

2次元自由熱対流乱流における相対拡散の自己相似性

小笠原 健 (Takeshi OGASAWARA) 藤 定義 (Sadayoshi TOH)
京大院理・物理

1 はじめに

乱流中を受動的に流される粒子対の相対距離の時間発展は、乱流の自己相似的な速度ゆらぎの影響を受け、ブラウン運動とは異なる異常拡散を示す。この異常拡散は Richardson 則として古くから知られているものであり [1]、3 次元 Navier-Stokes 乱流の慣性領域において、相対距離 r の 2 乗の平均は次のように時間の 3 乗で増大する:

$$\langle r^2 \rangle = g_2 \epsilon t^3. \quad (1)$$

ここで、 ϵ はエネルギー散逸率であり、 g_2 は普遍定数と考えられている。この Richardson 則は、Kolmogorov のスケーリング則に対応する次元解析によって得られるものであり、最近の実験や数値計算によって成立が支持されている [2, 3, 4]。

また、この異常拡散のモデルとして、Richardson は拡散係数が距離に依存する拡張された拡散方程式を導入した [1]。これは Richardson の拡散方程式と呼ばれるものであり、最近の実験や数値計算結果をうまく説明するとの報告もある [2, 5, 3]。しかし、本来、Richardson の拡散方程式は無限の慣性領域に対して成立するものであるため、これらの実験結果や数値計算結果からすぐに Richardson の拡散方程式が正しいと結論することはできない。

一方、最近、乱流中の相対拡散において粒子対の弾道的な運動が重要であることが Boffetta & Sokolov によって指摘されている [3]。また、流れ場の双曲型淀み点分布の構造と、Richardson 則の指数との間に関係があることが Dávila & Vassilicos によって見出されている [6]。これらの結果から、流れ場に存在するコヒーレンスが乱流相対拡散の物理的機構にとって重要であると考えられる。

本研究では、3 次元 Navier-Stokes 乱流と類似の性質を持つと考えられている 2 次元自由熱対流 (2D-FC) 乱流を用いて相対拡散を調べた [7, 8]。空間スケールを固定することのできる統計手法である exit-time 統計を用いることによって、有限の慣性領域しか持たない場から慣性領域だけの情報を取りだし、Richardson 則の成立を確かめた。また、exit-time の確率密度関数を調べることによって、粒子対の運動は流れ場のコヒーレンスの影響を受けている部分と、Richardson の拡散方程式によって記述される部分に分けることができる結果を得たので報告する。

2 2次元自由熱対流 (2D-FC) 乱流

2D-FC 乱流の基礎方程式は次の2次元ブシネスク方程式系である:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha g T \mathbf{e}_y, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\Delta T. \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ はそれぞれ速度場、温度場、圧力場を表す。 ν, κ はそれぞれ動粘性係数、熱拡散係数である。 $\mathbf{e}_y$ を y 軸方向の単位ベクトル、 g を重力加速度とする。高レイリー数での熱対流乱流はハード乱流と呼ばれるが、この FC2D 系はハード乱流の中央領域のモデルの2次元版であり、平均温度勾配はない。従って乱流の維持のために温度場への外力の注入が必要となる。速度場は温度場から浮力項を通して励起される。また、この系はバロクリニックなので渦度は保存されない。

FC2D 系では二乗温度揺らぎ

$$S = \frac{1}{2} \int T^2 d\mathbf{x} \quad (4)$$

が保存量であり¹、この量を便宜的にエントロピーと呼ぶことにする。エントロピーの低波数側から高波数側へのカスケードを仮定すると、エントロピー散逸率 ϵ_θ と浮力項の係数 αg を用いて次元解析することにより、慣性領域におけるエネルギースペクトル $E(k)$ とエントロピースペクトル $S(k)$ は以下のように決まる [9, 7]:

$$E(k) = C_E \epsilon_\theta^{2/5} (\alpha g)^{4/5} k^{-11/5}, \quad (5)$$

$$S(k) = C_S \epsilon_\theta^{4/5} (\alpha g)^{-2/5} k^{-7/5}. \quad (6)$$

ここで C_E, C_S は普遍定数と考えられる。

エントロピー散逸率は次式で定義される:

$$\epsilon_\theta = \langle \epsilon_\theta(\mathbf{x}, t) \rangle = \kappa \langle \nabla T \cdot \nabla T \rangle. \quad (7)$$

これらは3次元 Navier-Stokes 乱流における Kolmogorov のカスケード理論 (K41) に対応するものであり、Bolgiano-Obukhov スケーリングと呼ばれる。

2.1 微細秩序構造

T 渦度 χ を次のように導入する:

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (8)$$

¹正確には T の任意関数は保存する。



図 1: $|\chi|$ の分布。システムサイズの $1/4$ の領域 (512^2) で可視化。色が白いほど値が大きいことを表す。

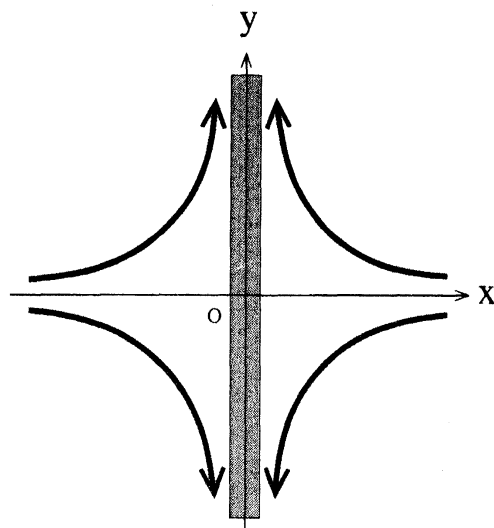


図 2: バーガース T 渦層を作る流れ場。 y 方向に T 渦度集中領域が形成される。

この T 渦度の発展方程式は、

$$\frac{D\chi}{Dt} = (\chi \cdot \nabla) \mathbf{u} + \kappa \Delta \chi \quad (9)$$

である。これは T 渦度伸長項を持ち、3次元 Navier-Stokes (3D-NS) 乱流における渦度の発展方程式と同じ形であるため、 T 渦度のダイナミクスは 3D-NS 乱流の渦度のものと類似していると予想される。

また、 T 渦度とエントロピー散逸率の間には

$$\epsilon_\theta(\mathbf{x}, t) = \kappa |\chi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (10)$$

という関係があり、これらは直接結びついている。

シミュレーションで得られた T 渦度の様子を図 1 に示す。線状の T 渦度集中領域があちこちに見られるが、これらの領域の幅は η_θ の 10 倍程度、長さは積分長くらいである。この線状の T 渦度集中領域のことを以後微細秩序構造と呼ぶ。微細秩序構造は局所的にバーガース T 渦層で近似できることがわかっており、これらは 3D-NS 乱流に存在する渦度の微細秩序構造 (ワーム) と類似の性質をもつと考えられる [8]。

2.2 Richardson 則

乱流場に受動的に流される粒子を考える。3D-NS 乱流の場合、粒子間相対距離 r の時間依存性は K41 に対応する次元解析により、

$$\langle r^p \rangle = g_p \epsilon^{p/2} t^{3p/2} \quad (11)$$

と予想される。これは Richardson 則として古くから知られているものである [1]。2D-FC 乱流の場合、Bolgiano-Obukhov スケーリングに対応する Richardson 則は、

$$\langle r^p \rangle = g'_p \epsilon_\theta^{q/2} (\alpha g)^p r^{5p/2}. \quad (12)$$

となる。Richardson はこの相対拡散を説明するため、距離に依存する拡散係数を持つ拡張された拡散方程式を導入した。3D-NS 乱流の場合、拡散係数は相対距離の 4/3 乗に比例し、拡散方程式は次のような形になる:

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 K(r, t) \frac{\partial}{\partial r} p(r, t), \quad (13)$$

$$K(r, t) = k_0 \epsilon^{1/3} r^{4/3}. \quad (14)$$

2DFC 系の場合、Bolgiano-Obukhov スケーリングによって拡散係数は相対距離の 8/5 乗に比例すると予想され、拡散方程式は、

$$\frac{\partial p(r, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K'(r, t) \frac{\partial}{\partial r} p(r, t), \quad (15)$$

$$K'(r, t) = k'_0 \epsilon_\theta (\alpha g)^2 r^{8/5}. \quad (16)$$

となる。このとき、式 15 は初期条件 $p(r, 0) = \delta(r)$ に対して次のような解を持つ:

$$p(r, t) = \frac{C}{\epsilon_\theta (\alpha g)^2 (k'_0 t)^5} \exp \left(-\frac{25}{4} \frac{r^{2/5}}{\epsilon_\theta (\alpha g)^2 k'_0 t} \right). \quad (17)$$

3 数値計算

乱流場は式 2, 3 の直接数値計算 (DNS) によって得た。空間方向は擬スペクトル法、時間方向は 4 次精度ルンゲ・クッタ法を用い、 x, y 方向とも周期境界条件で計算した。ここでは一般性を失うことなく $\alpha g = 1$ とおける。また、簡単のため $\text{Pr} = 1$ とした。パラメータの詳細は表 1 にまとめて示す。温度場への外力は $f(\mathbf{k}) = 0.05$, $(k_x, k_y) = (2, 2), (2, -3), (-2, 2), (-2, -3)$ として、

速度場では低波数でのみ有効なドラッグ $d(\mathbf{k}) = -0.1\omega(\mathbf{k})/|\mathbf{k}|^2$, $(|\mathbf{k}| \leq 3)$ を加えた。シミュレーションで得られた場の $E(k)$ と $S(k)$ を図 3 に示す。範囲は狭いが、Bolgiano-Obukhov スケーリングを満たす慣性領域が存在している。

粒子追跡についても時間方向は 4 次精度ルンゲ・クッタ法を用い、空間方向の補間は 3 次 Lagrange 多項式を用いた。相対距離 Δx の粒子対を等方的かつランダムに配置した初期条件を用いた。以下のシミュレーション結果は約 10^6 個の粒子対の追跡結果を平均したものである。

N	モード数 (解像度)	1024 ²
ν	動粘性係数	1.0×10^{-4}
κ	熱拡散係数	1.0×10^{-4}
Δx	mesh 幅	$2\pi/1024$
Δt	時間刻み幅	1.0×10^{-3}
η_θ	温度 Kolmogorov 長	$0.96\Delta x$

表 1: DNS のパラメータ

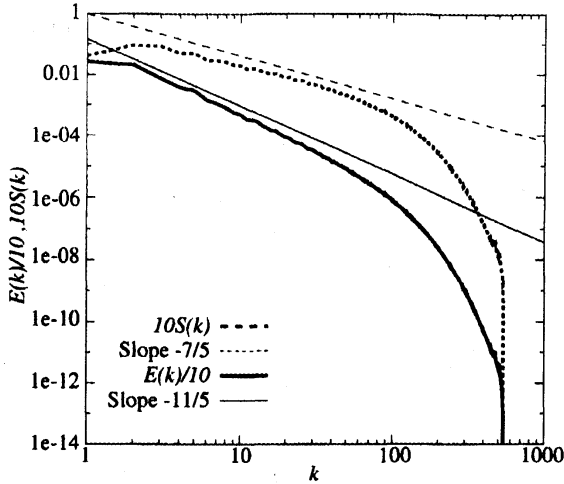


図 3: DNS で得られたスペクトル。狭いながらも Bolgiano-Obukhov スケーリングが成立している領域がある。

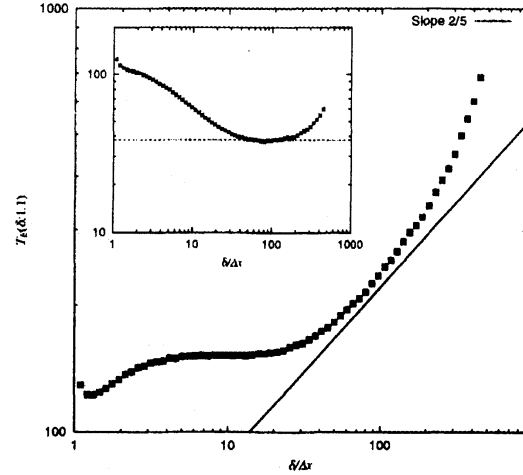


図 4: exit-time のスケール依存性。挿入図は Bolgiano-Obukhov スケーリングでスケールしなおしたもの。慣性領域での Richardson 則の成立が確認できる。

4 exit-time 統計

DNS の結果を用いて相対距離の統計を調べる。相対距離の統計には、ある時刻での相対距離の分布を調べる fixed-time 統計と、空間スケールを固定してそのスケールにおける相対運動の所要時間を調べる fixed-scale 統計がある。本研究では fixed-scale 統計の一つである exit-time 統計を用いる [3]。exit-time $T_E(\delta; \rho)$ は、相対距離がある閾値 δ に初めて到達してから、その閾値の ρ 倍 ($\rho\delta$) に初めて到達するまでの所要時間として定義される。このように exit-time 統計は δ と ρ の二つのパラメータを持っており、それぞれ取り出す空間スケール (δ) と、そのスケールにおける運動の平均化の程度 (ρ) という意味を持っている。このため、exit-time 統計を用いることにより、有限の慣性領域しか持たない場でも慣性領域の情報だけを取り出すことができる。

4.1 Richardson 則

Exit-time 統計で Richardson 則を書きなおすと、2D-FC 乱流の場合次のようになる:

$$T_E(\rho; \delta) = \frac{\rho^{2/5} - 1}{k_0'^{1/5} (\alpha g)^{2/5} \epsilon_\theta^{1/5}} \delta^{2/5}. \quad (18)$$

実際のシミュレーションでの exit-time の計算は、 $\delta_n = \rho^n \delta_0$ という閾値を設けて行う。本研究では、 $\delta_0 = \Delta x$ とした。 $\rho = 1.1$ での平均 exit-time のスケール依存性を図 4 に示す。慣性領域において Bolgiano-Obukhov スケーリングに対応する Richardson 則が成立していることが確認できる。また、エントロピー散逸領域では exit-time が δ に依存して

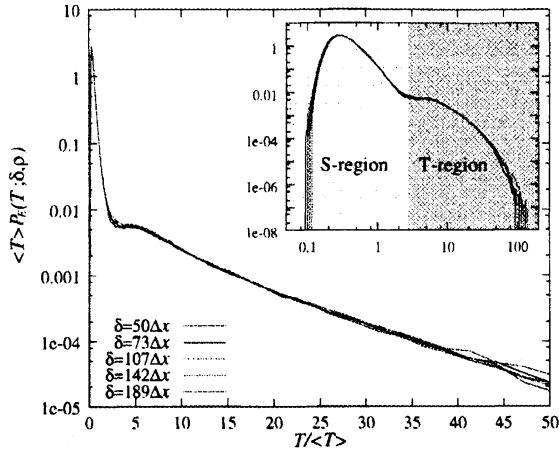


図 5: 平均 exit-time で規格化した exit-time PDF。挿入図は log-log プロット。

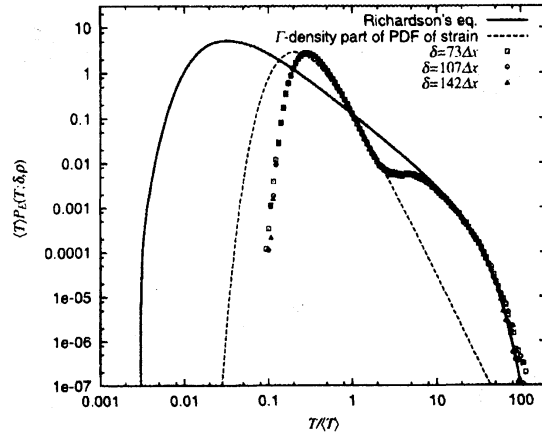


図 6: 平均 exit-time で規格化した exit-time PDF。点は DNS で得られたデータ、実線は Richardson の拡散方程式の数値解、点線はストレイン PDF から計算した PDF を表す。

おらず、このことからエントロピー散逸領域では粒子対は指数関数的に離れていることがわかる。

慣性領域において exit-time の PDF を平均 exit-time を用いて規格化したものを図 5 に示す。慣性領域内の 5 つの異なるスケールでの PDF は良く重なっており、このことは慣性領域において速く拡散する粒子対も遅く拡散する粒子対も自己相似的に運動していることを意味している。

4.2 ダイナミクスの分類

図 5 を見ると明らかなように、exit-time PDF は速く拡散する粒子対で構成された鋭いピークと、遅く拡散する粒子対で構成された指数関数的なテイルとの二つに分かれている。以後この二つの領域を、それぞれ領域 S、領域 T と呼ぶ。

領域 S, T に属する粒子対の分布を、ある時刻にある相対距離を持つ粒子対だけを抜きだして、 T 渦度の絶対値の場合と重ねたものが図 7, 8 である。図 7, 8 において、白線は対をなす粒子を結んだものである (白線の両端に粒子がある)。これらの図を見ると、領域 S にある粒子対は微細秩序構造の方向に沿った分布をしており、領域 T にある粒子対は相対距離程度のスケールをもつ渦にトラップされたような分布をしている様子が見てとれる。

また、exit-time PDF の領域 S の形は、ストレイン分布とある程度対応がつく。粒子間相対距離は指数関数的に増大すると仮定すると、伸長率 A と exit-time T の間には、

$$T(\delta; \rho) = \frac{\log \rho}{A} \quad (19)$$



図 7: 粒子対の分布 (領域 S)



図 8: 粒子対の分布 (領域 T)

という関係が成り立つ。エントロピー散逸領域では、図 4 からわかるように粒子対は指数関数的に離れているので、ストレイン場によって粒子対が引き伸ばされていると考えるのは妥当である。慣性領域ではそれほど単純ではないと考えられるが、慣性領域でも式 19 が成立すると仮定して、ストレインの PDF から変換した exit-time の PDF とシミュレーションで得られた exit-time PDF を重ねて書いたものが図 6 である。ストレイン PDF は、テイルを除いて Γ 密度型の分布で良く近似することができるため、図 6 ではストレイン PDF を Γ 密度型分布でフィッティングしたものを式 19 で変換している。この図を見ると、平均 exit-time で規格化すると、領域 S の形とストレイン PDF から計算した exit-time PDF の形はある程度対応がつくことがわかる。

図 9 は、慣性領域内のあるスケールの相対距離を持つ粒子対について、二つの粒子の間を結ぶ直線上にある T 渦度の方角を調べ、粒子対を結ぶ直線と T 渦度の成す角の PDF を示したものである。この図を見ると、領域 S と領域 T では PDF の形は明らかに異なっている。領域 S では T 渦度の方角に沿って粒子対が配置する傾向が強いのにに対して、領域 T ではほぼ一様分布になっていることから T 渦度の方角と粒子対の配置との間に関係がないことがわかり、図 7, 8 で見られた傾向を確認することができる。

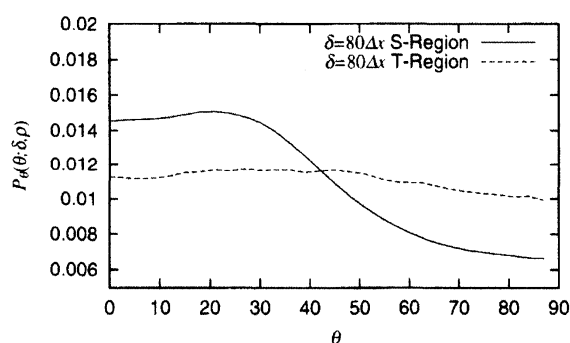


図 9: 粒子間を結ぶ直線上にある T 渦度の方角と粒子対の方角のなす角の PDF。実線と破線はそれぞれ領域 S, T を表す。

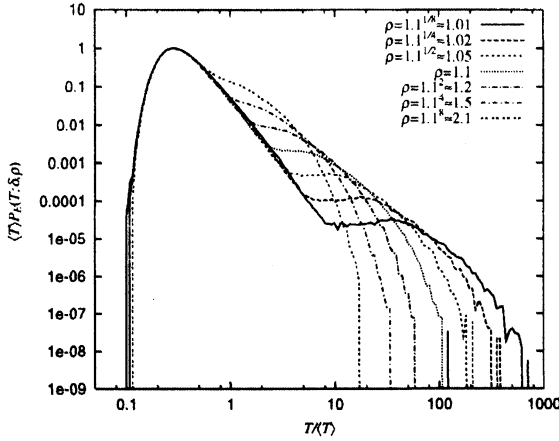


図 10: 平均で規格化された exit-time PDF の ρ 依存性。最大値は 1 に規格化されている。

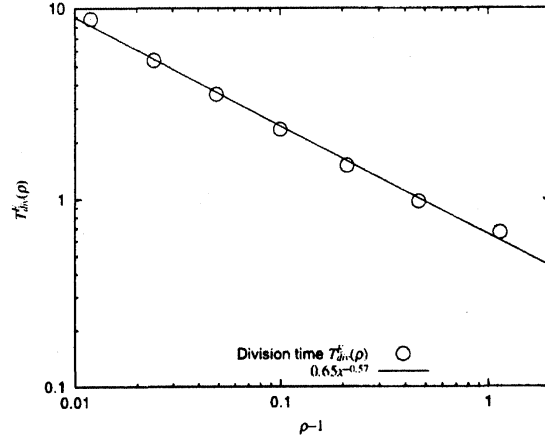


図 11: 領域 S と領域 T の境目を与える exit-time の ρ 依存性。

以上のことから、領域 S では粒子対は微細秩序構造に沿って引き伸ばされるような運動（弾道的な運動）をしていることが強く示唆される。

図 6 には Richardson の拡散方程式（式 15）を数値的に積分することによって得た exit-time PDF も書かれており、その PDF はシミュレーションから得られた exit-time PDF と領域 T において重なっている。このことから、領域 T に属する粒子対の運動は Richardson の拡散方程式で記述できると考えられる。

このように exit-time PDF を調べることにより、粒子対の運動は構造に沿った弾道的な運動（領域 S）と拡散方程式に従う運動（領域 T）の二つに分けることができるが、この二つの運動の割合は ρ を変えることによって変化する。 ρ を変えたときの exit-time PDF の変化の様子を図 10 に示す。形の変化に着目するため、図 10 では最大値を 1 に規格化している。図 10 を見ると明らかなように、領域 S の形は ρ に依存しない。PDF の最大値を与える平均で規格化された exit-time $T_{\max}^E$ は ρ に依存せず一定であり、

$$T_{\max}^E \approx 0.29 \quad (20)$$

である。一方領域 T の割合は ρ が大きくなるにつれて増大している。領域 S と T の境目を与える平均で規格化された exit-time $T_{\text{div}}^E(\rho)$ を、両対数で計算した PDF の二階微分

$$\frac{\partial^2 \log\{\langle T \rangle P_E(T/\langle T \rangle; \delta, \rho)\}}{\partial \{\log(T/\langle T \rangle)\}^2} \quad (21)$$

が最大になる点として定義すると、 $T_{\text{div}}^E(\rho)$ の ρ 依存性は図 11 のようになる。我々のシミュレーションで計算できた範囲の ρ では、 $T_{\text{div}}^E(\rho)$ の依存性は次式で近似できる：

$$T_{\text{div}}^E(\rho) \approx 0.65(\rho - 1)^{-0.57}. \quad (22)$$

従って、 ρ が十分大きくなると exit-time PDF の領域 S はなくなり、全体が領域 T に含まれ、Richardson の拡散方程式で記述できるようになると予想される。このことは ρ が大きくなると構造の影響が小さくなることを意味している。

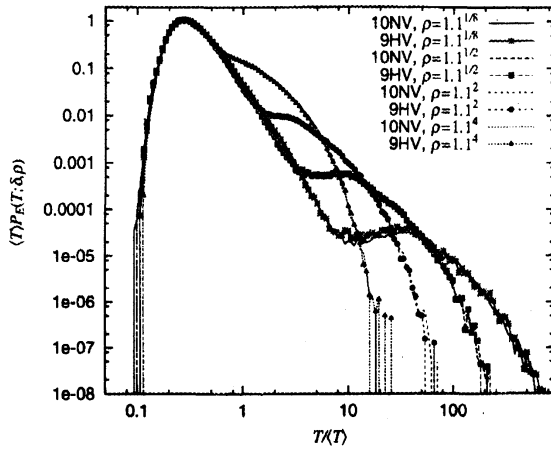


図 12: 平均で規格化された exit-time PDF (最大値を 1 に規格化)。解像度 1024^2 で Newton 粘性 (10NV) を用いた場から得られた PDF と、解像度 512^2 で 8 次超粘性 (9HV) を用いた場から得られた PDF は、同じ ρ を持つもの同士重なっている。

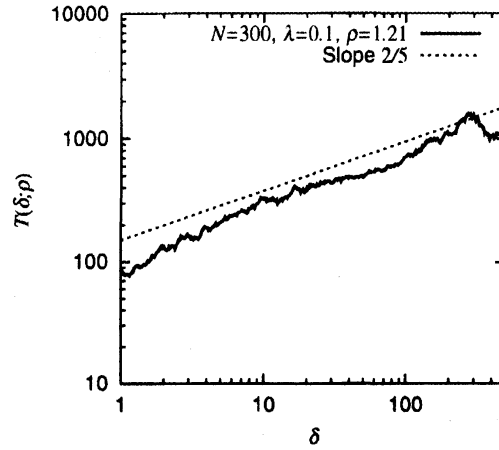


図 13: Kinematic-Simulation で得られた平均 exit-time のスケール依存性

以上のような exit-time PDF の性質が慣性領域の性質だけによるものなのかどうかを調べるため、粘性の性質を超粘性を用いて変化させた場でも exit-time PDF を調べた。図 12 はその結果を示したものである。図 12 では Newton 粘性の結果も超粘性の結果も同じ ρ 同士では重なっており、exit-time PDF の形は粘性領域の性質には依らず、慣性領域だけで決まっていることを示唆している。

4.3 Kinematic-Simulation との比較

同じスケールリング則に従う異なる性質を持つ場で exit-time PDF がどう変化するかを調べるため、Kinematic-Simulation を用いて人工的に作った流れ場で exit-time PDF を調べた [10, 11, 6]。流れ場は、次のように N_k 個の三角関数の足しあわせで作られる:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{N_k} [A_n \cos(k_n \cdot x + \omega_n t) + B_n \sin(k_n \cdot x + \omega_n t)]. \quad (23)$$

ここで、場の最小スケールと最大スケールをそれぞれ η, L として、波数 k_n は、

$$k_n = k_1 n^\alpha, \quad \alpha = \frac{\ln(L/\eta)}{\ln N_k} \quad (24)$$

のように分布させる。振幅は、

$$E(k) = E_0 L(kL)^{-p}, \quad A_n^2 = B_n^2 = E(k_n) \Delta k_n \quad (25)$$

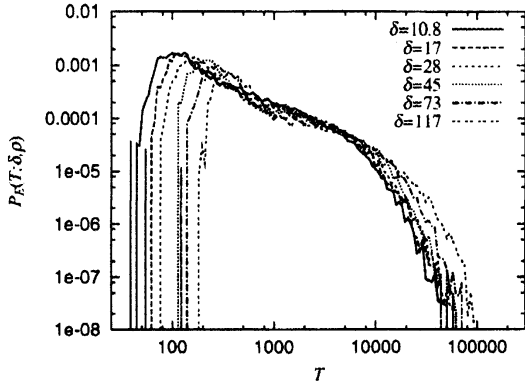


図 14: Kinematic-Simulation で得られた exit-time PDF

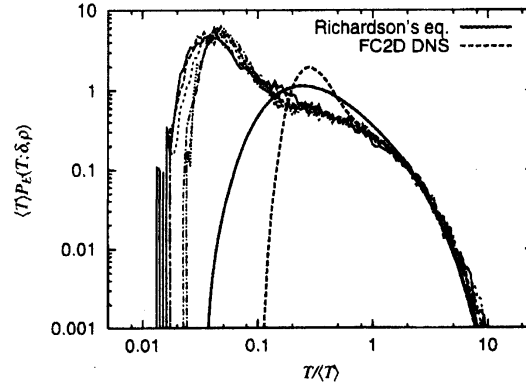


図 15: 平均で規格化された Kinematic-Simulation で得られた exit-time PDF

として決める。 p , E_0 はパラメータである。また、各波数の位相はランダムに決め、時間スケールは各スケールでローカルに決まると仮定し、eddy turnover time で与える:

$$\omega_n = \lambda \sqrt{k_n^3 E(k_n)}. \quad (26)$$

ここで λ は流れ場の運動の激しさを決めるパラメータである。本研究では、Bolgiano-Obukhov スケーリングに対応した場を作るため、 $p = 11/5$ とし、次のパラメータを用いた: $L = 1000$, $\eta = 1$, $N_k = 300$, $\lambda = 0.1$.

図 13 に Kinematic-Simulation で得られた平均 exit-time のスケール依存性を示す。ある程度 Bolgiano-Obukhov スケーリングが成立している領域が見られるので、その領域内での exit-time PDF を調べたものが図 14, 15 である。FC2D の DNS で得られた exit-time PDF と同様に、exit-time PDF は速く動く粒子対からなる鋭いピーク (領域 S) と、長いテイル (領域 T) の二つに分かれている。平均 exit-time で規格化すると領域 T は一つに重なり、Richardson の拡散方程式の数値解と一致している様子が見られる。これは FC2D の DNS で得られた結果と同じであるが、一方、領域 S の方は平均 exit-time で規格化しても一つの曲線に重なっておらず、領域 S に属する粒子対の運動は自己相似的ではないと考えられる。

これらの結果は、領域 S は場のコヒーレンス (秩序構造) の影響によって形成されることを考慮すると、場の自己相似的なコヒーレンスの形成には波数間の相関が重要であることを示唆していると考えられる。

5 まとめ

本報告では、2次元自由熱対流 (2D-FC) 乱流上での相対粒子拡散において、Bolgiano-Obukhov スケーリングに対応する Richardson 則が成立していることを exit-time 統計を用いて示した。更に、exit-time の確率密度関数 (PDF) を調べることで、乱流場にあ

る微細秩序構造に沿った弾道的な運動をしている粒子対 (領域 S) と、Richardson の拡散方程式に従うランダムな運動をしている粒子対 (領域 T) に分けることができることを示した。また、exit-time のパラメータである閾値間の倍率 ρ を十分に大きくとると、弾道的な運動をしている粒子対はほとんどなくなり、exit-time PDF の全体が Richardson の拡散方程式によって記述されることを示唆する結果も得られた。

Kinematic-Simulation で作った場でも相対粒子拡散を調べた。Kinematic-Simulation のように波数間の相関が全くない場では領域 S が自己相似的にならないことから、場の自己相似的なコヒーレンスの形成には波数間の相関が重要であると予想される。

参考文献

- [1] L.F.Richardson (1926), Atmospheric Diffusion shown on a Distance-Neighbour Graph. *Proc. Roy. Soc.* A110: 709–737.
- [2] M.C.Jullien, J.Paret, and P.Tabeling (1999), Richardson Pair Dispersion in Two-Dimensional Turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 82: 2872–2875.
- [3] G.Boffetta and I.M.Sokolov (2002), Statistics of two-particle dispersion in two-dimensional turbulence, *Phys. Fluids*, 14: 3224–3232.
- [4] G.Boffetta and I.M.Sokolov (2002), Relative Dispersion in Fully Developed Turbulence: The Richardson’s Law and Intermittency Corrections. *Phys. Rev. Lett.*, 88: 094501.
- [5] S.Ott and J.Mann (2000), An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 422: 207–223.
- [6] J.Dávila and J.C.Vassilicos (2003), Richardson’s pair diffusion and the stagnation point structure of turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 91: 144501.
- [7] S.Toh and E.Suzuki (1994), Entropy Cascade and Energy Inverse Transfer in Two-Dimensional Convective Turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, 73: 1501–1505.
- [8] S.Toh and T.Matsumoto (2003), A class of steady solutions to two-dimensional free convection, *Phys. Fluids*, 15: 3385–3396.
- [9] A.Monin and A.Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*(MIT Press, Cambridge, Mass., 1975), Vol.2.
- [10] J.C.H.Fung and J.C.Vassilicos (1998), Two-particle dispersion in turbulentlike flows. *Phys. Rev. E*, 57: 1677–1689.

- [11] F.Nicolleau and J.C.Vassilicos (2003), Turbulent Pair Diffusion. *Phys. Rev. Lett.*, 90: 024503.