J. Funct. Anal. 16 (1974), 359-371.
- [27] Y. Ohno, Remarks on Helson-Szegö problems, Tohoku Math. J. 18 (1966), 54-59.
- [28] J. Garnett and P. Jones, The distance in BMO to L^∞ , Ann. of Math. 108 (1978), 373-393.
- [29] L. Carleson, Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem, Ann of Math. 76 (1962), 547-549.
- [30] H. Arai, Measures of Carleson type on filtrated probability spaces and the corona theorem on complex Brownian spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 643-647.
- [31] K. Carne, The algebra of bounded holomorphic martingales, J. Funct. Anal. 45 (1982), 95-108.

- [32] H. Arai, On the algebra of bounded holomorphic martingales, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 616-620.
- [33] H. Arai, On an inequality of Varopoulos for 2-parameter Brownian martingales, Tokyo J. Math. 9 (1986), 373-382.
- [34] H. Arai, Carleson measures on product domains and 2-parameter Brownian martingales, Arch. Math. 46 (1986), 343-352.
- [35] H. Arai, A note on functions of vanishing mean oscillation on the bidisk Bull. London Math. Soc. 18 (1986), 595-598.
- [36] R. K. Gettoor and M. J. Sharpe, Conformal martingales, Invent Math. 16 (1972), 271-308.