

群のある種の部分群と

単位ユ=タリ表現

東大 教養 斎藤 正彦

序 離散群は普通 I 型でないのに、そのユ=タリ表現に関しては、ほんの少ししか分かっていない。この講演では、局所コンパクト群の部分群である条件をみたすものから誘導した単位ユ=タリ表現の既約性と同値性に関するいくつかの結果を述べ、それを代数群の場合に応用する。モジュラー群への応用は、去年九月の日光での表現論シンポジウムで話した、結果は文献 [3] [4] に発表したもので、ここでは述べない。左部に証明をつけたものは、*« Représentations unitaires monomiales d'un groupe discret, en particulier du groupe modulaire »* として発表される予定である。

§1 条件 $(\mathcal{F}_0)$ と既約性の判定条件。

G を局所コンパクト群、 H をその部分群とする。本稿で、群の表現はつねに連続ユ=タリ表現、群の指標はつねに一次

元の連続 $\gamma = \tau$ リ表現を意味する。

H を G の閉部分群, χ を H の指標とする. χ から誘導した G の表現を $U(\chi)$ と書く. G の中に, $H \backslash G$ の代表系 $\mathcal{H}$ を一つ取って固定する. さらに, $\mathcal{H}$ は単位元 e を含むとする. G の元 g はすべて $g = p(g)\theta(g)$ ($p(g) \in H$, $\theta(g) \in \mathcal{H}$) の形に一意的に書ける. 作用

$$G \times \mathcal{H} \ni (g, x) \longmapsto x^g = \theta(xg)$$

により, G は $\mathcal{H}$ に右から遷移的に働く. また, 簡単のため, $\chi(p(xg))$ のことを $\chi(x, g)$ で, $U(\chi)(g)$ のことを $U(\chi; g)$ と書く. すなわち, 表現 $U(\chi)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathcal{H})$ で実現され, その作用は,

$$U(\chi; g)\varphi(x) = \chi(x, g)\varphi(x^g) \quad (1)$$

で与えられる ($\varphi \in \mathcal{H}$, $g \in G$, $x \in \mathcal{H}$).

$\mathcal{H}$ の元 a に対し, a の特性函数を $\mathbb{I}_a$ と書く. すると,

$$U(\chi; g)\mathbb{I}_a = \chi(a^g, g)\mathbb{I}_{a^g} \quad (2)$$

が成立つ. したがって $\mathbb{I}_a$ は $U(\chi)$ に関する生成ベクトルである. すなわち, $\{U(\chi; g)\mathbb{I}_a; g \in G\}$ は $\mathcal{H}$ で密な部分線型空間を張る. とくに, H の元 h に対しては,

$$U(\chi; h)\mathbb{I}_e = \chi(h)\mathbb{I}_e \quad (3)$$

となる.

G の元 g に対し, $g^{-1}Hg$ の指標 χ^g を

$$\chi^g(g^{-1}hg) = \chi(h) \quad (h \in H)$$

によって定める. H の G での正規化群を $N(H)$ とし, $\textcircled{H}_N =$

$\textcircled{H} \cap N(H)$ とすると, $h \in H$, $n \in \textcircled{H}_N$ に対して

$$\chi(n, h) = \chi^n(h), \quad U(\chi; h)\mathbb{Z}_n = \chi^n(h)\mathbb{Z}_n \quad (4)$$

が成立つ.

$W(H) = N(H)/H$ と置く. $w \in W(H)$ に対し, w を代表

する $N(H)$ の勝手な元 n を取ると, $\chi^w(h) = \chi(nhn^{-1})$

によって, H の指標 χ^w が矛盾なく定義される.

G と H とに関するつぎの条件を考える:

$$(\mathcal{F}_0) \quad g \in G, \quad [H : H \cap g^{-1}Hg] < \infty \implies g \in N(H).$$

補題. H を G の部分群で条件 $(\mathcal{F}_0)$ を満たすものとする. α を $\textcircled{H}$ の元とする. もし, 集合 $\alpha^H = \{\alpha^h; h \in H\}$ が有限ならば α は $\textcircled{H}_N$ に属する.

証明. α^H が有限とする. $H_\alpha = \{h \in H; \alpha^h = \alpha\}$ と置く. H は α^H に右から遷移的に働き ($\alpha^H \ni y \mapsto y^h$), H_α は α の固定部分群である. したがって $[H : H_\alpha] < \infty$.

方, $H_x = H \cap x^{-1}Hx$ である, 条件 (7₀) により, x は $N(H)$ に属する. 終.

定理 1. G を局所コンパクト群, H を G の開部分群で条件 (7₀) を満たすもの, χ を H の指標, $\psi(\chi)$ を χ から G への誘導表現とする. $W(H) = N(H)/H$ とすると, $\psi(\chi)$ が既約であるためには, $W(H)$ の 1 でない任意の元 w に対して $\chi^w \neq \chi$ が成立することが必要十分である.

証明. 1° $N(H) = H$ の元 m_0 で, $\chi^{m_0} = \chi$ とするものがあるとする. χ から $N = N(H)$ への誘導表現を $V(\chi)$ とする. N 上の函数 φ で, $h \in H, n \in N$ に対して $\varphi(hn) = \chi(h)\varphi(n)$

が成立ち, $\sum_{n \in N \bmod H} |\varphi(n)|^2 < \infty$ とするものの全体のヒル

ベルト空間を $\mathcal{H}_N$ とすると, $V(\chi)$ は $\mathcal{H}_N$ 上の右準正則表現

として実現される. $\varphi \in \mathcal{H}_N$ に対し, $M\varphi(n) = \varphi(m_0n)$ と

置くと, M は $\mathcal{H}_N$ の有界非スカラー作用素で, χ は $V(\chi; m)$

と可換である. よって $V(\chi)$ は可約, 階段誘導定理により

$\psi(\chi)$ も可約となる.

2° $W(H)$ の任意の $w \neq 1$ に対して $\chi^w \neq \chi$ とする. 単位元 e の特性函数を $\mathbf{1}$ とすると, $\psi(\chi; h)\mathbf{1} = \chi(h)\mathbf{1}$ が成立つ (公式 (3)). 同様に $\mathcal{H}$ の元 $\varphi \neq 0$ で $\psi(\chi; h)\varphi = \chi(h)\varphi$ な

もとのがあるとする、

$$\chi(h)\varphi(x) = U(x;h)\varphi(x) = \chi(x,h)\varphi(xh)$$

だから $|\varphi(xh)| = |\varphi(x)|$ が成立つ ($x \in \mathbb{G}$, $h \in H$). $\mathbb{G}_N$

に属する $x \in \mathbb{G}$ で $\varphi(x) \neq 0$ のものがある、補題

により、函数 $|\varphi|$ は無限個の互で 0 でない同じ値を取り、 φ

は $\ell^2(\mathbb{G})$ に属し之なり。よって φ の台は $\mathbb{G}_N$ に含まれる。

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{G}_N} \alpha_n \overline{\Phi}_n \quad \text{と書くと、公式 (4) により、}$$

$$U(x;h)\varphi = \sum_{n \in \mathbb{G}_N} \alpha_n U(x;h)\overline{\Phi}_n = \sum_{n \in \mathbb{G}_N} \alpha_n \chi^n(h)\overline{\Phi}_n$$

となるが、一方

$$U(x;h)\varphi = \chi(h)\varphi = \sum_{n \in \mathbb{G}_N} \alpha_n \chi(h)\overline{\Phi}_n$$

だから、 $\alpha_n \chi^n(h) = \alpha_n \chi(h)$ ($h \in H$, $n \in \mathbb{G}_N$) となる。

$n \neq e$ なら、ある h で $\chi^n(h) \neq \chi(h)$ だから $\alpha_n = 0$ となり、

$\varphi = \alpha_e \overline{\Phi}$ となる。 $\overline{\Phi}$ は非可逆ベクトルだから $U(x)$ は簡約

である。終。

注意. G が密可算部分集合を持つ (separable) とす

には、この定理は G. W. Mackey [2] の定理 6' からただ

ちに出る。

§2. 条件 (7) と同値性の判定条件.

G を局所コンパクト群, $\mathcal{A}$ を G の閉部分群の族とし, つぎの条件を考える:

$$(7) \ 1. \ H_1, H_2 \in \mathcal{A}, \ g \in G, \ [H_1 \cap H_1 \cap g^{-1}H_2g] < \infty \\ \implies H_1 \subset g^{-1}H_2g.$$

$$2. \ H \in \mathcal{A}, \ g \in G, \ gHg^{-1} \subset H \implies g \in \mathcal{N}(H).$$

このとき, $\mathcal{A}$ の各メンバーは条件 (7) を満たす.

定理 2. G を局所コンパクト群, $\mathcal{A}$ を G の閉部分群の族で条件 (7) を満たすもの, $H_1, H_2 \in \mathcal{A}$ の元, χ_i ($i=1, 2$) を H_i の指標, U_i を χ_i から G への誘導表現とする. U_1 と U_2 が (ユ = 4リ) 同値であるためには, G の元 g で,

$$H_2 = g^{-1}H_1g, \quad \chi_2 = \chi_1^g$$

となるものが存在することが必要十分である.

証明. もしこのような g が存在すれば, 誘導表現の一般論によつて U_1 と U_2 とは同値になる.

U_1 と U_2 が同値であるを仮定する. $H_i \backslash G$ の G の中での代表系 Θ_i を取り, 前のように, U_i を $\mathcal{H}_i = \ell^2(\Theta_i)$ で実現する. M を, $\mathcal{H}_2$ から $\mathcal{H}_1$ へのユ = 4リ作用素で,

$$MU_2(g) = U_1(g)M \quad (g \in G)$$

なるものとする。単位元 $e \in \mathbb{H}_2$ の特性函数を $\Phi_2 \in \mathbb{H}_2$ とし、
 $\Phi_1 = M\Phi_2$ と置く。 $h \in H_2$, $x \in \mathbb{H}_1$ に対し、

$$\cancel{U_1(h)} \Phi_1 = MU_2(h)\Phi_2 = \chi_2(h)\Phi_1,$$

$$U_1(h)\Phi_1(x) = \chi_1(x, h)\Phi_1(xh)$$

が成立つかう、 $|\Phi_1(xh)| = |\Phi_1(x)|$ となる。 $\mathbb{H}_1$ の元 x
 を一々固定する。集合 $x^{H_2} = \{xh; h \in H_2\}$ が無限集合
 なら、定理1の証明と同様に、 $\Phi_1(x) = 0$ となければなら
 ない。

いま一時的に $H_1 = H_2 = H$ とする。補題により、 Φ_1 の台は
 $\mathbb{H}_N$ に含まれ、 $\Phi_1 = \sum_{n \in \mathbb{H}_N} \alpha_n \Phi_n$ と書ける。

$$U_1(h)\Phi_1 = \sum_{n \in \mathbb{H}_N} \alpha_n U_1(h)\Phi_n = \sum_{n \in \mathbb{H}_N} \alpha_n \chi_1^n(h)\Phi_n,$$

$$U_1(h)\Phi_1 = \chi_2(h)\Phi_1 = \sum_{n \in \mathbb{H}_N} \alpha_n \chi_2(h)\Phi_n$$

が成立つ。 $\alpha_n \neq 0$ なる $n \in \mathbb{H}_N$ を取れば $\chi_2(h) = \chi_1^n(h)$
 となり、結論が出た。

一般の場合に戻る。 Φ_1 は0でないから、 x^{H_2} が有限集
 合であるような $x \in \mathbb{H}_1$ が存在する。 H_2 の x^{H_2} への遷移
 作用の x での固定群は $H_2 \cap x^{-1}H_1x$ である、これは H_2 の中で
 指数有限である。条件(7)により、 $H_2 \subset x^{-1}H_1x$ となる。

✓

同様に, $\textcircled{H}_2$ のある元 y に対して, $H_1 \subset y^{-1} H_2 y$ が成立つ.
 条件 (予)2 により, $H_2 \supseteq x^{-1} H_1 x = y H_1 y^{-1}$ となる. H_2
 の指標 χ_1^x から G の誘導表現を U_1^x とすると, U_1^x は U_1
 に同値だから U_2 と同値である. したがって, $\textcircled{H}_N$ のある
 元 n を取る $\chi_2 = (\chi_1^x)^n = \chi_1^{x^n}$ となり, 定理は証明
 された. 終.

注意. G が密可算部分集合を含み, $\textcircled{H}_1, \textcircled{H}_2$ がともに
 簡約だと仮定すると, 定理2は Mackey [2] の定理 7' から
 ただちに出る.

§3. 代数群の場合.

k を無限完全体, G を k 上定義された連結線型代数群とし,
 ~~$G(k)$~~ G の k 上の有理点全部の群に離散位相を入れた群を
 $G(k)$ とする. G の k 上定義された連結閉部分群 H を走
 るべきの $H(k)$ の左体を $\mathcal{A}$ とする.

定理3. $\mathcal{A}$ は条件 (予) を満たす ($G(k)$ ~~に~~ 関して).

証明. $H(k)$ は指数有限の H の部分群を持たないから 1 はみだ
 られる. また, $g H(k) g^{-1} \quad (g \in G(k))$ と $H(k)$ とは同
 次元だから, 一方が他方に真に含まれることはなく, 2 をみ
 だされる. 終.

この定理は、とくに正規化群の小さな部分群、たとえば放物部分群やカルタン部分群の場合に有効である。

系. G が reductive であるか、または k が代数閉体であると仮定する。 P を G の k 上定義された放物部分群とする。このとき、 $P(k)$ の指標から誘導した G の表現はすべて既約である。二つの異なる指標からの誘導表現はたがいに非同値である。

証明. $P(k)$ の正規化群は $P(k)$ 自身である。

§4. 病理現象.

G を離散群、 H を G の可換部分群、 $\hat{H}$ を H の指標群とする。 $\chi \in \hat{H}$ から G への誘導表現を $U(\chi)$ とすると、 G の右正則表現 T は、 $U(\chi)$ 、 $\chi \in \hat{H}$ の直積分に分解される：

$$T = \int_{\hat{H}} \oplus U(\chi) d\chi$$

ただし $d\chi$ は $\hat{H}$ のハール測度である (Godement [1])。

T の二つの既約分解

$$T = \int_A \oplus U^\alpha d\alpha = \int_B \oplus V^\beta d\beta$$

がたがいにまったく無関係であるとは、1) $\alpha \in A$, $\beta \in B$

有 $U^\alpha \sim V^\beta$, 2) $\alpha, \alpha' \in A$, $\beta, \beta' \in B$, $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$
 有 $U^\alpha \sim U^{\alpha'}$, $V^\beta \sim V^{\beta'}$ が成立することであると定義
 する。

ゴードマンの定理をモジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ に適用すると,
 ここには述べなかった定理 ([3] を見よ) により, つぎの
 定理が成立つ。

定理 4. モジュラー群 $SL(2, \mathbb{Z})$ の右正則表現は, 無限に
 多くの, たがいにまったく無関係な仕方, 無限次元既約表
 現の直積分に分解される。

これは, 吉沢尚明 [5] や Mackey [2] の例 (= つの仕
 方の分解) よりさらに病理的な例を与えている。

文 献

- [1] R. Godement, Sur les transformations de Fourier
 dans les groupes discrets, C.R. Acad. Sci. Paris,
 228 (1949), 627-628.
- [2] G.W. Mackey, On induced representations of
 groups, Amer. J. Math., 73 (1951), 576-592.
- [3] M. Saito, Représentations unitaires du groupe
 modulaire, Proc. Japan Acad., 48 (1972), 381-383.

- [4] M. Saito, Représentations unitaires du groupe modulaire Γ , *ibid.*, 641 - 642.
- [5] H. Yoshizawa, Some remarks on unitary representations of the free group, *Osaka Math. J.*, 3 (1951), 55 - 63.