

絶対不分裂完備離散付値体の新しいアーベル拡大論

東大理 栗原 将人

§0. 序

完備離散付値体の理論(分岐理論, 局所類体論など)については, Serre Corps locaux (以下 [CL]) に格調高くまとめられている。ただしここでは主に剰余体が完全体という仮定の下に議論が進められており, この仮定をはずして議論を進めようとするとき, たまたま困難が生じ出す。ここに述べるのは, このような剰余体非完全なとき, 完備離散付値体の理論を作ろうとする一つの試みから生まれたもので, 絶対不分裂な完備離散付値体(素数 p が付値環の極大 ideal の生成元)のアーベル拡大の様子は非常に simple でわかりやすく表される, ということを示すのが目標である。

K を離散付値で完備な体 (local field), $\mathbb{O}_K$ を整数環, k を剰余体とする。 K のアーベル拡大については, 剰余体 k が有限体のときに知られている局所類体論を拡張することにより, その様子を知らう という試みが多くなされてきた。

すなわち K が quasi-finite α と β (Waples), 代数閉体 α と β (Serre), 完全体 α と β (Hazewinkel), 高次元局所体 α と β (Kato) に局所類体論は拡張された。ここに述べようとする α は、 α のような局所類体論の拡張ではなく、 K の絶対 Galois 群の指標群 Γ_K の条件の下、わかりやすく表そうとするものである。

(*) 奇素数 p が $\mathbb{Q}_K$ の素元, すなわち $\mathbb{Q}_K/(p) = \mathbb{F}$.

(特に剰余体には何の条件もつけないことに注意せよ)

たとえば arithmetic scheme $X/\text{Spec } \mathbb{Z}$ が (p) のところを smooth α と β (p) で局所化, 完備化して得られる離散値環 $\mathbb{Z}_p$ を考えていると思えばよい。

α の条件の下, K の絶対 Galois 群の指標群

$$H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

を考える。 α の群の l -part ($l \neq p$) はよくわかり、 α である (tamely ramified), 問題は p -part

$$H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \varinjlim H^1(K, \mathbb{Z}/p^n)$$

である。

Theorem (0.1) K の degree p^n の指標群 α は長さ n の Witt vectors の群 W_n に基本写像

$$\Phi_n: H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Z}/p^n) \rightarrow W_n$$

が構成できて (正確には α 2 見よ), この写像は全射, α は不分岐指標全体の作る群となる。すなわち

(0.1.1) $0 \rightarrow H^1(\mathbb{A}, \mathbb{Z}/p^n) \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) \xrightarrow{\Phi_n} W_n \mathbb{A} \rightarrow 0$
 が exact.

($\mathbb{A}$ が完全体 α と β の直積, $\mathbb{Z}$, $W_n \mathbb{A}$ は一般には $\mathbb{Q}_K/p^n$ と同型ではないことに注意せよ。)

Remark (0.2) (*) α 条件 α 下では K の分岐理論は難しくなく, 巡回拡大の剰余拡大は常に分離的である。従って (0.1.1) で, $W_n \mathbb{A}$ は K の完全分岐巡回拡大と対応していることがわかる。剰余体 $\mathbb{A}$ の巡回拡大を K の拡大に持ち上げて, 具体的に書くということは さまざまな人々により, 行われていたが, 我々の話はこのとき, $\mathbb{Z}$, 完全分岐拡大 の様子を完全に記述しようとする話があることに注意しておく。

Remark (0.3) $\mathbb{A}$ が分離閉体 α と β , (0.1.1) は 同型

$H^1(K, \mathbb{Z}/p^n) \cong W_n \mathbb{A}$ と存する。これは我々に Artin-Schreier-Witt theory を思い起こさせる (cf. 1.2.). 従って, $W_n \mathbb{A}$ の各元に対し 完全分岐巡回拡大を与える方程式を explicit に書けるのか という疑問がある。

$n=1$ に対しては, これは難しくない。 $a \in \mathbb{A}$ に対応する拡大の方程式は

$$T^p - T = \frac{\tilde{a}}{p} \quad (\tilde{a} \text{ は } a \text{ の } \mathbb{Q}_K \text{ への持ち上げ})$$

である。しかし、 $n \geq 2$ に対しては今のところ何もわかっていない。 $(1, 0) \in W_2 R$ に対応する p^2 次巡回拡大は

$$\begin{cases} T_1^p - T_1 = \frac{1}{p} \\ T_2^p - T_2 = \frac{T_1}{p} \end{cases}$$

の根をすべてつけ加えて得られるものだと思われる程度である。

よく人に聞かれるので、つけ加えておくが、この定理の証明には加藤先生の高次元局所類体論は用いない。ただし duality の考え方が重要な役割を果たしていることは、§2 に見る通りである。

以下 §1 で Galois cohomology の基本を述べた後、§2 で主結果を §3 で応用、§4 でこの理論の背景にある p -adic étale cohomology の理論について簡単に述べる。

§1. Galois cohomology に関する準備.

F を体, $G_F = \text{Gal}(\bar{F}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする。 G_F が連続に作用する discrete abel 群の category の中で、 G_F -不変部分 M^{G_F} の右導来関手は $H^i(F, M)$ と書く。我々がこゝで興味を持つのは、特に $M = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r)$ ((r) は Tate-twist, F の標数が $p > 0$ のときは p -part $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$ について 1.3. を見よ) である。

1.1. Kummer theory, canonical pairing k_g

$n \in F$ a 標数と素数整数, $\mu_n \in 1$ の n 乗根全体 n を G_F -module とする $Kummer$ sequence

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow G_m \xrightarrow{n} G_m \rightarrow 0$$

と Hilbert 90 から 2 つの同型が得られる。

$$(1.1.1) \quad k_1: F^\times / (F^\times)^n \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mu_n)$$

$\mathbb{Z}/n(1) \in Tate$ twist $\mu_n^{\otimes g}$ とする $(1.1.1)$ の cohomology の cup 積から canonical pairing

$$(1.1.2) \quad k_g: (F^\times)^{\otimes g} \rightarrow H^g(F, \mathbb{Z}/n(1))$$

が定義される。一般に k_g は同型 $K_g^M(F)/n \xrightarrow{\sim} H^g(F, \mathbb{Z}/n(1))$ を induce すると予想される。($K_g^M(F)$ は g -th Milnor K 群 $[F^\times]^{\otimes g}$ の商) 特には $g=2$, または $g=3, p=2$ のとき、 n は予想は正しい (Mercurjev-Suslin の定理)。また F が完全離散付値体のとき常に正しい [K-1, B-K]。

1.2. Artin-Schreier-Witt theory [CL] p.163

F a 標数 $p > 0$ とする。 $W_n F$ は長さ n の Witt vectors の環 ([CL] II) とする。 F $\in W_n F$ の Frobenius

$(a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto (a_0^p, \dots, a_{n-1}^p)$ とする n 完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n \rightarrow W_n F_{\text{sep}} \xrightarrow{F-1} W_n F_{\text{sep}} \rightarrow 0$$

の cohomology H^i とする

$$(1.2.1) \quad W_n F / (F-1) W_n F \xrightarrow{\sim} H^1(F, \mathbb{Z}/p^n)$$

が得られる。

1.3. 標数 p の p 進 étale cohomology

X は標数 $p > 0$ の体上の scheme とする。構造層 $\mathcal{O}$ に対し、Witt vectors のなす sheaf $W_n \mathcal{O}$ が定義できるが如く、 X の De Rham complex $\Omega^\bullet$ に対し、理想的性質を持つ complex (De Rham-Witt complex とよばれる) $W_n \Omega^\bullet$ が定義される。 $W_n \Omega^r$ は n 重 étale local に logarithmic differential form $d \log a_1 \cdots d \log a_r$ で生成される subsheaf $\in W_n \Omega_{\log}^r$ と書く。Illusie に従って、 $\mathbb{Z}/p^n(r) \in D(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n)$ を

$$\mathbb{Z}/p^n(r) := W_n \Omega_{\log}^r[-r]$$

で定義する。特に $X = \text{Spec } F$ のとき (char $F = p > 0$)、完全系列

$$0 \rightarrow W_n \Omega_{\log}^r \rightarrow W_n \Omega^r \xrightarrow{F-1} W_n \Omega^r / d W_n \Omega^{r-1} \rightarrow 0$$

の cohomology $\in \mathbb{Z}/p^n$ (1.2.1) の一般化

$$(1.3.1) \quad W_n \Omega_F^r / (d W_n \Omega_F^{r-1} + (F-1) W_n \Omega_F^r) \cong H^{r+1}(F, \mathbb{Z}/p^n(r))$$

を得る。こゝに $H^0(F, \mathbb{Z}/p^n(r))$ は $H^0((\text{Spec } F)_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n(r))$ の

略、 $r=0$ のとき (1.3.1) は (1.2.1) に他ならない。

すなわち (1.1.1) に対応して

$$(1.3.2) \quad h_1: F^\times \rightarrow H^1(F, \mathbb{Z}/p^n(1)) = H_{\text{ét}}^0(\text{Spec } F, W_n \Omega_{\log}^1)$$

$$a \mapsto d \log a$$

が存在し, De Rham-Witt complex の積構造により

$$(1.3.3) \quad h_g: (F^\times)^{\otimes g} \rightarrow H^g(F, \mathbb{Z}/p^n(g))$$

が得られる。今度の場合, (1.3.3) は同型

$K_g^M(F)/p^n \xrightarrow{\sim} H^g(F, \mathbb{Z}/p^n(g))$ を induce することを知っている [B-K]。

以下では F の標数にかかわらず記号 $H^g(F, \mathbb{Z}/n(g))$ を使う。 $\text{ch } F = p > 0$ のときの p -part の意味は上の通りである。

1.4. 完備離散付値体の cohomology

K を完備離散付値体, k を剰余体, $\text{ch } k = p > 0$ とする。

$$z_n^g: H^g(k, \mathbb{Z}/n(g-1)) \rightarrow H^g(K, \mathbb{Z}/n(g-1))$$

を自然な写像 (p -part については cf [K1]) とし, $\mathcal{O}_K$ の素元 π を fix することにより準同型

$$(1.4.1) \quad \lambda_{n,\pi}^g: H^{g-1}(k, \mathbb{Z}/n(g-2)) \oplus H^g(k, \mathbb{Z}/n(g-1)) \\ \rightarrow H^g(K, \mathbb{Z}/n(g-1))$$

$$\varepsilon \quad (\alpha, \beta) \mapsto z_n^{g-1}(\alpha) \cup h_1(\pi) + z_n^g(\beta)$$

を定義する。こゝに $z_n^{g-1}(\alpha) \cup h_1(\pi)$ は $z_n^{g-1}(\alpha) \in H^{g-1}(k, \mathbb{Z}/n(g-2))$

と $h_1(\pi) \in H^1(k, \mathbb{Z}/n(1))$ との cup 積。

(1.4.1) は n が p と素なとき同型となる。より一般に

Th. (1.4.2). $\lambda_{n,\pi}^8$ の Image は natural map

$$H^8(K, \mathbb{Z}/n(8-1)) \rightarrow H^8(K_{nr}, \mathbb{Z}/n(8-1))$$

の核と一致する。ここに K_{nr} は K の最大不分岐拡大

(cf. [K2])

§2. 主結果

ここでは基本写像 Φ_n を定義する。以下 $K \in \mathcal{S}_0$ の条件
(*) をみたす素標数 n の完備離散付値体とする。我々の興味の対象は Galois cohomology 群 $H^8(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(8-1))$ である。これらの群は $H^8(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(r))$ の型 n の群の中で非常に重要である。

実際

$$H^1(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{K}/K), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$H^2(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) = \text{Br}(K) \quad (K \text{ の Brauer 群})$$

さらに $H^3(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \subset K^\times$ の剰余体の被約 norm と密接な関係がある。

完全系列

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/n(8-1) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(8-1) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(8-1) \rightarrow 0$$

から生ずる cohomology sequence と (1.1.2) の全射性から

$$(2.1) \quad H^8(K, \mathbb{Z}/n(8-1)) = {}_n H^8(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(8-1)).$$

(${}_n A$ は A の n 倍の核)

従って torsion 群 $H^8(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(8-1))$ は知られている

$H^8(K, \mathbb{Z}/n(8-1))$ は知られている。これは l -part ($l \neq p$) は

1.4. どのようにわかってゐるか？ 問題は p -part だが (*)
 の条件の下ではこれか以下のように完璧にわかってゐる。
 剰余体 $\bar{k}$ に対し $W_n \Omega_{\bar{k}}^{\bullet}$ は De Rham-Witt complex とする。
 (cf. 1.3, [I])

Theorem (2.2) 次の条件をみたす全射準同型

$$\Phi_n: H^{\bar{s}}(K, \mathbb{Z}/p^n(\bar{s}-1)) \longrightarrow W_n \Omega_{\bar{k}}^{\bar{s}-1}$$

がただ1つ存在する。

$\Gamma K'/K$ は $e_{K'/K} = 1$ なる必ずしも有限次とは限らぬ完備離散
 散付値体の拡大 (従つて p は $\mathcal{O}_{K'}$ の素数), $\bar{k}' \in \mathcal{O}_{K'}$ の剰
 余体とする。このようにする K' の K' に対し、次の図式が
 可換

$$\begin{array}{ccccc}
 H^{\bar{s}}(K, \mathbb{Z}/p^n(\bar{s}-1)) \times (K')^{\times}/p^n & \xrightarrow{\textcircled{1}} & H^{\bar{s}+1}(K', \mathbb{Z}/p^n(\bar{s})) \\
 \Phi_n \downarrow & \uparrow \textcircled{4} & \uparrow \textcircled{2} \\
 W_n \Omega_{\bar{k}}^{\bar{s}-1} \times W_n \bar{k}' & \xrightarrow[\textcircled{3}]{} & H^{\bar{s}+1}(\bar{k}', \mathbb{Z}/p^n(\bar{s})) \\
 & & \oplus \\
 & & H^{\bar{s}}(\bar{k}', \mathbb{Z}/p^n(\bar{s}-1))
 \end{array}$$

ここに ① は $\bar{k}_1: (K')^{\times}/p^n \rightarrow H^1(K', \mathbb{Z}/p^n(1))$ と cup 積 で 定
 義される準同型

② は (1.4.1) における $\lambda_{p^n, p}^{\bar{s}+1}$ ((1.4.1) で $\pi = p$, $\bar{s} = \bar{s}+1$
 $n: p^n$ とおいたもの)

③ は $(\alpha, \omega) \mapsto ([p^{n-1} \alpha \cdot d\omega], [\omega \cdot \alpha])$, ここに

$\omega \in W_n \Omega_{\mathbb{R}}^r$ に對し, $[\omega]$ は (1.3.1) に對し ω の像 $\in H^{r+1}(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/p^n(r))$.

$$\textcircled{4} \text{ は } (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} p^{i+j} \tilde{a}_i p^{n-i-j}\right)$$

($\tilde{a}_i$ は $a_i \in \mathbb{R}'$ の $\mathcal{O}_K$ 上の射影上 (r'))

$$\pm 1 = H^{\delta}(K_{nr}/K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) = \ker(H^{\delta}(K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) \rightarrow$$

$$H^{\delta}(K_{nr}, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1))$$

(K_{nr} は K の最大不分岐拡大) とおくと Φ_n は

$$H^{\delta}(K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) / H^{\delta}(K_{nr}/K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-1)) \rightarrow W_n \Omega_{\mathbb{R}}^{\delta-1}$$

を經由し, $\delta=1$ のときは同型。 $\delta>1$ のとき,

$$\text{この map の核は } H^{\delta-1}(K, \mathbb{Z}/p^n(\delta-2)) \text{ と } h_1(1+p\mathcal{O}_K) \subset$$

$$H^1(K, \mathbb{Z}/p^n(1)) \text{ (} h_1 \text{ は (1.1.1) に定義された map) との}$$

cup 積の image に一致する。

Remark (2.2.2) Φ_n の特徴づけのためには K' とし 2 変数多項式環 $\mathcal{O}_K[T]$ の (p) での局所化の完備化の商体をとれば十分である。

Remark (2.2.3) 図式 (2.2.1) を見れば Φ_n は map $\textcircled{4}$ の "dual" とし 2 変数と定義されていふことがわかる。ここに写像

$\textcircled{4}$ の意味は syntomic chern class $[G]$

$$c_{1,1} : (\mathcal{O}_{K'})^{\times} / p^n \rightarrow H_{\text{syn}}^1(\mathcal{O}_{K'}, S_n^1)$$

の逆写像を具体的に書いたものである。正確には

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{O}_{K'}^X)/p^n & \xrightarrow{c1.1} & H^1(\mathcal{O}_{K'}, S_n^1) \\
 & \nwarrow \textcircled{2} & \uparrow \\
 \textcircled{2} & & H_{\text{dR}}^0(\Omega_{\mathcal{O}_{K'}}^1 \otimes \mathbb{Z}/p^n) = W_n \mathbb{Z}'
 \end{array}$$

(cf. §4)

(2.3) Φ_n の n に関する compatibility

$$\mathbb{Z}/p^n(i-1) \rightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}(i-1), \quad \mathbb{Z}/p^{n+1}(i-1) \rightarrow \mathbb{Z}/p^n(i-1)$$

という 2 つの canonical maps がある induce される

cohomology の非同型に対して 2 つの可換図式が得られる。

$$H^i(K, \mathbb{Z}/p^n(i-1)) \rightarrow H^i(K, \mathbb{Z}/p^{n-1}(i-1))$$

$$\begin{array}{ccc}
 (2.3.1) & \begin{array}{c} \Phi_n \downarrow \\ W_n \Omega_{\mathbb{Z}}^{i-1} \end{array} & \xrightarrow{F} \begin{array}{c} \downarrow \Phi_{n-1} \\ W_{n-1} \Omega_{\mathbb{Z}}^{i-1} \end{array}
 \end{array}$$

$$H^i(K, \mathbb{Z}/p^n(i-1)) \rightarrow H^i(K, \mathbb{Z}/p^{n+1}(i-1))$$

$$\begin{array}{ccc}
 (2.3.2) & \begin{array}{c} \Phi_n \downarrow \\ W_n \Omega_{\mathbb{Z}}^{i-1} \end{array} & \xrightarrow{V} \begin{array}{c} \downarrow \Phi_{n+1} \\ W_{n+1} \Omega_{\mathbb{Z}}^{i-1} \end{array}
 \end{array}$$

すなわち F, V は De Rham-Witt complex における 2 つの

operator, 特に Witt vector の環 $\mathbb{Z}$ 上の

$$F: (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto (a_0^p, \dots, a_{n-2}^p)$$

$$V: (a_0, \dots, a_{n-1}) \mapsto (0, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

$$(2.4) \quad \Phi: H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(i-1)) \rightarrow \varinjlim W_n \Omega_K^{i-1}$$

は Φ_n の順極限とする。 Φ は全射で、核 I は p -divisible.

また p -torsion pI は $B_{\infty} \Omega_K^{i-1}$ に同型となる。ここに

$$B_{\infty} \Omega_K^{i-1} \text{ は } a^{p^m} \frac{da}{a} \wedge \frac{db_1}{b_1} \wedge \cdots \wedge \frac{db_{i-2}}{b_{i-2}} \quad (m \geq 0) \text{ の型の}$$

元で生成される Ω_K^{i-1} の部分群。

(2.5) 定理の証明で最も問題となるのは Φ_n の構成である。

Φ_1 は具体的に比較的容易に構成でき、 Φ_n は帰納法により

一歩一歩構成していく。さらにこの構成のためには $k_2(K)/p^n$

の構造を完全に知ることも必要である。しかしここでは証明

についてはこれ以上触れないことにする。

§3 応用.

(3.1) 三木博雄先生はすでに (*) をみたす K は特別の性質を持つことを観察していた。

Theorem ([M] §6) K は §0 の (*) をみたす完備離散

取付値体、 L/K は p -巡回拡大、 $L(\zeta_p)/K(\zeta_p)$ は方程式

$$T^p = 1 + (\zeta_p - 1)a \quad \text{で与えられているとする。ここに、}$$

ζ_p は 1 の原始 p 乗根、 $a \in \mathbb{Q}_K[\zeta_p]$ 。また L/K は含

む K の p^{n+1} 次巡回拡大が存在するための必要十分条件は

$$\bar{a} \in a \text{ の } \mathbb{F} = \mathbb{Q}_K[\zeta_p]/(\zeta_p - 1) \text{ での像としたとき、 } \bar{a} \in \mathbb{F}^{p^n}$$

である。

我々はこの定理を次のように説明できる。上の状況で χ は L/K に対応する指標とすると $\Phi_1(\chi) = \bar{a} \in k$ 。この事実と可換図式 (2.3.1) により

$$\bar{a} \in k^{p^n} \iff \exists \chi' \in H^1(K, \mathbb{Z}/p^{n+1}) \text{ s.t. } p^n \chi' = \chi$$

から上の定理が出る。実際 (2.3.1) は p^n -巡回拡大から p^{n+1} -巡回拡大に移るための必要十分条件を与えていると考えられる。

(3.2) 三木先生の上記論文では次の有名な定理が述べられている。

Theorem K は混雑数完備離散付値体, k は剰余体,

$k^\infty = \bigcup_{n \geq 0} k^{p^n}$ は k の最大完全部分体, F は k^∞ 上剰余体に持つ K の部分体で, K から induce される位相で完備な離散付値体, F の素元は K の素元でもあるとする。

このとき K の $\mathbb{Z}_p$ -拡大は F の $\mathbb{Z}_p$ -拡大と不合同拡大の合成に含まれる。

K が (*) をみたすとき 我々の定理を使之は”この証明は難しくもない。実際, k は分離閉としてよく, このとき示すには $H^1(k, \mathbb{Z}_p) \cong H^1(K, \mathbb{Z}_p)$ 。しかし (2.3.1) により

これは $\varprojlim_F W_n(\mathbb{Q}^\infty) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_F W_n(\mathbb{Q})$ から明らかである。なお筆者は K の (*) をみたす n と 2 に互素な n に対して同様の方針を用い、 T 上の定理の別証明を得た。

(3.3) $g > 1$ 存在 g に対し $H^g(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(g-1))$ について考えてみよう。

Cor. (3.3.1). cup 積 と $\bar{h}_{g-1}$ (cf (1.1.21)) で定義され

$$H^1(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) \otimes (K^\times)^{\otimes (g-1)} \rightarrow H^g(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(g-1))$$

は全射、特に $\text{Br}(K)$ の p -part は cyclic algebra で生成される。

一般に 全ての体 F に対し Brauer 群 $\text{Br}(F)$ は cyclic algebra で生成されると予想されるが、特別な体(代数体, 1 の p 乗根を F に含む体, など)以外 n と 2 はわかっている。

Cor. (3.3.2). $H^g(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(g-1)) / H^g(K_{nr}/K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(g-1))$ は剰余体の p -base の個数から $g-1$ 個以上ある。 $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ の無限個の直和を含むほど大きい。

実際、 $I = \text{Ker}(\Phi: H^g(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(g-1)) / H^g(K_{nr}/K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(g-1)) \rightarrow \varprojlim W_n \Omega_K^{g-1})$ はこの条件をみたしている。この系は B. Roux がにより $\text{Br}(K)$ に対し報告されたもので、その一般化として

ここに述べたのである。

§4. 背景.

最近 Fontaine Messing [F-M], Faltings 等により、標数 0 の世界と標数 $p > 0$ の世界をつなぐ理論が構成されている。すなわち X は標数 $(0, p)$ の離散付値環上の variety としたとき、 X の generic fiber の p -進表現と special fiber の crystal, あるいは generic fiber の étale cohomology と special fiber の crystalline cohomology との間深い関係が明らかにされている。(これらについては本報告集内 兵衛氏の稿を参照されたい。)

Fontaine と Messing は generic fiber の p -進 cohomology と special fiber の crystalline cohomology をつなぐため、この間をとりもつ syntomic cohomology $H_{\text{syn}}^i(X, S_n^r)$ を定義した。これは理想的に " $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}/p^n(r))$ " と見なされる群である。($\mathbb{Z}/p^n(r)$ は X 上の étale sheaf であることに注意せよ。)

S_n^r は $\mathcal{D}(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n) \otimes \wedge^r$ の direct image に divided power や微分加群を用いた complex で表すことにより ([K3]), この理論が generic fiber の étale cohomology $H_{\text{ét}}^i(X_\eta, \mathbb{Z}/p^n(r))$ 自体の計算に非常に役立つことがわかる。([Ku])

ただし syntomic cohomology がうまく働くのは $r \geq 0$ のとき

まであり、我々のように $H^0(X_\eta, \mathbb{Z}/p^n(8-1))$ を知りたうときはこの理論はこのままでは使えない。一種の duality がここに必要なのである。

$X = \text{Spec } \mathbb{Q}_K$, K は §0 の (*) をみたすとする。さらに剰余体 k の p -base の個数が $d-1$ 個であるとす ($[k:k^p] = p^{d-1}$)。このとき 次の完全系列

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & H_{\text{syn}}^d(X, S_n^d) & \rightarrow & H^d(K, \mathbb{Z}/p^n(d)) & \rightarrow & H^{d-1}(k, \mathbb{Z}/p^n(d-1)) & \rightarrow 0 \\ & \parallel & & & & & \\ & H_{\text{DR}}^{d-1}(\Omega_X^1 \otimes \mathbb{Z}/p^n) & & & & & \end{array}$$

が証明できる。(cf. [Ku]). この "dual" として、たとえば、

Th. (0.1) の完全系列と存在するのである。(正確には relatively perfect site $\mathfrak{a}$ 上で p -adic étale vanishing cycles の sheaf の duality が必要となる。)

ただし上の "duality" はまだ正確に証明されておらず、我々の定理 (0.1), (2.2) はこの § のような方法で証明するのでなく、syntomic cohomology の理論は、たく使わずに証明できる、ということに最後に注意しておく。

References

- [B-K] Bloch, S. and Kato, K., p -adic étale cohomology
Publ. Math. IHES, 63 (1986)
- [F-M] Fontaine, J.-M., and Messing, W., p -adic periods
and p -adic étale cohomology, Contem. Math 67 (1987)
- [G] Gros, M., Régulateurs syntomiques, preprint
- [I] Illusie, L., Complexe de De Rham-Witt et cohomologie
cristalline, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 12 (1979)
- [K1] Kato, K., Galois cohomology of complete discrete
valuation fields, in Lect. Notes in Math 967
- [K2] Kato, K., Swan conductors for characters of degree
one in the imperfect residue field case, to appear
in Contem. Math.
- [K3] Kato, K., On p -adic vanishing cycles, Adv. Studies
in Pure Math. 10 (1987)
- [Ku] Kurihara, M., A note on p -adic étale cohomology,
Proc. Japan. Acad. 63 (1987)
- [M] Miki, H., On $\mathbb{Z}_p$ -extensions of complete p -adic power
series fields and function fields, J. Univ. Tokyo
(1974)
- [CL] Serre, J.-P., Corps locaux, Hermann, Paris.