

$\mathbb{CP}^2$ 上の rank 3 の微分方程式

九 大 理 吉田正章 (Masaaki YOSHIDA)

§1 $X = \mathbb{CP}^2$ 上定義された 線型, Fuchs 型, 解空間の次元 (rank) 有限なる 偏微分方程式系 を考える.

定義 “よい” 方程式とは, 上記の様な方程式でかつ

- (1) Orbifold-uniformizing differential equation (OUDE) で,
- (2) Accessory parameter free で,
- (3) irreducible であるものを言う。

ここで, 上で使った言葉を簡単に説明する.

Obifold とは 多様体 X と分岐曲線 C_i と分岐指数 b_i の組のことである。これを (X, b) と書くことにする.

OUDE : 方程式 (E) が orbifold (X, b) の OUDE であるとは, M を (X, b) の universal uniformization (ie. C_i 上 b_i 次の分岐をする最大の分岐 covering) としたとき projection : $M \rightarrow X$ の逆写像が (E) の解の組になっていること.

Acc. pan. free : 方程式が特異点のまわりの local behavior で定ってしまうこと.

Irred. : 対応する vector bundle が階数の低いものの直和に分解しないこと。Reducible のことをここでは“自明”と呼ぼう。

§2 前節をよりよく理解する為に $X = \mathbb{CP}_1$ のときを復習しよう。

分岐点の数	(X, b)	OUDE	M 判定
1ヶ	un-uniformizable	なし	なし “だめ”
2ヶ	$b_0 = b_1 (=b)$ のとき だけ uniformizable	$w'' + \frac{1-b^2}{x^2} w = 0$ 解は B 基函数	$\mathbb{CP}_1$ “自明”
3ヶ	b_0, b_1, b_∞ 任意. $\frac{1}{b_0} + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_\infty} > 1$ “ $= 1$ “ < 1	Gauß HGDE $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ $b_0 = 1/ 1-\gamma $ $b_1 = 1/ \gamma-\alpha-\beta $ $b_\infty = 1/ \alpha-\beta $	$\mathbb{CP}_1$ “よい” C D
≥ 4	b_j 任意	Acc. par. あり	D “むず” ↑ むずかしいの略

要するに 一次元の場合は, Gauß HGDE (hypergeometric differential equation) だけが “よい” 方程式で, あとは, “自明” か “むず” となる。

§3 二次元のときは, 分岐点でなく曲線になるので, “だめ”, “自明”, “よい”, “むず” の区別が, 点の数という訳にはゆかない。

だめの例: 非特異 r 次曲線と b ($r \neq 1$) 等。

自明な例: $xyz = 0$ 等々。

問題 “よい” 方程式をみつけて 研究せよ.

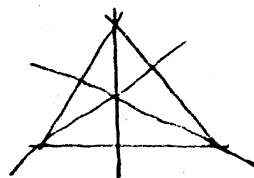
現在までに知られている “よい” 方程式と 対応する orbifold を報告する. Rank = 3 でなくてはならない. 方程式の形は

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_k P_{ij}^k(x) \frac{\partial W}{\partial x_k} + P_{ij}^0(x) W \quad i, j = 1, 2$$

となる. 係数は有理式. $P_{ij}^0(x)$ は $P_{ij}^k(x)$ で定まる. P_{ij}^k の分子の次数は分母の次数より小さくとも 1 つ小さい. $P_{ij}^k(x)$, $i, j, k = 1, 2$ の共通分母を $F(x)$ とおく.

[1] 完全四辺形 $F(x) = xy(x-1)(y-1)(x-y)$.

OUDE は Appell の 2 変数超幾何微分方程式 F_1 と呼ばれているものになる. これは, Picard, 寺田俊明, 志賀弘典, 佐々木武, Deligne, Mostow 等により研究され, ほぼ完成した. 今や有名だろうと思う.



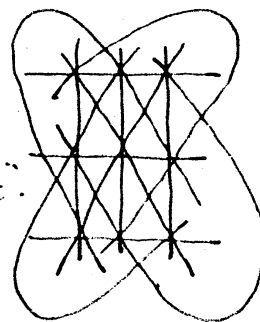
[2] Hessian configuration

$$F(x) = xy \prod_{\nu, \mu} (\omega^\nu x + \omega^\mu y + 1) \quad \omega = 1^{1/3}$$

$$= xy ((x^3 + y^3 + 1)^3 - 27x^3 y^3)$$

Hessian group G_{216} - 不変.

OUDE は発見されたが, くわしい研究まだ.



[3] Kleinian configuration.

$F(x)$: Klein の単純群 $G_{168} (\cong \text{PSL}(2, \mathbb{F}_7))$ の
24 次の反不変式.

OUDE は研究集会の講演の時は計算途中であったが,
10日後に, 4つかった.

注意. [2]と[3]は, HIRZEBRUCH の計算と, Yam-宮岡
の定理により, §1 の条件 (1) をみたす OUDE の存在は理
論的に分っていた. 方程式をみつける (access pay free で
なかったらみつからないはず) のに手間取った訳である.

今後 よい方程式 をもっとみつけて, くわしく調べたい.

最後に, “むず” な方程式は, 存在は予想されてゐるもの
の (候補あり), 未だ explicit に書き下すに至ってない.

終

告白: 九大理 数学教室の 宇加治靖子氏に 深く感謝
する. 彼女の助力なくして計算は完結しなかったであろう.