

# 地中基礎構造物の振動特性について

後藤 尚 男・土岐 憲 三・高田 至 郎

## ON THE VIBRATIONAL CHARACTERISTICS OF FOUNDATION STRUCTURES IN THE GROUND

By Hisao GOTO, Kenzo TOKI and Shiro TAKADA

### Synopsis

The paper is concerned with the interaction between structures and ground. The system treated here in consists of the elastic homogeneous surface layer with uniform depth to the base extending over the semi-infinite elastic half space and the cylindrical structure which extends from the base through the layer.

Emphasis is on the analysis of the vibrational characteristics of the structure, which is influenced by the surrounding material. The results indicate that the rigidity and damping of structure are considerably increased by the ground. Finally model experiments are carried out to verify the theoretical results and they show good agreement.

### 1. 緒 言

橋りょうなどの土木構造物の基礎は、大部分が地中に埋設されている場合が多い。特に、最近の基礎工法の発達によって、軟弱な表層地盤を貫いて、堅固な地盤にその先端を有するような深い基礎が多く施工されるようになり、基礎構造物と地盤との接触部分はますます増大していく傾向にあるといえる。本研究においては、軟弱な表層地盤を貫いて、より堅固な基盤に固定されている円柱型基礎構造物を取り扱い、その耐震性を論じようとするものである。このような地中基礎構造物の耐震性を論ずる場合には、地震現象が、地盤そのものの震動であるために、地盤にその周囲をとり囲まれている構造物は、いわゆる地盤との相互作用によって、複雑な応答を示すものと考えられる。地盤と構造物の相互作用の理論解析については、これまでに、さまざまな手法によって研究が進められている。一つは、地盤を質量とバネの振動系に置換して discrete な系として取り扱い、構造物との連成振動として解析する方法であり、他の一つは、地盤と構造物を一体の連続体と見なして、弾性体理論を用いて解析する方法である。第1の方法については、多くの研究がなされているが<sup>1)</sup>、運動の釣合式の各項に相当する質量、減衰定数、バネ定数の値をいかに評価するかは手法の適用の如何がかかっている。しかし、現状では、これらの項のいずれもが不明瞭であり、仮想質量、等価粘性減衰、地盤反力係数などの概念を用いて、電子計算機を利用したパラメトリックな研究も進められている。後者の方法については、波動論の立場に立つものであり、田治見氏等による研究<sup>2)</sup>がある。この方法は、地盤内の波動方程式より出発して、構造物および地盤での境界の条件を考慮しながら、連続体としての解析を進めるものである。したがって、地盤内を伝播する波動の伝播速度によって、地盤の特性値を表示しており、弾性諸定数の決定が問題となってくる。さらに、連続体の解析は境界値問題であり、解析可能な対象モデルが限定されてくるのが難点であるといえる。

本研究では、後者の波動論の立場から、振動解析を行なって、地中基礎構造物の応答について検討を加えたものである<sup>3)</sup>。相異なる弾性をもつ成層地盤の振動特性については、金井氏等の研究<sup>4)</sup>によっても明らかに、地下逸散減衰が現われ、地表面での地盤の動きは、小さく評価される。しかし、下層が完全に剛

である場合には、上層へ入射して来た波動は、その内に閉じ込められる結果となって、逸散減衰効果が現われないことも明らかである。従来の研究においては、構造物の支持された基盤は剛なものとして取り扱っている場合が多い<sup>2)</sup>。本研究では、波動の逸散による系の振動特性に与える影響を見るために、基盤は弾性の性質をもつものと見なして解析を進めた。また、入射波動は、耐震工学で対象とするような地盤層においては、ほとんど鉛直下方ないしはそれより  $5^\circ \sim 10^\circ$  の方向から入射することが知られている<sup>4)</sup>。ある入射角をもって、基盤に地震波が到達する場合においては、表層地盤の各地点では、鉛直下方から入射する場合と異なっており、一様に震動せず、各地点では位相差をもつことになり、見かけ上、入射波動は水平方向に伝播し、構造物の側方から入射してくる場合と同様な結果になる。この場合には、構造物による波動の散乱現象が生じて、複雑な振動特性を有することになる。浅発地震や近距離地震の場合においては、上のような現象が生じるものと考えられ、本研究では、このような場合についての検討も行なった。さらに、地中基礎構造物は、上部構造物と一体となって震動するものであるが、従来の研究においては、基礎構造物の上端が地表面と一致するような場合について検討がなされているが、上部構造物の震動を考慮に入れて、地中基礎と連続的に取り扱う手法についての理論的な解析および考察を加えた。最後に、模型実験を実施することによって、上の理論解より考察された地中基礎構造物の地震応答の考え方の是非についての検討を試みた<sup>5)</sup>。

## 2. 地中基礎構造物に作用する震動圧

### 2.1 地表層の震動

Fig. 1 のように  $z=0$  で不連続面を有する地盤層に、射出角  $e$  で入射してくる SH 波について考えると、基盤での反射波および表層地盤内での屈折波、反射波はいずれも  $y$  方向の変位成分のみをもつ SH 波であることは明らかである。表層地盤、基盤における物理定数の suffix を 1, 2 で表示し、 $c, \rho, v, k, e$  はそれぞれ、SH 波の伝播速度、地盤の密度、 $y$  方向の変位成分、伝播波動の波数ベクトル成分、射出角を表わすものとする。しからば、表層地盤、基盤の運動方程式は次式で与えられる。

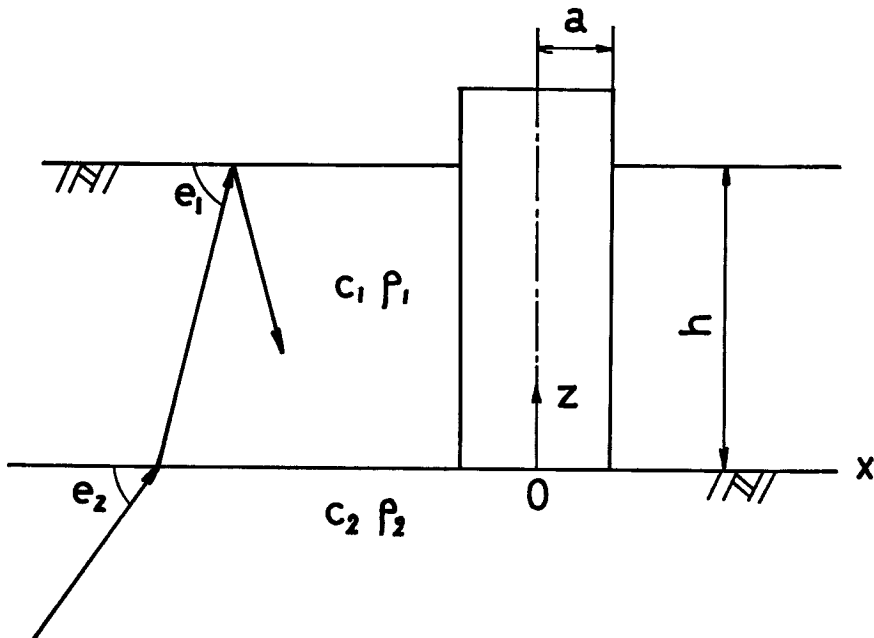


Fig. 1 Model of soil layer and structure.

$$\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

入射波の振幅  $A_0$ ，基盤での屈折波の振幅  $A_2$ ，表層地盤内での反射波，屈折波の振幅を  $A_1, A_3$  とすれば，平面波はその伝播方向を考慮して，次のように表わすことができる。

$$v_1 = A_1 \exp\{ik_1(x \cos e_1 + z \sin e_1 - c_1 t)\} \\ + A_3 \exp\{ik_1(x \cos e_1 - z \sin e_1 - c_1 t)\} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$$v_2 = A_0 \exp\{ik_2(x \cos e_2 + z \sin e_2 - c_2 t)\} \\ + A_2 \exp\{ik_2(x \cos e_2 - z \sin e_2 - c_2 t)\} \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

境界条件として，不連続面で変位と応力が連続であり，地表面でせん断応力がゼロであることを用い， $\mu$  をせん断剛性とするれば，

$$z=0: \quad v_1 = v_2 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

$$\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

$$z=h: \quad \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

(2.5)～(2.7) 式のもとに，(2.2) 式，(2.4) 式の平面波動の式を波動方程式に代入して，入射波振幅  $A_0$  に対する比として  $A_1, A_2, A_3$  を表示すると

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{2}{(1+\beta) + (1-\beta) \exp(2ik_1 h \sin e_1)} \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

$$\frac{A_2}{A_0} = \frac{2 \exp(2ik_1 h \sin e_1)}{(1+\beta) + (1-\beta) \exp(2ik_1 h \sin e_1)} \quad \dots\dots\dots (2.9)$$

$$\frac{A_3}{A_0} = \frac{(1-\beta) + (1+\beta) \exp(2ik_1 h \sin e_1)}{(1+\beta) + (1-\beta) \exp(2ik_1 h \sin e_1)} \quad \dots\dots\dots (2.10)$$

ここに，

$$\beta = \frac{\rho_1 c_1 \sin e_1}{\rho_2 c_2 \sin e_2} \quad \dots\dots\dots (2.11)$$

(2.11) 式で表わされる  $\beta$  は，それぞれの振幅の大きさを決定するパラメーターであり，構成地盤の弾性が異なることによる逸散減衰効果に関係してくる物理量であり，隣接地盤への波動の通過に対する抵抗を表わす振動インピーダンスである。表層地盤内での変位  $v_1$  を，表層地盤のせん断 1 次固有円振動数  $\omega_g$  を用いて表示すると

$$v_1 = \frac{2A_0 \cos\left(1 - \frac{z}{h}\right)}{\sqrt{\cos^2 q + \beta^2 \sin^2 q}} \exp\{i(k_1 x \cos e_1 - \omega t + \gamma)\} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

ここに，

$$q = \frac{\omega}{\omega_g} \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \cos^2 e_2} \quad \dots\dots\dots (2.13)$$

$$\tan \gamma = \beta \cdot \tan\left(\frac{\omega}{\omega_g} \frac{\pi}{2} \sin e_1\right) \quad \dots\dots\dots (2.14)$$

(2.12) 式の時間項からも明らかなように，基盤に，ある入射角をもって入って来た波は，表層地盤表面と不連続面との間に重複反射現象を生じるだけでなく，水平方向 ( $x$  方向) に波動が伝播する結果となる。これは，不連続面への波動の到達時間に遅れが生じ，見かけ上の伝播現象が起るものと考えられる。その伝播速度  $c_a$  は (2.12) 式の時間項を検討することによって，次のように求められる。

$$c_a = \frac{c_2}{\cos e_2} = \frac{c_1}{\cos e_1} \dots \dots \dots (2.15)$$

しかして、 $0 \leq \cos e_1 \leq 1$  であることにより、この水平方向への波の伝播速度は、表層での横波の伝播速度  $c_1$  よりも大きい速度を有していることが知られる。また、鉛直下方から入射する場合、 $e_2 = \pi/2$  となり、 $c_a$  の値は無限大となる。これは、境界面に到達する波動に位相差がなく、表層地盤が、各地点で同一の運動をしていることを示している。

このような波動は、表層地盤内では、水平方向に伝播するのと同様の効果をもち、その進行方向と運動方向に関しては、表面波である Love 波と同様な関係にある。

Fig. 2(a)~(d) は、地表面における変位振幅の周波数特性を横波の速度比  $c_1/c_2$  および射出角  $e$  をパラメーターにとって示したものである。基盤での横波速度が表層地盤での横波速度に近づくほど、変位振幅は小さくなり、減衰効果が大きく現われることが知られる。また、射出角が小さくなれば、表層地盤内へ屈折してくる波の割合が減少し、地表面での振幅も減少してくる。Fig. 3 は、表層地盤での鉛直方向の振動形状を周波数をパラメーターにとって示したものである。鉛直下方から入射する場合は、 $\omega/\omega_0 = 1, 3, 5$  の共振振動数では、 $z=0$  で変位がゼロとなるが、図では  $e = \pi/6$  であることによって、 $z=0$  で有限の値をもってくる。

## 2.2 構造物による波の散乱

Fig. 1 のように、基盤からある入射角をもって伝播してくる SH 波を考えると、前節で調べたように、表層地盤内においては、波動は、構造物の側方から入射することになり、構造物によって散乱現象を受けることになる。

本節では、このような場合について、構造物周辺の地盤の動きと、構造物に作用する震動圧を求める。(2.12) 式で表わされる表層地盤内の変位振幅を次のように表示する。

$$v_1 = V(z) e^{ik(x - c_a t)} \dots \dots \dots (2.16)$$

ここに、

$$V(z) = \frac{2A_0 \cos\left(1 - \frac{z}{h}\right) \cdot e^{iz}}{\sqrt{\cos^2 q + \beta^2 \sin^2 q}} \dots \dots \dots (2.17)$$

(2.16) 式を極座標を用いて表わすと、

$$v_1 = V(z) e^{ik(r \cos \theta - c_a t)} \dots \dots \dots (2.18)$$

Jacobi の展開法<sup>6)</sup>を用い、(2.18) 式を半径方向の変位成分  $v_1^r$  と接線方向の変位成分  $v_1^\theta$  として表示すると、

$$v_1^r = V(z) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{m-1} \cdot m \cdot \frac{J_m(kr)}{kr} \cdot \sin m\theta \cdot e^{-ikc_a t} \dots \dots \dots (2.19)$$

$$v_1^\theta = V(z) \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \cdot i^{m-1} \cdot \frac{\partial J_m(kr)}{\partial(kr)} \cdot \cos m\theta \cdot e^{-ikc_a t} \dots \dots \dots (2.20)$$

ただし、

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \neq 0) \end{cases} \dots \dots \dots (2.21)$$

$J_m(z)$  は  $m$  次の Bessel 関数。

一方、構造物によって散乱される波動について考えると、SH 波が入射する場合には、構造物によって、SH 波、P 波が散乱される。これらの波動は、円筒座標で表わされた波動方程式を満足し、散乱波による地盤内変位は、それらの和として示される。半径方向、接線方向の変位成分をそれぞれ  $u^r, u^\theta$  とすれば、

$$u^r = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{n,i} \cdot n \cdot \frac{H_n^{(1)}(k^*r)}{r} + B_{n,i} \cdot \frac{\partial H_n^{(1)}(h^*r)}{\partial r} \right\} \cdot \sin \alpha_i z \cdot \sin n\theta \cdot e^{-i\omega t} \dots \dots \dots (2.22)$$

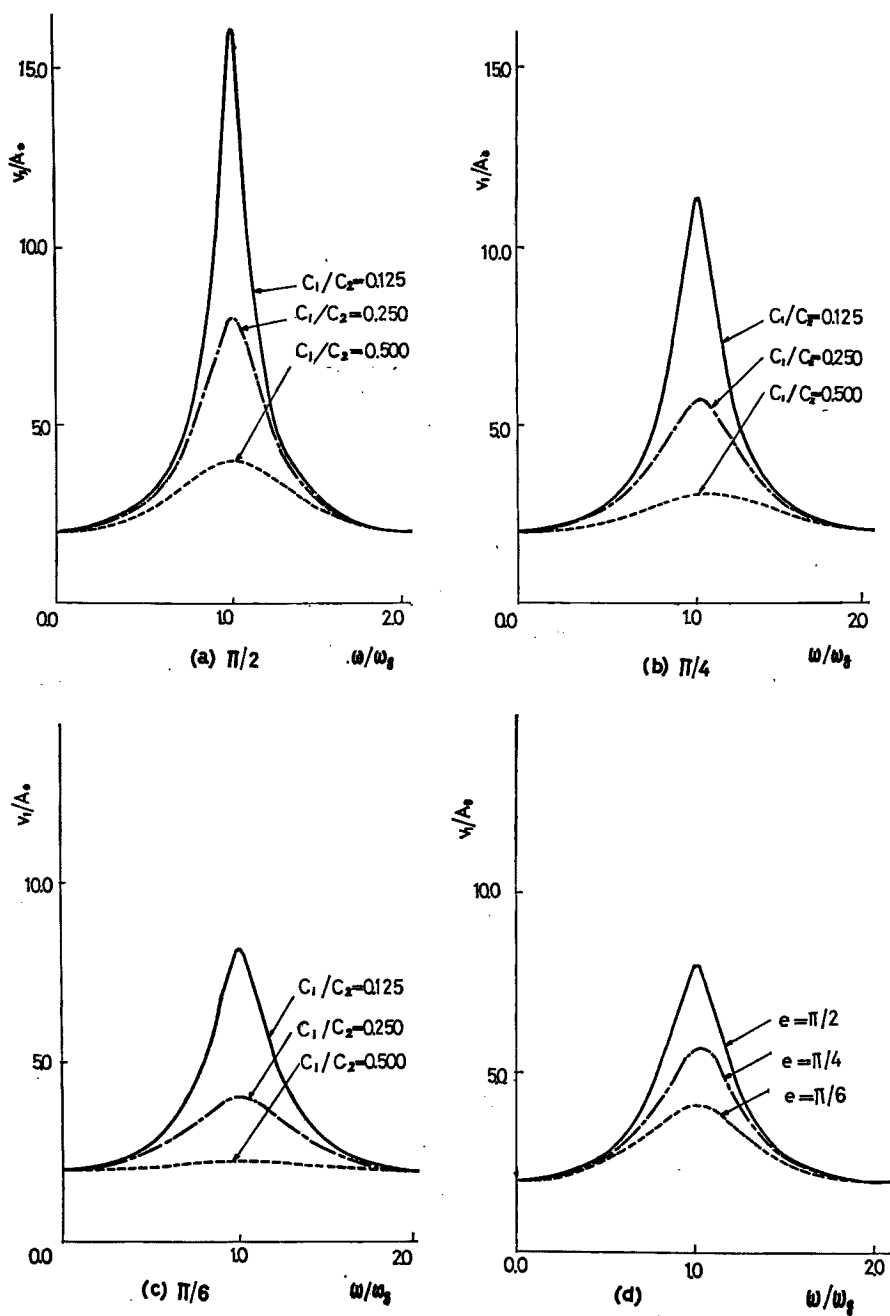
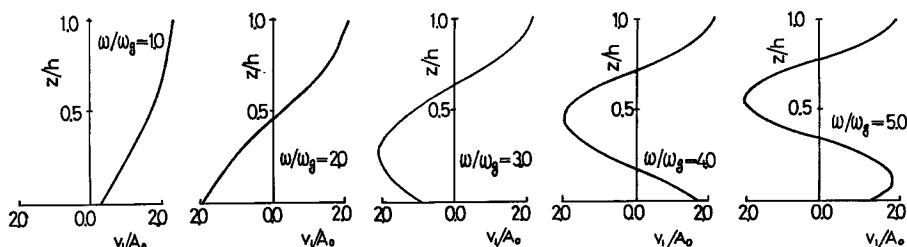


Fig. 2 Resonance curves of surface layer.

Fig. 3 Vibrational mode of surface layer. ( $e = \pi/6$ )

$$u^{\theta} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{n,l} \frac{\partial H_n^{(1)}(k^*r)}{\partial r} + B_{n,l} \cdot n \cdot \frac{H_n^{(1)}(h^*r)}{r} \right\} \cdot \sin \alpha_l z \cdot \cos n\theta \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.23)$$

ここに,

$$k^* = \left( \frac{\pi}{2h} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 - (2l-1)^2 \left( 1 + i2h_g \frac{\omega}{\omega_g} \right) \right\} \quad (2.24)$$

$$h^* = \left( \frac{\pi}{2h} \right)^2 \left( \frac{v_t}{v_l} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right)^2 - (2l-1)^2 \left( 1 + i2h_g \frac{\omega}{\omega_g} \right) \right\} \quad (2.25)$$

$$\omega_g = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v_t}{h} \quad (2.26)$$

$$\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2h} \quad (l=1, 2, 3, \dots) \quad (2.27)$$

$H_n^{(1)}(x)$ :  $n$  次の第 1 種 Hankel 関数

$h_g$ : 地盤の減衰定数

Fig. 1 のように、半径  $a$  の剛な円柱型基礎構造物が、基盤上に直立している場合について考えると、構造物の半径方向、接線方向の変位をそれぞれ  $v_s^r, v_s^{\theta}$  として、変位の連続性から次の境界条件式が成立する。

$$(v_1^r)_{r=a} = (u^r)_{r=a} = v_s^r \quad (2.28)$$

$$(v_1^{\theta})_{r=a} = (u^{\theta})_{r=a} = v_s^{\theta} \quad (2.29)$$

ここでは、剛な構造物について考えているので、 $v_s^r, v_s^{\theta}$  については、構造物と基盤との結合点での基盤の動きに等しくなる。いま、基盤面上の座標原点の動きに  $v_s^r, v_s^{\theta}$  が等しいとして解析を進めていくことにすると、

$$v_s^r = (v_1^r)_{r=0} \quad (2.30)$$

$$v_s^{\theta} = (v_1^{\theta})_{r=0} \quad (2.31)$$

この境界条件を用いることによって、 $A_{n,l}, B_{n,l}$  が決定される。まず、時間項を比較することによって、

$$\omega = k \cdot c_a \quad (2.32)$$

また、三角関数の直交条件より

$$m = n \quad (2.33)$$

$$I_l^* = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{2 \cos \left\{ \frac{\omega}{\omega_g} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \cos^2 e_2} \right\} \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \sin \alpha_l z \cdot dz}{\sqrt{\cos^2 \left\{ \frac{\omega}{\omega_g} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \cos^2 e_2} \right\} + \beta^2 \sin^2 \left\{ \frac{\omega}{\omega_g} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \cos^2 e_2} \right\}}} \quad (2.34)$$

$$I_l^r = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{2 \cos \left\{ \frac{\omega}{\omega_g} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \cos^2 e_2} \right\} \cdot \sin \alpha_l z \cdot dz}{\sqrt{\cos^2 \left\{ \frac{\omega}{\omega_g} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \cos^2 e_2} \right\} + \beta^2 \sin^2 \left\{ \frac{\omega}{\omega_g} \cdot \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \cos^2 e_2} \right\}}} \quad (2.35)$$

とすれば、 $A_{n,i}$ ,  $B_{n,i}$  は次のように求まる。

$$A_{n,i} = \frac{2A_0}{\Omega_n(k^*, h^*)} \left[ I_l^* \varepsilon_n i^{n-1} \left\{ \frac{\partial H_n^{(1)}(h^*a)}{\partial a} \cdot \frac{\partial J_n(ka)}{\partial(ka)} - n^2 \frac{H_n^{(1)}(h^*a)}{a} \cdot \frac{J_n(ka)}{ka} \right\} \right. \\ \left. - I_l^* \delta_{n,i} \left\{ \frac{\partial H_n^{(1)}(h^*a)}{\partial a} - n \frac{H_n^{(1)}(h^*a)}{a} \right\} \right] \dots\dots\dots (2.36)$$

$$B_{n,i} = \frac{2A_0}{\Omega_n(k^*, h^*)} \left[ I_l^* \varepsilon_n i^{n-1} \left\{ \frac{\partial H_n^{(1)}(k^*a)}{\partial(k^*a)} \cdot n \cdot \frac{J_n(ka)}{ka} - n \frac{H_n^{(1)}(k^*a)}{a} \cdot \frac{\partial J_n(ka)}{\partial(ka)} \right\} \right. \\ \left. - I_l^* \delta_{n,i} \left\{ \frac{\partial H_n^{(1)}(k^*a)}{\partial a} - n \frac{H_n^{(1)}(k^*a)}{a} \right\} \right] \dots\dots\dots (2.37)$$

ここに、

$$\Omega_n(k^*, h^*) = n^2 \frac{H_n^{(1)}(k^*a) H_n^{(1)}(h^*a)}{a^2} - \frac{\partial H_n^{(1)}(k^*a)}{\partial a} \cdot \frac{\partial H_n^{(1)}(h^*a)}{\partial a} \dots\dots\dots (2.38)$$

$$\delta_{n,i} = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 0 & (n \neq 1) \end{cases} \dots\dots\dots (2.39)$$

次に、入射波および散乱波による半径方向応力と接線方向応力  $\sigma_1, \tau_1; \sigma_s, \tau_s$  を求めると次のようになる。

$$\sigma_1 = 2\mu V(z) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot i^{m-1} \cdot \sin m\theta \cdot \frac{m}{kr} \left\{ \frac{\partial J_m(kr)}{\partial r} - \frac{J_m(kr)}{r} \right\} e^{-ikc_a t} \dots\dots\dots (2.40)$$

$$\tau_1 = \mu V(z) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot i^{m-1} \cdot \cos m\theta \left\{ \frac{2m^2}{kr^2} J_m(kr) - 2 \frac{\partial J_m(kr)}{kr \cdot \partial r} - k J_m(kr) \right\} e^{-ikc_a t} \dots\dots\dots (2.41)$$

$$\sigma_s = -\sigma_1 - (\lambda + 2\mu) \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,l} h^{*2} H_m^{(1)}(h^*a) \cdot \sin \alpha_l z \cdot \sin m\theta \cdot e^{-ikc_a t} \dots\dots\dots (2.42)$$

$$\tau_s = -\tau_1 - 2\mu V(z) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot i^{m-1} \cdot \cos m\theta \cdot k J_m(ka) e^{-ikc_a t} \\ - \mu \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,l} k^{*2} H_m^{(1)}(k^*a) \cdot \sin \alpha_l z \cdot \cos m\theta \cdot e^{-ikc_a t} \dots\dots\dots (2.43)$$

(2.42) 式、(2.43) 式からも 明らかなように、半径方向応力、接線方向応力とも 散乱波の中には、入射波による応力と大きさが等しく、異符号の項が含まれている。このことは、入射波が構造物表面上で完全反射をしていることを示している。Fig. 4 は構造物表面での半径方向応力、接線方向応力の円周方向について

の分布を示したものである。射出角が  $\pi/4$ 、周波数  $\omega/\omega_0$  が 0.5, 4 の場合についての結果であり、半径方向応力については、波動の進行方向と  $\pi/4$  の方向においてその最大値をもち、振動方向およびそれに直角の方向ではゼロとなっている。また、接線方向応力については、波動の進行方向にその最大値を有し、 $\pi/4$  の方向では最小値をとっている。また、周波数が異なっても応力の分布形状にはほとんど差がないことが知られる。

次に、構造物の単位長さなりに作用する震動圧を求め、 $x, y$  成分をそれぞれ  $F_x, F_y$  とすれば、

$$F_x = \int_0^{2\pi} (\sigma \cos \theta - \tau \sin \theta) a d\theta \dots\dots\dots (2.44)$$

$$F_y = \int_0^{2\pi} (\sigma \sin \theta + \tau \cos \theta) a d\theta \dots\dots\dots (2.45)$$

ここに、 $\sigma, \tau$  は入射波と散乱波による応力の和を示したものである。(2.42) 式、(2.43) 式より 求められる応力を (2.44) 式に代入すれば

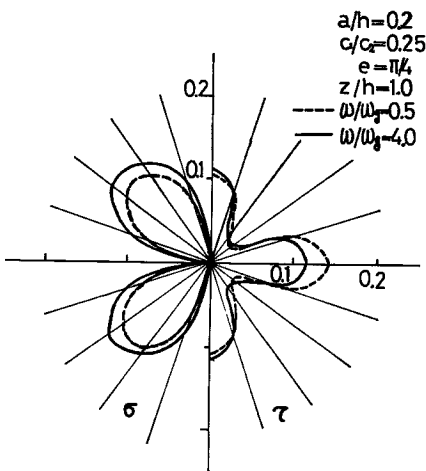


Fig. 4 Stress distribution curve.

$$F_x \equiv 0 \dots\dots\dots (2.46)$$

すなわち、波動の進行方向には地震力が作用しないことになる。また、

$$\begin{aligned} \frac{F_y}{\rho g \pi a^2} = & A_0 \omega^2 \left[ 4 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left( \frac{c_1}{c_2} \right) \cos e_2 \cdot \frac{e^{i\tau} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{c_1}{c_2} \right)^2 \cos^2 e_2} \left( 1 - \frac{z}{h} \right) J_1(ka)}{\sqrt{\cos^2 q + \beta^2 \sin^2 q}} \right. \\ & \left. - 2 \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ (2l-1)^2 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right\} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \{ 2I_l^* \Phi_l^* - I_l^* \Phi_l^* \cdot \sin \alpha_l z \} \cdot e^{-i\omega t + \tau} \dots\dots (2.47) \right] \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Phi_l^* = & \frac{\frac{\partial J_1(ka)}{\partial(ka)} \cdot \frac{H_1^{(1)}(k^*a)}{k^*a} \left\{ \frac{\partial H_1^{(1)}(h^*a)}{\partial(h^*a)} - \frac{H_1^{(1)}(h^*a)}{h^*a} \right\} + \frac{J_1(ka)}{ka} \cdot \frac{H_1^{(1)}(h^*a)}{h^*a} \left\{ \frac{\partial H_1^{(1)}(k^*a)}{\partial(k^*a)} - \frac{H_1^{(1)}(k^*a)}{k^*a} \right\}}{\frac{H_1^{(1)}(k^*a)}{k^*a} \cdot \frac{H_1^{(1)}(h^*a)}{h^*a} - \frac{\partial H_1^{(1)}(k^*a)}{\partial(k^*a)} \cdot \frac{\partial H_1^{(1)}(h^*a)}{\partial(h^*a)}} \dots\dots (2.48) \\ \Phi_l^* = & \frac{\frac{\partial H_1^{(1)}(h^*a)}{\partial(h^*a)} \cdot \frac{H_1^{(1)}(k^*a)}{k^*a} + \frac{\partial H_1^{(1)}(k^*a)}{\partial(k^*a)} \cdot \frac{H_1^{(1)}(h^*a)}{h^*a} - 2 \frac{H_1^{(1)}(h^*a)}{h^*a} \cdot \frac{H_1^{(1)}(k^*a)}{k^*a}}{\frac{H_1^{(1)}(k^*a)}{k^*a} \cdot \frac{H_1^{(1)}(h^*a)}{h^*a} - \frac{\partial H_1^{(1)}(k^*a)}{\partial(k^*a)} \cdot \frac{\partial H_1^{(1)}(h^*a)}{\partial(h^*a)}} \dots\dots (2.49) \end{aligned}$$

(2.47) 式の第 1 項は、見かけ上、表層内を伝播する波動が構造物に及ぼす震動圧であるが、この値は、Bessel 関数を近似展開することによって検討した結果、第 2 項の値と比較してかなり小さな値である。このことは、表層地盤の運動が位相差をもつことによって構造物の震動圧に及ぼす影響は小さいことを示している。また、第 2 項は散乱波によって構造物に引き起される震動圧を表わしている。Fig. 5(a) は  $|F_y/\rho\pi a^2 A_0 \omega^2|$  を射出角をパラメーターとして示したものであり、図中の破線は、基盤が剛であって、鉛直下方より波動が入射して基盤面の全域が一様に震動する場合についての震動圧を求めたものである。基盤が弾性を有することによって、共振点では、いずれも地下逸散減衰効果が見られ、震動圧は有限の値をとってくる。さらに、射出角が小さくなれば、表層内へ屈折する波動が減少するために、構造物に作用する震動圧も小さくなっている。Fig. 5(b) は、表層地盤内と基盤での横波速度の比をパラメーターにとって震動圧を求めたものである。速度比が 1 に近づくほど、共振点での値は小さくなっているのがわかる。Fig. 2 で見たように、表層内での変位振幅は構造物のない場合、共振次数にかかわらず一定であるが、震動圧は、高次共振次数ほど、その共振点での値が低下している。このことは、構造物の振動によって、側方への波動伝播が生じ、エネルギーの逸散が行なわれていることを示している。Fig. 6 は、震動圧の鉛直方向の分布を示したものである。周波数によって、震動圧の分布形状は異なっており、Fig. 3 に示した表層地盤の振動形状に支配されていることが知られる。

### 3. 地中構造物の弾性振動

Fig. 7 のように、基盤に支持された円柱型基礎構造物が表層地盤を貫いて、さらに、その頂部が空中に突き出ており、曲げ振動をする場合を対象として振動解析を行なう。構造物のたわみを  $f(z, t)$  とすると、次の曲げ振動の運動方程式を満足する必要がある。

$$\frac{\gamma_p A}{g} \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 f(z, t)}{\partial z^4} + \nu' \frac{\partial^5 f(z, t)}{\partial t \partial z^4} = F(z, t, f) \dots\dots (3.1)$$

ここに、 $\gamma_p/g$  は構造物の密度、 $A$  は断面積、 $EI$  は曲げ剛性、 $\nu'$  は粘性減衰係数である。また、 $F(z, t, f)$  は、構造物に作用する外力であり、場所、時間、構造物のたわみの関数となっている。Fig. 7 に示すようなモデルの場合には、 $0 \leq z \leq h$  については、 $F(z, t, f)$  は構造物に作用する震動圧となり、 $h < z \leq l$  ではゼロの値をもつ関数である。

いま、 $z=\xi$  の点に単位の大さきの時間的に定常な集中力が作用している場合について考えると、そのときの構造物のたわみを  $f^*(z, t)$  とすれば、

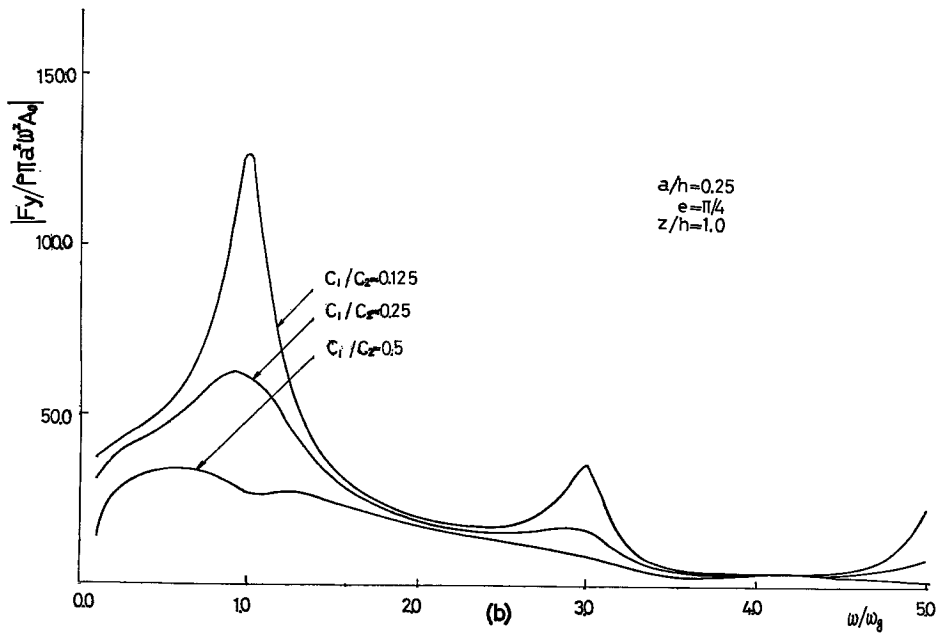
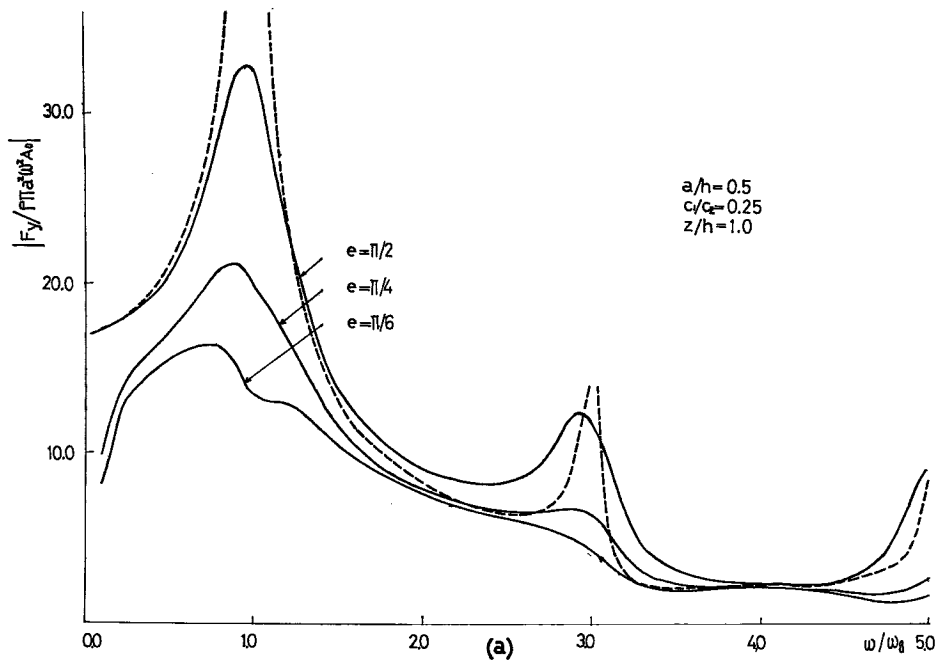


Fig. 5 Resonance curves of earth pressure.

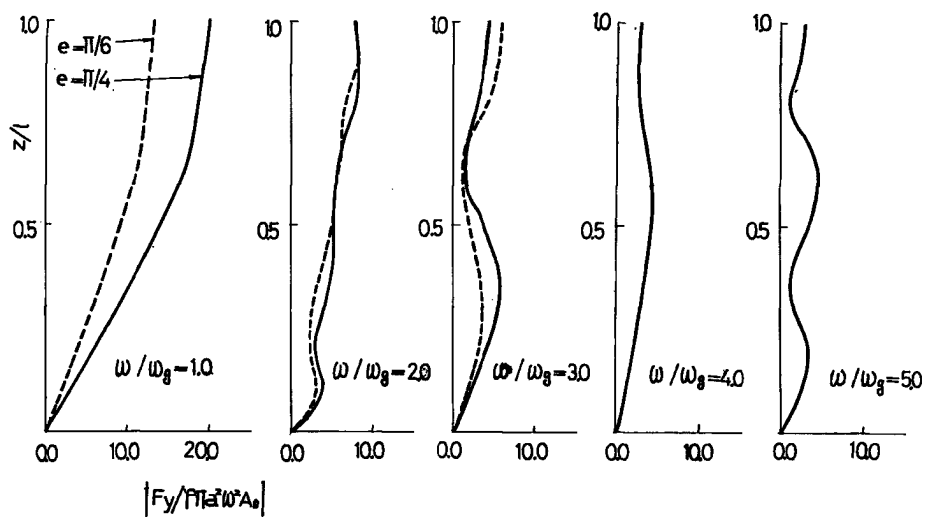


Fig. 6 Pressure distribution curve of surface layer.

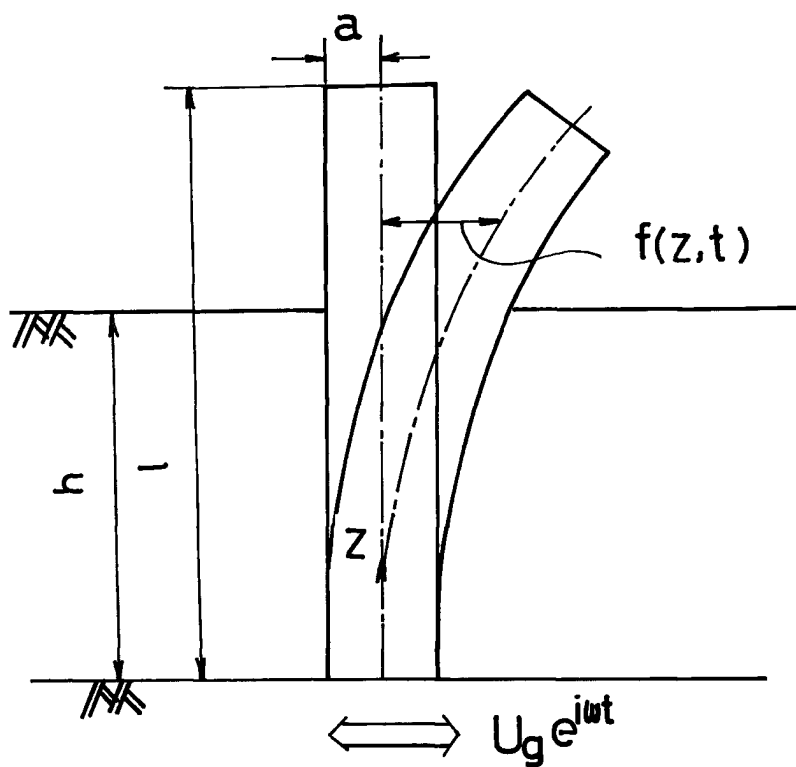


Fig. 7 Model of system.

$$\frac{\gamma_p A}{g} \frac{\partial^2 f^*}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 f^*}{\partial z^4} + \nu' \frac{\partial^2 f^*}{\partial t \partial z^4} = \delta(z - \xi) e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

ここに、 $\delta(z - \xi)$  は Delta 関数である。

次に、 $f^*(z, t)$  の形を次のように仮定する。

$$f^*(z, t) = G(z, \xi) e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

$G(z, \xi)$  は、 $z = \xi$  に単位の集中荷重が作用したときの、任意の位置  $z$  での変位を表わす関数である。この  $G(z, \xi)$  を空中における片持ばりの曲げ振動に関して、正規化された直交関数  $\eta(k_\mu z)$  で次式のように展開する。

$$G(z, \xi) = \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \cdot \eta(k_\mu z) \quad (3.4)$$

上式の  $\eta(k_\mu z)$  は次の曲げ振動の方程式を満足する。

$$\frac{d^4 \eta(k_\mu z)}{dz^4} - k_\mu^4 \eta(k_\mu z) = 0 \quad (3.5)$$

ここに、

$$k_\mu^4 = \frac{\omega_{s\mu}^2 \gamma_p A}{EI g} \quad (3.6)$$

$\omega_{s\mu}$ : 片持ばりの  $\mu$  次の固有円振動数

$\eta(k_\mu z)$  の直交性と Delta 関数の性質を用いることによって、(3.4) 式の係数  $A_\mu$  が決定され、結局、 $G(z, \xi)$  は次の形で与えられる。

$$G(z, \xi) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} \frac{\eta(k_\mu \xi) \cdot \eta(k_\mu z)}{(EI + i\omega \nu') k_\mu^4 - \frac{\gamma_p A \omega^2}{g}} \quad (3.7)$$

また、構造物に作用する震動圧が

$$F(z, t, f) = F^*(z, f) e^{i\omega t} \quad (3.8)$$

で表わされるときは、(3.1) 式の解は次のように書ける。

$$f(z, t) = \int_0^l G(z, \xi) \cdot F^*(z, f) d\xi e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

(3.9) 式が解であることは、もとの曲げ振動の (3.1) 式に代入することによって容易に知られる。(3.9) 式は、積分項の中に、未知数である  $f^*(z)$  が含まれており、Fredholm 第 2 種積分方程式となっている。前節の結果にもとづいて、基盤が剛であり、鉛直下方よりせん断波が入射し、基盤面上の全域が一様に振動している場合について、 $F^*(z, f)$  を具体的に表示すれば、

$$F^*(z, f) = \rho \pi a^2 \omega^2 \left[ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{h} \int_0^h f^*(\xi) \sin \alpha_l \xi \cdot d\xi \left\{ 1 - \left( \frac{\alpha_l v_l}{\omega} \right)^2 \right\} \cdot \Phi_l^f \cdot \sin \alpha_l z \right. \\ \left. - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2u_g}{\alpha_l h} \Phi_l^f \sin \alpha_l z \right] + \frac{\gamma_p A \omega^2}{g} \cdot u_g \quad (3.10)$$

さらに、 $f^*(z)$  を固有関数  $\eta(k_\mu z)$  で展開し、次のように書き表わす。

$$f^*(z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu \cdot \eta(k_\mu z) \quad (3.11)$$

(3.10) 式、(3.11) 式を (3.9) 式に代入すれば、未定係数  $B_\mu$  は次式を満足する。

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[ \left\{ \left( \frac{\omega_{s\mu}}{\omega} \right) + i 2 \cdot h_p \cdot \frac{\omega_{s\mu}}{\omega} - 1 \right\} \delta_{\mu, \nu} - \Omega_{\mu\nu} \right] \cdot B_\nu = u_g \Omega_\mu \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.12)$$

ここに、

$$\omega_{s\mu}^2 = \frac{EI k_\mu^4}{\rho_p A} \quad (3.13)$$



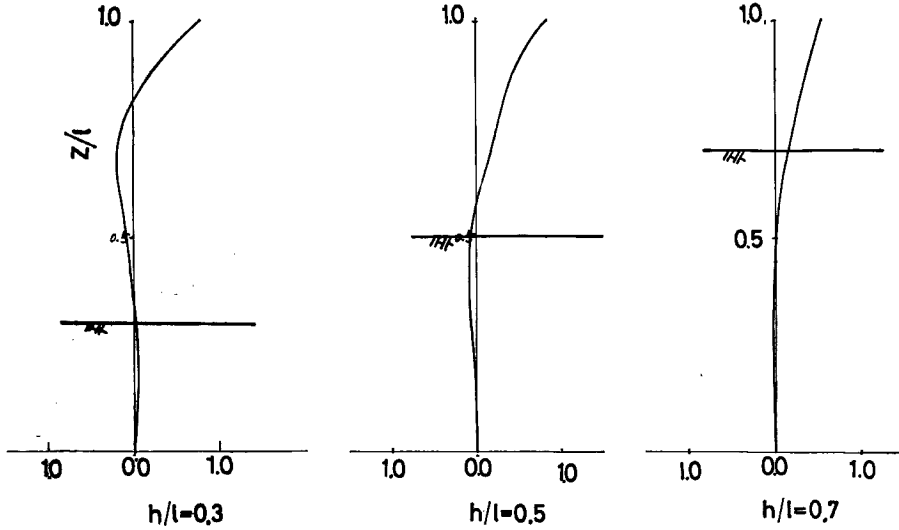


Fig. 9 Deflection curve of structures.

さらに、 $\omega^2 \Omega_{\mu\nu}$  を実数部  $R^*$  と虚数部  $I^*$  に分離して次のように表わすことにする。

$$\omega^2 \Omega_{\mu\nu} = R^*(\omega) + i I^*(\omega) \quad (3.18)$$

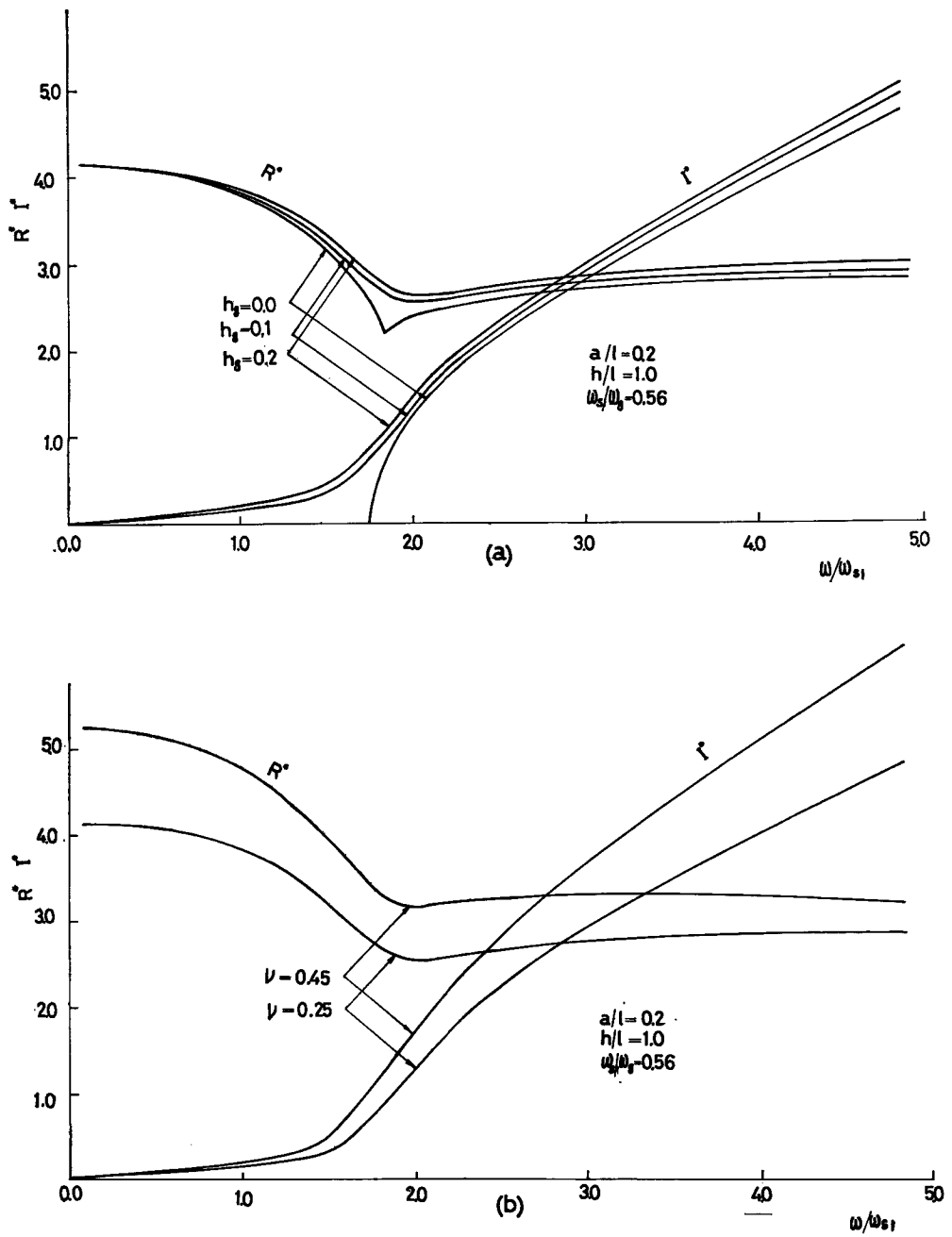
いま、 $\mu=\nu=1$  の場合について  $R^*$ 、 $I^*$  の周波数特性を図示すれば、Fig. 10 (a), (b) のように求められる。Fig. 10 (a) は地盤の粘性減衰定数  $h_g$  をパラメーターとしたものであり、Fig. 10 (b) は、地盤のポアソン比の影響を見たものである。 $R^*$  については、 $\omega/\omega_g=0$  で最大値を示し、 $0 \leq \omega/\omega_g \leq 1$  では徐々に減少する傾向にあるが、 $\omega/\omega_g > 1$  では周波数に対してほぼ一定の値をとる。減衰定数が大きくなれば、 $\omega/\omega_g=1$  付近での値が増加し、滑らかな曲線となってくる。次に、 $I^*$  については、減衰定数がゼロのときには、 $0 \leq \omega/\omega_g < 1$  では  $I^*$  の値がゼロとなるが、 $\omega/\omega_g \geq 1$  では周波数に関して直線的に増大する傾向にある。減衰定数が大きくなれば、 $0 \leq \omega/\omega_g < 1$  の周波数領域でも有限値をもち、やはり、周波数に1次比例的な割合で増大していく傾向が認められる。ポアソンが大きくなれば、 $R^*$ 、 $I^*$  いずれも、その値が増加し、周波数特性には大きな変化がない。

(3.18) 式を用いて、(3.16) 式を書き直すと次のように変形できる。

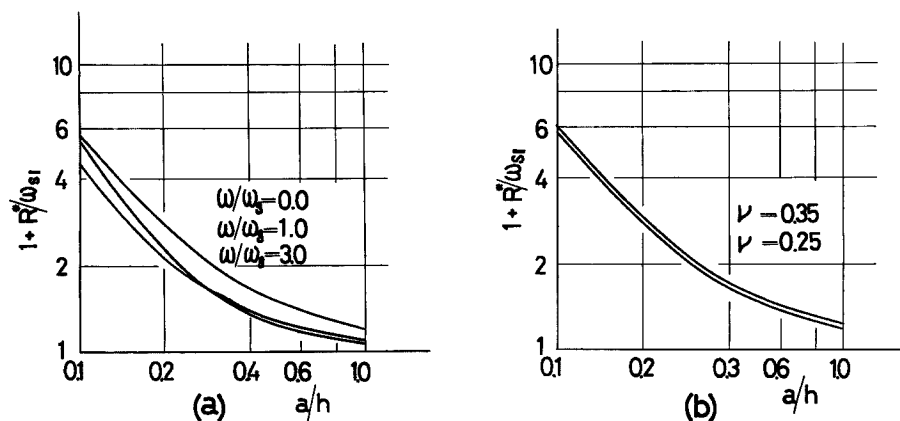
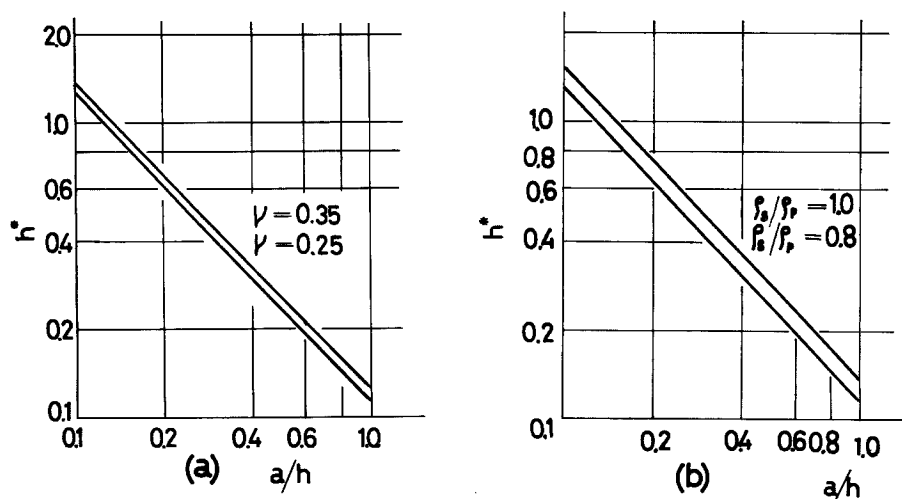
$$\left[ \omega_{s1}^2 + R^* + i \left\{ 2h_p \omega_{s1} + \frac{I^*}{\omega} \right\} \omega - \omega^2 \right] \cdot B_1 = u_g \omega^2 \Omega_1 \quad (3.19)$$

(3.19) 式は構造物の剛性が見かけ上  $EIR^*/\omega_{s1}^2$  だけ増加し、さらに、減衰定数も  $I^*/2\omega \cdot \omega_{s1}$  だけ増加したのと同等であるとみなすことができる。Fig. 11 (a), (b) は縦軸に  $(1+R^*/\omega_{s1}^2)$ 、横軸に構造物の半径  $a$  と地盤層の厚さ  $h$  との比  $a/h$  をとって、周波数およびポアソン比をパラメーターとして図示したものである。Fig. 10 で見たように、周波数による影響はきわめて小さい。 $a/h$  が小さい間は、見かけ上の剛性増加はかなり大きい、 $a/h \geq 0.2$  の範囲では、剛性増加と構造物の形状  $a/h$  とは、ほぼ反比例の関係となっている。Fig. 11 (b) にはポアソン比の影響を示しているが、値はほとんど変化せず若干大きくなっていることが知られる。

また、Fig. 12 には  $I^*/2\omega \cdot \omega_{s1}$  の値を図示した。Fig. 10 で示したように、 $I^*$  は周波数にほぼ1次比例的な関係にあるので、見かけ上の減衰定数の増加は、周波数にほぼ無関係な定数となってくる。Fig. 12 (a) は、ポアソン比を変化させて、減衰定数の増加値  $h^*$  と  $a/h$  の関係を両対数目盛で示したものである。 $h^*$  と  $a/h$  は反比例的な関係にあることが知られる。この図は、地盤の粘性減衰定数  $h_g$  がゼロのときの計算結果

Fig. 10 Resonance curves of  $R^*$ , and  $I^*$ .

であり、半無限地盤中にある 構造物振動における逸散減衰効果を量的に評価したものであるといえる。 $a/h$  が小さな値のところでは、 $h^*$  は 1.0 を越えており、波動の逸散による 構造物振動に 及ぼす減衰効果はかなり大きいことが知られる。ポアソン 比については、 $h^*$  の値にあまり 影響がなく、多少、その値が大きくなる程度である。Fig. 12 (b) には、構造物と地盤との密度比が見かけ上の減衰定数の増加に及ぼす影響を見たものであるが、構造物の形状に比較して、その影響は小さくなっている。すなわち、構造物や地盤の弾性 諸定数に関しては、あまり大きな影響はなく、地盤と構造物の接触する部分の面積と形状によって逸散減衰 の効果は支配されているといえる。このことは、田治見氏等<sup>7)</sup> によって研究されているように、地表面上に おかれた構造物の逸散減衰量が、構造物の重量と、地盤と構造物の接触面積のみによって決定されているこ とと同様の結果であると考えられる。

Fig. 11 Relation between increase of rigidity and  $a/h$ .Fig. 12 Relation between increase of critical damping ratio and  $a/h$ .

#### 4. 模型実験

前節の理論解に対する検討を試みるために、模型砂地盤中に構造物を埋め込み、振動実験を行なって、構造物の固有円振動数および減衰定数を推定した。構造物模型はメタクリル酸樹脂製で形状の異なる2種類を作製した。Table 1 にその断面形状、剛性を示す。Fig. 13 は実験装置を示したものである。振動台は、

Table 1 Dimensions of model.

|       |      | $a$ | $l$ | $a/l$ | $E$                         |
|-------|------|-----|-----|-------|-----------------------------|
| Model | M-I  | 35  | 500 | 0.70  | 27000<br>kg/cm <sup>2</sup> |
|       | M-II | 75  | 500 | 0.15  |                             |

(mm)

松平式振動試験機 UBC-10A 型を用い、その上に、砂槽を固定した。模型については、その下端を砂槽に固定し、上端にはマスを付加して固有円振動数の調整を行なった。さらに、構造物模型には、加振方向に 50 mm 間隔で 9 点に strain-gauge を貼りつけて、模型のひずみを測定できるようにした。砂地盤には、木津川産の乾燥砂を用い、その比重は 2.63、均等係数は 2.64 である。Fig. 14 には、粒径加積曲線を示す。砂地盤の締め固めは実験結果に重要な影響を与えるものと思われるので、加振締め固めの条件を一定とし、振動数 1,500 c.p.m. (25 c.p.s.), 振幅 0.3 mm, 10 分間継続加振とし、締め固め後、金属棒の引き抜きによって、締め固め程度をほぼ同一となるようにした。また、この砂地盤中に地表面下 10 cm, 砂槽の奥行きの中点、模型より 10 cm の位置に加速計をうめ込んで地盤自身の動きを計測できるようにした。

実験方法は、砂地盤層の厚さを 5 種類 (0, 20, 30, 40, 50 cm) に変化させ、それぞれの状態で自由振動実験と定常加振実験を行なった。自由振動実験では、模型頂部のマスに衝撃を与え、模型ひずみの自由振動記録をペンレコーダーで読みとるようにした。定常加振の実験では、アンバランスマスによる駆動方式で、500 c.p.m. ~ 2,500 c.p.m. まで 100 c.p.m. ごとに振動数をあげ、加振力一定の 150 gal として、それぞれの段階で、模型ひずみと地盤内加速度をペンレコーダーによって記録させた。

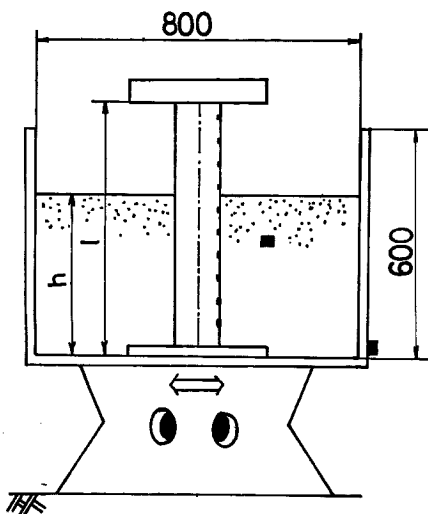


Fig. 13 Experimental devices.

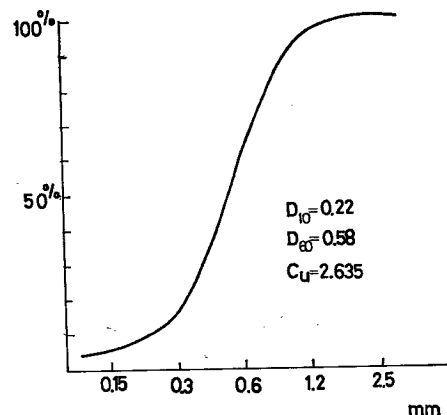


Fig. 14 Grain size distribution curve.

Table 2 Natural frequency and damping.

| $h/l$ | M- I       |       | M- II      |       |
|-------|------------|-------|------------|-------|
|       | $\omega_1$ | $h_p$ | $\omega_1$ | $h_p$ |
| 0.0   | 835        | 0.044 | 695        | 0.035 |
| 0.4   | 1165       | 0.074 | 857        | 0.065 |
| 0.6   | 1175       | 0.109 | 1164       | 0.088 |
| 0.8   | 2815       | 0.172 | 1680       | 0.155 |
| 1.0   | 4350       | 0.406 | 2640       | 0.276 |

( $\omega_1$ : c.p.m.)

Table 2 に自由振動記録より得られた 構造物模型の 固有円振動数および 減衰定数を示す。Table 2 における固有円振動数は中央の測点の 記録から求めたものである。また、 $h=50$  cm で模型が完全に 砂中に埋まっている場合には、減衰が大きいために、記録の読み取りが十分でなく、誤差も多少出てくるものと考えられる。Fig. 15 は定常加振実験によって得られた模型中央点でのひずみの周波数応答曲線である。これは模型 I(M-I) について示したものである。この図より明らかなように、地盤層が厚くなるほど、ひずみの共振振動数は増大しており、見かけ上、模型の剛性が増加したと考えられる現象を生じている。また、それぞれの共振点でのピーク値を見ると減衰定数も見かけ上、増加している。Table 2 の自由振動実験より求めた固有円振動数と Fig. 15 より求めた共振振動数とはほぼ対応していることが知られる。Fig. 16 は地盤内に埋め込んだ加速度計より得られた記録の周波数応答を示したものである。振動数 1,500 c.p.m. ぐらいまでは、ほぼ 180 gal 前後の一定の加速度を示しているが、振動数がそれ以上になれば、地盤層の大きい方から順に、層としての共振状態を生じている。地盤層の共振に対応する模型のひずみの状態は Fig. 15 で  $h=50$  cm の

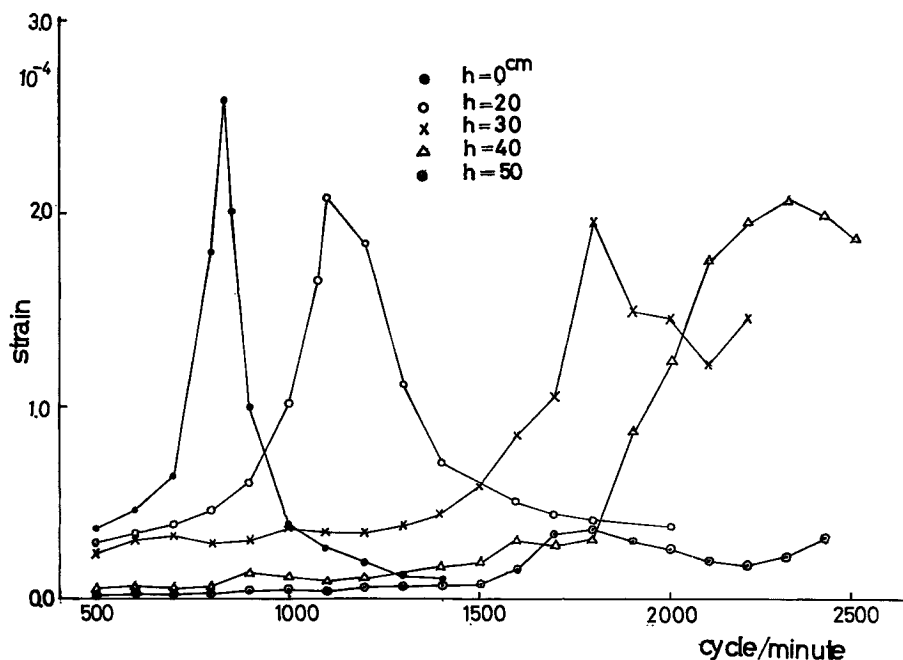


Fig. 15 Resonance curve of strain.

場合に見られるように、ピークを有し、模型の振動が地盤の運動に支配されていることが知られる。**Fig. 17** は各測点でのひずみを積分することによって得られた模型の変形状態を示したものである。共振振動数での状態を調べたものであるが、**Fig. 9** の理論解のところで検討したように、模型の地中部分の変形は著しく拘束されている様子がうかがわれる。このように、構造物周辺地盤が構造物の変形を拘束していることは、地盤は構造物振動にとって有利な方向に機能し、構造物自体の振動という立場から見れば、見かけ上、変形に関与する剛性が増大し、減衰が大きくなっていると見なすことができる。**Fig. 18** の破線は実験より得られた地盤の厚さと共振振動数との関係であり、縦軸は、 $h=0$  における共振振動数で除した値を用いている。また、実線は前節の理論解を用いて、剛性増加の観点より求めた固有円振動数の増大を示したものである。実験値と理論値はかなりの一致をみている。理論解に用いる弾性諸定数のとり方にも、多少、影響されるものと考えられるが、剛性増加量は **Fig. 11** にも示したように、地盤に接触している構造物の形状に最も左右されることから、定量的にも良い一致を示しているものと思われる。**Fig. 19** は  $h/l$  と減衰定数の増加の関係を図示したものである。破線は、自由振動実験から求めた減衰定数の値を示したものであり、実線は、理論解より求めたものである。図に見るように、実験値よりも理論値の方が大きい値となっている。これは、理論解は、逸散減衰を等価粘性減衰の形で評価した値であるが、実験では、砂槽を用いており、有限領域となっているので、反射波の影響があり、砂槽では定常波動が発生していることによる相異であろうと考えられる。 $h/l$  の増加に従って、減衰の値が増大しているのは、逸散減衰によるよりもむしろ、地盤層の増加による土粒子摩擦の増加などによる影響があると考えられる。

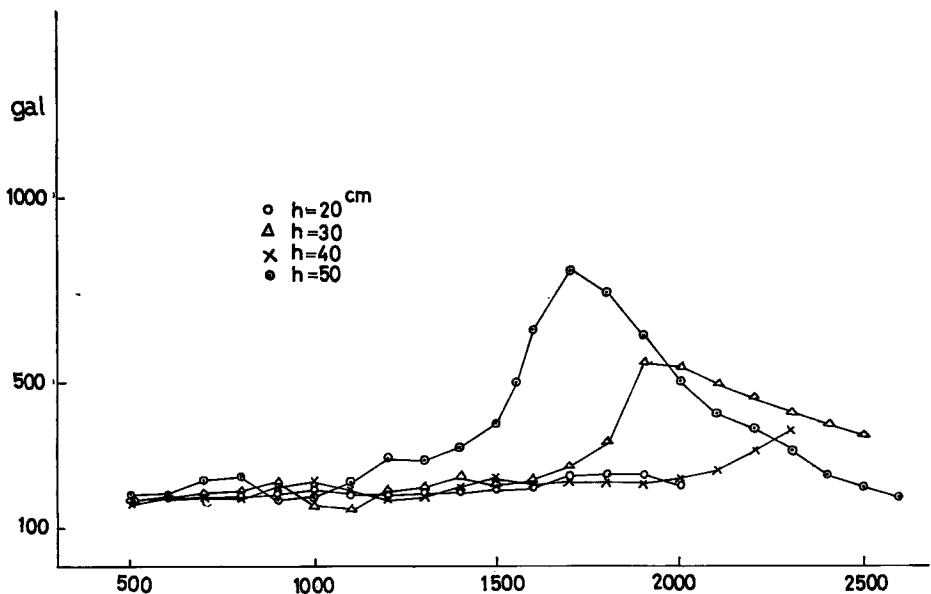


Fig. 16 Resonance curve of acceleration.

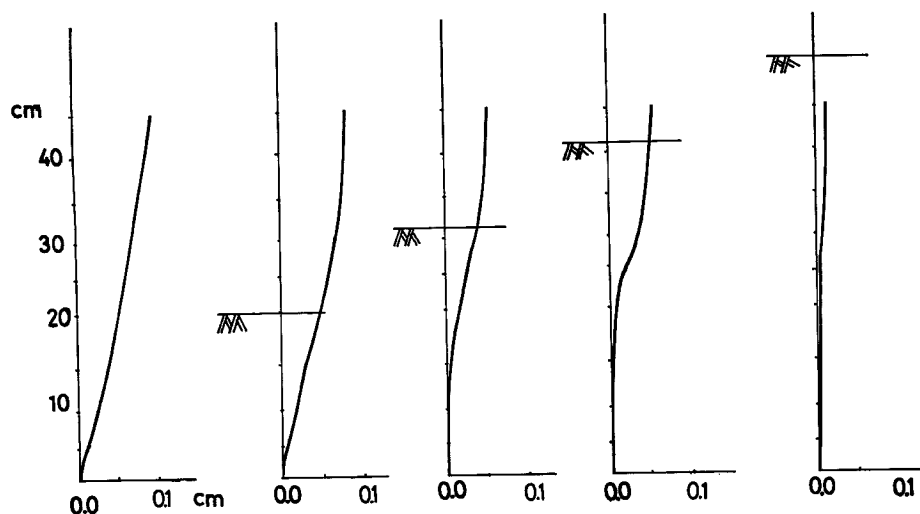
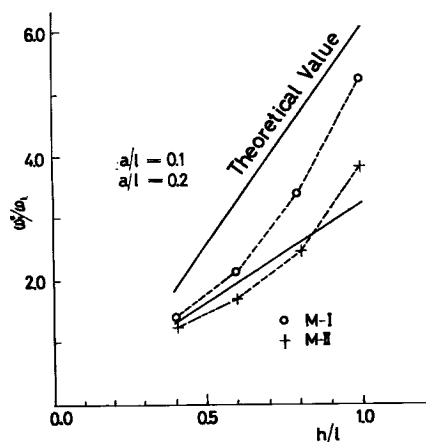
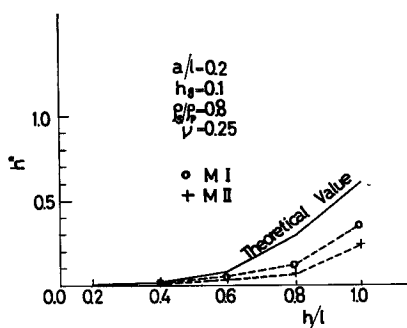


Fig. 17 Deflection curves of structure.

Fig. 18 Relation between  $h/l$  and resonance frequency.Fig. 19 Relation between  $a/h$  and increase of critical damping ratio.

## 5. 結 語

本研究では、基盤に支持され、表層地盤中に埋設されている円柱型基礎構造物を対象として、基盤—表層地盤—構造物を一体の連続弾性体としてとらえ、波動論の立場から、その振動解析を行ない、さらに、地中基礎構造物の振動特性について検討を加えた。本研究で得られた成果を要約すれば次のようである。

- 1) 波動が基盤から表層地盤へある入射角をもって、伝播してくる際には、基盤面上の各点で波動の到達時間に差があるために、表層地盤内では、見かけ上、側方への波動伝播が生じる。また、これらの波動が構造物によって散乱されることにより、構造物に及ぼす震動圧はかなり小さな値であることがわかった。
- 2) 表層地盤のみならず、基盤の弾性をも考慮して、剛構造物に作用する震動圧を求めた結果、基盤の弾性

によって、その値は著しく左右され、基盤と表層地盤との横波速度比にほぼ比例的であることが確かめられた。基盤—表層地盤—構造物の振動系を取り扱う際には、基盤の弾性を考慮して検討することが必要であると思われる。

- 3) 地中基礎構造物およびそれに連続している上部構造物の振動を一体的に取り扱う解析的な手法を示し、その振動特性について検討を加えた。その結果、地中部分の長さが支配的になれば、地盤の振動特性に大きく影響され、構造物固有の振動特性はあまり顕著でないことが明らかとなった。
- 4) 構造物に作用する震動圧は、地震動の周波数についてほぼ一定の値をもち、構造物の変形を拘束し、見かけ上は構造物の剛性を高める働きをもつと考えてよいようである。また、cut off frequency より大きい周波数の範囲では、波動伝播によって、逸散減衰効果を有し、この逸散減衰は等価粘性減衰として評価され、周辺地盤は見かけ上は構造物の減衰定数をも高める働きをもつものと考えられる。さらに、見かけ上の剛性と減衰定数の増加は、構造物の形状によって左右され、地中にある構造物の半径と高さの比にほぼ逆比例する傾向にある。
- 5) 模型実験を行なうことによって、地盤の見かけ上の剛性と減衰性の増加について検討を加え、剛性増加については、かなり良く理論解の結果を裏付けていることが知られた。しかし、減衰性の増加については、半無限領域を考慮した実験法によって、今後、検討していく必要があると思われる。
- 6) 地盤中にある構造物の周囲を取り巻く表層地盤は構造物に対しては、震動圧を及ぼすと同時に、見かけ上は構造物の剛性と減衰性を高める働きをもつという見方により、地中構造物を空中にある場合におきかえて、同様に扱い、その耐震設計について検討することが可能であると考えられる。

本研究における数値計算には、京都大学大型計算センター FACOM 230-60 を用いたことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) Penzien, J., R. A. Parmelee, C. F. Schreffey, B. H. Seed and G. R. Thiers: Seismic Effects on Structures Supported on Piles Extending through Deep Sensitive Clay, Institute of Engineering Research, University of California, SESM 64-2, 1964.
- 2) 田治見 宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学シンポジウム 講演集，昭 41. 10, pp. 255-257.
- 3) 鳥海 勲：Vibration in Foundation of Machines, Technology Report of Osaka University, No. 146, 1955, pp. 103-126.
- 4) 金井 清・小堀鐸二・蛭田捨太郎：建築大学，地震・振動学，彰国社，昭 43. 7, pp. 54-89.
- 5) 後藤尚男・土岐憲三・高田至郎：地盤と構造物基礎の地震応答，土木学会第 10 回地震工学シンポジウム，昭 44. 10, pp. 79-82.
- 6) 数学ハンドブック編集委員会編：理工学のための数学ハンドブック，丸善株式会社，昭 44. 10, pp. 195-214.
- 7) 田治見 宏：耐震理論に関する基礎的研究，東大生産報告，第 8 巻，60 号，昭 34. 4.