

Pseudo-differential Operators on Sobolev Space $H^{s,p}$, $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$

阪大. 理 熊ノ郷 準

§0. 序

Singular integral operators, 'SIO_p', の理論が常に L^p -空間, $1 < p < \infty$, 上で議論されて来たのに対し, Pseudo-differential operators, 'PsDO_p', の理論は主に L^2 -空間上で議論され, L^p -空間上での一般論はまだ出来ていないようである. この理由としては, PsDO_p の理論は Fourier 変換と Plancherel の公式が土台となっており, L^p -空間上, $p \neq 2$, ではこれが最早通用しないこと, 今一つは PsDO_p の algebra を考えると登場する '正則化作用素 (smoothing operators)' は $H^{s,2}$ -空間固有のもので, $H^{s,p}$ -空間, $p \neq 2$, では一般に L^p からそれ自身の有界作用素とさえなり得ない事実 (Hörmander [1], p. 106) に基づくと思われる.

筆者は最近の論文[4]に於て, Hörmander [2] の $S_{\rho,\delta}^m$ -class, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, の P_sDO_p が急減少函数族 $\mathcal{S}$ をそれ自身へ写す作用素として exact な (modulo class の現れない) algebra を作っていることを証明した. 一方 Kagan [3] は $\rho = 1$ に対する $S_{1,\delta}^0$ -class の P_sDO_p は L^p -空間, $1 < p \leq 2$, からそれ自身への有界作用素になっていることを証明している.

ここでは筆者[4]と Kagan [3]の結果を基にして, $H^{s,p}$ -空間, $1 < p < \infty$, 上で, $S_{1,\delta}^m$ -class の P_sDO_p の基礎的理論を展開したい. §1 では P_sDO_p の定義および本稿で必要とされる筆者[4]の結果を, ここで使いやすい形にして述べ, §2 では Kagan [3]の定理の証明(原論文では完全な形で与えられていない)と Hörmander [1]の方針に沿って行なう. §3 では本稿の主題である $H^{s,p}$ -理論を Kumano-go-Nagase [5]をもとに解説する. この節の定理 3.2 の系として Hörmander の問題頁 ([2], p.163) が典型的な $\rho = 1$ の場合には肯定的に解ける. しかし一般の $0 < \rho < 1$ の場合には表象 (symbol) が x に depend しない場合でさえも未解決のようである.

§1. $P_s D O_p$ の基本公式. $\mathcal{D}$ と $\mathbb{R}^n$ で定義された C^∞ -函数で、そのすべての微係数が有界となる函数族とし、 $\mathcal{D}'$ はその部分集合ですべての微係数が急減少するもの、全体とする. $\mathcal{D}'$ は $\mathcal{D}$ の共役空間を表わす.

$\mathcal{D}$ の元 $u(x)$ に対し、その Fourier 変換 $\hat{u}(\xi)$ と

$$\hat{u}(\xi) = \int e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx$$

で定義すると、その逆変換 $\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x)$ は

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](x) = \int e^{ix \cdot \xi} \hat{u}(\xi) d\xi$$

で定義される、 $\Rightarrow$ で

$$x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n, \quad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi, \quad i = \sqrt{-1}.$$

以下次のような記号を用いる.

非負整数を元とする多重指標 α

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

とて、

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \partial_{\xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad D_{x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_{\xi_j} = -i \frac{\partial}{\partial \xi_j},$$

($j = 1, \dots, n$)

$$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}, \quad \partial_\xi^\beta = \partial_{\xi_1}^{\beta_1} \dots \partial_{\xi_n}^{\beta_n}, \quad D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}, \quad D_\xi^\beta = D_{\xi_1}^{\beta_1} \dots D_{\xi_n}^{\beta_n},$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, \quad \langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad \xi^\beta = \xi_1^{\beta_1} \dots \xi_n^{\beta_n},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

$\alpha \geq \alpha'$ は $\alpha_j \geq \alpha'_j$, $j = 1, \dots, n$, と意味し
このとき $\binom{\alpha}{\alpha'} = \binom{\alpha_1}{\alpha'_1} \dots \binom{\alpha_n}{\alpha'_n}$, $\binom{\alpha_j}{\alpha'_j} = \frac{\alpha_j!}{\alpha'_j! (\alpha_j - \alpha'_j)!}$, $j = 1, \dots, n$.

さて, $u \in \mathcal{S}$ と実数 s に対して $\langle D_x \rangle^s u$ を

$$\langle D_x \rangle^s u(x) = \int e^{ix \cdot \xi} \langle \xi \rangle^s \hat{u}(\xi) d\xi$$

で定義し, norm $\|u\|_{s,p}$ を

$$\|u\|_{s,p} = \left\{ \int |\langle D_x \rangle^s u(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

で定義する. 明らかに $\langle D_x \rangle^s : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ は連続, 従って

$$\langle \langle D_x \rangle^s u, v \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \langle u, \langle D_x \rangle^s v \rangle, \quad u \in \mathcal{S}', v \in \mathcal{S}$$

によって, $\langle D_x \rangle^s : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ に一意的に拡張出来る. 特に $s = 2l$, $l = 1, 2, \dots$ のときは

$$\langle D_x \rangle^{2l} = (1 - \Delta_x)^l, \quad \Delta_x = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2.$$

Sobolev 空間 $H^{s,p}$, $1 < p < \infty$, s

$$\begin{aligned} H^{s,p} &= \{u \in \mathcal{S}' ; \langle D_x \rangle^s u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \{u \in \mathcal{S}' ; u = \langle D_x \rangle^{-s} u_0 \text{ for some } u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \end{aligned}$$

で定義する.

$$u \in H^{s,p}, \quad v \in H^{-s,p'}, \quad p^{-1} + p'^{-1} = 1, \quad \text{に対して}$$

その内積 (u, v) を

$$(u, v) = \int \langle D_x \rangle^s u(x) \cdot \overline{\langle D_x \rangle^{-s} v(x)} dx$$

で定義すると, $H^{s,p}$ と $H^{-s,p'}$ はこの内積によつて次の意味で互いに共役な関係にある:

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{s,p} \|v\|_{-s,p'}$$

かつ

$$\|u\|_{s,p} = \sup_{0 \neq v \in H^{-s,p'}} \left\{ \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{-s,p'}} \right\} = \sup_{0 \neq v \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{-s,p'}} \right\}.$$

$$H^{-\infty,p} = \bigcup_s H^{s,p}, \quad H^{\infty,p} = \bigcap_s H^{s,p}$$

と置く.

定義 1.1. $R_x^n \times R_\xi^n$ で定義された C^∞ 函数 $g(x, \xi)$ が次の条件を満たすとき, $g(x, \xi)$ を $S_{p,\delta}^m$ -class, $0 < p \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, の表象であるという: 任意の α, β に対し定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在して

$$(1.1) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m + \delta|\alpha| - p|\beta|}$$

を満たす.

表象 $g(x, \xi) \in S_{p,\delta}^m$ を持つ $\text{PsDO}_p \quad g(x, D_x): \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'$ を

$$(1.2) \quad g(x, D_x)u(x) = \int e^{ix \cdot \xi} g(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

で定義し $g(x, D_x) \in S_{p,\delta}^m$ と書く.

$$S^{-\infty} = \bigcap_m S_{1,0}^m (= \bigcap_m S_{p,\delta}^m), \quad S_{p,\delta}^\infty = \bigcup_m S_{p,\delta}^m$$

と置き, 対応する PsDO_p の class を, それぞれ

$$S^{-\infty}, S_{p,\delta}^\infty \quad \text{で表わす.}$$

われわれは, $S_{\rho, \delta}^0$ -class の $P_s D O_p$ が L^p を L^p へ有界に写すことを要求するが, 二のため Hörmander [2], p.163, の注意から $S_{1, \delta}^m$ -class 即ち $\rho = 1$ の場合のみを対象とする.

補題 1.1. (Hörmander). $\psi_0(\xi) \geq 0$ を, $\{\xi; \psi_0(\xi) > 0\}$ の測度が零でない有界可測函数とする. このとき, $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ なる任意の p に対して, $|\psi_p(\xi)| \leq \psi_0(\xi)$ なる可測函数 $\psi_p(\xi)$ が存在して, $\widehat{\Psi_p u}(\xi) = \psi_p(\xi) \hat{u}(\xi)$, $u \in \mathcal{S}$, で定義される作用素 Ψ_p は L^p からそれ自身への有界作用素に拡張出来ない.

今任意に R_ξ^n の点 ξ_0 を固定し, ξ_0 を中心とした半径 $d > 0$ の球の特性函数を $\psi_0(\xi)$ とすると, 対応する $\psi_p(\xi)$ の台はこの球に含まれかつ $|\psi_p(\xi)| \leq 1$. 従って Plancherel の定理を用いれば Ψ_p は $H^{-\infty, 2}$ から $H^{\infty, 2}$ へ写すことがわかり Ψ_p は $H^{s, 2}$ に於ける正則化作用素となる. このことは通常 $P_s D O_p$ の algebra で現れる正則化作用素は $H^{s, 2}$ -空間固有のもので一般の $H^{s, p}$ では L^p を L^p へ有界に写さないことも起こり得ることを示す.

補題 1.2 (Hörmander [1]). $\psi(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ が定数

B に対して

$$(1.3) \quad \int_{\frac{t}{2} \leq |\xi| \leq 2t} |t^{|\alpha|} \partial_\xi^\alpha \psi(\xi)|^2 d\xi / t^n \leq B^2, \quad 0 < t < \infty, |\alpha| \leq n$$

($n > n/2$, 整数)

を満たすとするとき, $\widehat{\Psi u}(\xi) = \psi(\xi) \widehat{u}(\xi)$ で定義される Ψ は, 有界作用素 $\Psi: L^p \rightarrow L^p$, $1 < p < \infty$, に拡張される.

系 1°. $S_{1,0}^0 \ni g(\xi)$ なら $g(\xi)$ は条件 (1.3) を満たす. 従って $g(D_x): L^p \rightarrow L^p$, $1 < p < \infty$, は有界.

系 2°. $s \leq s'$ なら $H^{s,p} \supset H^{s',p}$ かつ ある定数 $C_{s,s'}$ に対して

$$(1.4) \quad \|u\|_{s,p} \leq C_{s,s'} \|u\|_{s',p}, \quad u \in H^{s',p}.$$

注. $p=2$ の場合は Plancherel の定理より $C_{s,s'}=1$.

(証明) $u \in H^{s',p}$ のとき, $\langle D_x \rangle^s u = \langle D_x \rangle^{-(s'-s)} (\langle D_x \rangle^{s'} u)$ と書けば, $\langle \xi \rangle^{-(s'-s)} \in S_{1,0}^{-(s'-s)} \subset S_{1,0}^0$. 従って系 1° より $\|\langle D_x \rangle^s u\|_{L^p} \leq C_{s,s'} \|\langle D_x \rangle^{s'} u\|_{L^p} < \infty$.

補題 1.3 (Kumano-go [4]). i) $g_j(x, \xi) \in S_{1,\delta}^{m_j}$, $j=1,2$,

に対して

$$g(x, \xi) = \int \langle D_\xi \rangle^{n_0} g_1(x, \xi + \zeta) \left(\int e^{-i\zeta \cdot \xi} \langle \zeta \rangle^{-n_0} g_2(x + \zeta, \xi) d\zeta \right) d\xi$$

($n_0 \geq n+1$, 偶数)

とあるとき,

$$g(x, \xi) \in S_{1, \delta}^{m_1+m_2} \quad \text{かつ} \quad g(x, D_x) = g_1(x, D_x) g_2(x, D_x).$$

また 任意の N に対して, $R_N(x, \xi) \in S_{1, \delta}^{m_1+m_2-(1-\delta)N}$

が存在して,

$$g(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha g_1(x, \xi) (-i\partial_x)^\alpha g_2(x, \xi) + R_N(x, \xi)$$

と書ける.

$$\text{ii) } g(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m \quad \text{に対して,}$$

$$g^*(x, \xi) = \int \left(\int e^{-iz \cdot \xi} \langle z \rangle^{-n_0} \langle D_z \rangle^{n_0} \overline{g(x+z, \xi+\xi)} dz \right) d\xi$$

とすると, $g^*(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m$ かつ

$$(g(x, D_x)u, v) = (u, g^*(x, D_x)v), \quad u, v \in \mathcal{S}.$$

また 任意の N に対して, $R_N^*(x, \xi) \in S_{1, \delta}^{m-(1-\delta)N}$

が存在して

$$g^*(x, \xi) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} (-i\partial_x)^\alpha \partial_\xi^\alpha \overline{g(x, \xi)} + R_N^*(x, \xi)$$

と書ける.

補題 1.4 (Kumano-go [4]). $g(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m$ に対して,

定数 C, C' が存在して.

$$(1.5) \quad \|g(x, D_x)u\|_{s, 2} \leq C \|u\|_{s+m, 2}, \quad u \in H^{s+m, 2}$$

より詳しく

$$(1.6) \quad \|g(x, D_x)u\|_{s, 2} \leq \sup_{x, \xi} \{ |g(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{-m} \} \|u\|_{s+m, 2} \\ + C' \|u\|_{s+m-(1-\delta)/2, 2}, \quad u \in H^{s+m, 2},$$

そこで定数 C, C' は 十分大きな δ を固定して

$$|g|_{l,m} = \max_{|\alpha+\beta|\leq l} \sup_{x,\xi} \{ | \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x,\xi) | \langle \xi \rangle^{-(m+\delta|\alpha|-|\beta|)} \} < \infty$$

にのみ関係する.

次に C^∞ -変換 $x(y): R_y^n \longrightarrow R_x^n$ を考える.

$x(y)$ の Jacobian matrix を $\partial_y x(y) = (\partial_{y_j} x_k(y))$,
その行列式を $\det(\partial_y x(y))$ で表わす.

今変換 $x(y)$ が ある定数 $C > 0$ に対して
条件:

$$(1.7) \quad \partial_{y_j} x_k(y) \in \beta, \quad j, k = 1, \dots, n, \quad C^{-1} \leq |\det(\partial_y x(y))| \leq C$$

をみたすとする, 次の補題が成り立つ.

補題 1.5 (Kumano-go [4]). $f(x, \xi) \in S_{1,\delta}^m$ に対して,
 $h(y, \zeta) \in S_{1,\delta}^m$ が存在して,

$$(1.8) \quad h(Y, D_Y) w(y) = (f(X, D_X) u)(x(y)), \\ w(y) = u(x(y)) \in \mathcal{S}.$$

§2. Kagan の定理.

補題 2.1. $g(x, \xi) \in S^{-\infty}$ には対して

$$K(x, z) = \int e^{iz \cdot \xi} g(x, \xi) d\xi$$

とあると,

i) 任意の l, α, β には対して

$$(2.1) \quad \sup_{x, z} \{ \langle z \rangle^{2l} |\partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x, z)| \} < \infty$$

となり

$$(2.2) \quad g(x, D_x) u(x) = \int K(x, x-x') u(x') dx', u \in \mathcal{S}$$

と書ける. 逆に $R_x^n \times R_z^n$ での C^∞ -函数 $K(x, z)$

が任意の l, α, β には対して (2.1) を満たすと

すると

$$g(x, \xi) = \int e^{-iz \cdot \xi} K(x, z) dz$$

とあければ, $g(x, \xi) \in S^{-\infty}$ となり (2.2) が成り立つ.

ii) 任意の $1 < p < \infty$, 実数 s_1, s_2 には対して, 定数

C_{p, s_1, s_2} が存在して,

$$(2.3) \quad \|g(x, D_x) u\|_{s_1, p} \leq C_{p, s_1, s_2} \|u\|_{s_2, p}, u \in H^{s_2, p},$$

が成り立ち, $g(x, D_x)$ は $H^{s, p}$, $1 < p < \infty$, 上の

正則化作用素 ' $g(x, D_x): H^{-\infty, p} \rightarrow H^{\infty, p}$ ' となる.

(証明). i) (2.1) は $\langle z \rangle^{2l} e^{iz \cdot \xi} = \langle D_\xi \rangle^{2l} e^{iz \cdot \xi}$ と書いて

ξ について部分積分すれば,

$$\begin{aligned} & \langle z \rangle^{2l} (\partial_x^\alpha \partial_z^\beta K(x, z)) \\ &= \int e^{iz \cdot \xi} \langle D_\xi \rangle^{2l} \{ (i\xi)^\beta \partial_x^\alpha g(x, \xi) \} d\xi \end{aligned}$$

となることよりわかる. (2.2) は $\hat{u}(\xi)$ と $u(x)$ で直接書いて積分順序を交換すればよい. 逆は

$$\begin{aligned} & \langle \xi \rangle^{2l} \{ \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g(x, \xi) \} \\ &= \int e^{-iz \cdot \xi} \langle D_z \rangle^{2l} \{ (-iz)^\beta \partial_x^\alpha K(x, z) \} dz \end{aligned}$$

なることに注意すればよい.

ii) $2l \geq \max\{s_1, s_2\}$ なる正整数 l を固定し, $u \in \mathcal{S}$

に対して (2.2) を用いて

$$\langle D_x \rangle^{2l} g(x, D_x) u(x) = \int \langle D_x \rangle^{2l} \langle D_{x'} \rangle^{2l} K(x, x-x') \langle D_{x'} \rangle^{-2l} u(x') dx'$$

と書けば, (2.1) より

$$|\langle D_x \rangle^{2l} g(x, D_x) u(x)| \leq C_l \int \langle x-x' \rangle^{-(n+1)} |\langle D_{x'} \rangle^{-2l} u(x')| dx'$$

を得る. $\Rightarrow$ Hausdorff-Young の不等式より

$$\|g(x, D_x) u\|_{2l, p} \leq C'_l \|u\|_{-2l, p}, \quad u \in \mathcal{S},$$

が出る. $\mathcal{S}$ が $H^{-2l, p}$ で dense なることに注意

すれば, 二れと補題 1.2 の系 2° より (2.3) を得る.

定理 2.1 (Kagan [3]). $g(x, \xi) \in S_{1, s}^0$ に対して,
定数 C_p , $1 < p \leq 2$, が存在して

(2.4) $\|g(x, D_x)u\|_{0,p} \leq C_p \|u\|_{0,p}$, $u \in \mathcal{S}$
 が成り立つ.

(証明). 方針は weak-type の L^1 -評価を出し,
 (L^1, L^2) で Marcinkiewicz の補間定理 [8] を
 用いる. 今 C_0^∞ -函数 $\psi(\xi)$ を $\psi(\xi) = 1$ for
 $|\xi| \leq 1$, $\psi(\xi) = 0$ for $|\xi| \geq 2$ となるように取
 ると, $g(x, \xi)\psi(\xi) \in S^{-\infty}$. 従って補題 2.1 より
 $g(x, D_x)\psi(D_x)$ に対しては, 勿論 (2.4) が
 成立する. $g(x, \xi)(1-\psi(\xi)) \in S_{1,\delta}^0$ かつ $= 0$
 for $|\xi| \leq 1$ なる $\Rightarrow$ $g(x, \xi) = g(x, \xi)\psi(\xi)$
 $+ g(x, \xi)(1-\psi(\xi))$ と書けることから, 一般性
 を失うことなく

(2.5) $g(x, \xi) = 0$ for $|\xi| \leq 1$
 なる $g(x, \xi) \in S_{1,\delta}^0$ について, (2.4) をいえばよい.

I) Hörmander [1], p. 121, で構成された C_0^∞ -
 函数 $\varphi(\xi)$:

$$(2.6) \quad \text{supp } \varphi \subset \{\xi; 2^{-1} < |\xi| < 2\}, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) = 1 \quad (\xi \neq 0)$$

を取ると, (2.5) より

$$g(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} (g(x, \xi) \varphi(2^{-j}\xi)).$$

$$(2.7) \quad f_j(x, z) = \int e^{iz \cdot \xi} g(x, \xi) \varphi(2^{-j}\xi) d\xi, \quad (j=0, 1, 2, \dots)$$

とあくと, $x^\alpha e^{ix \cdot \xi} = (-i \partial_\xi)^\alpha e^{ix \cdot \xi}$ と書いて部分積分すると,

$$\begin{aligned} & (2^{j\alpha})^\alpha f_j(x+x^0, x) \\ &= 2^{j|\alpha|} \sum_{\alpha' \leq \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \int e^{ix \cdot \xi} ((i \partial_\xi)^{\alpha'} g(x+x^0, \xi) \cdot |\xi|^{|\alpha'|}) \\ & \quad \cdot ((i \partial_\xi)^{\alpha-\alpha'} \varphi(2^{-j}\xi) \cdot |\xi|^{-|\alpha'|}) d\xi. \end{aligned}$$

ここで (2.5) に注意すると

$$g_{\alpha'}(x, \xi) = (i \partial_\xi)^{\alpha'} g(x, \xi) \cdot |\xi|^{|\alpha'|} \in S_{1, \delta}^0.$$

従って $s=m=0$ に對する (1.5) と Plancherel の定理より

$$\begin{aligned} \|(2^{j\alpha})^\alpha f_j(x+x^0, x)\|_{L^2}^2 &\leq C_\alpha 2^{2j|\alpha|} \sum_{\alpha' \leq \alpha} \|(i \partial_\xi)^{\alpha-\alpha'} \varphi(2^{-j}\xi) \cdot |\xi|^{-|\alpha'|}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C'_\alpha 2^{n_j}, \end{aligned}$$

ここで定数 C_α, C'_α は x^0 に depend しない.

K を $> n/2$ なる整数とすると,

$$\begin{aligned} (2.8) \quad & \int |f_j(x+x^0, x)| dx \\ & \leq \left(\int (1+2^{2j}|x|^2)^{-K} dx \right)^{1/2} \left(\int (1+2^{2j}|x|^2)^K |f_j(x+x^0, x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \leq C_1, \end{aligned}$$

特に $t > 0$ に對しては

$$\int_{|x| \geq t} (1+2^{2j}|x|^2)^{-K} dx \geq 2^{-2jK} \int_{|x| \geq t} |x|^{-2K} dx = C'_1 2^{-2jK} t^{-2K+n},$$

従って

$$(2.9) \int_{|x| \geq t} |f_j(x+x^0, x)| dx \leq C_2 (2^j t)^{\left(\frac{n}{2}-\kappa\right)}$$

を得る. 二れより

$$(2.10) \int_{|x| \geq 2t} |f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x)| dx \leq 2C_2 (2^j t)^{\left(\frac{n}{2}-\kappa\right)} \quad (|x'| \leq t).$$

次に $|x'| \leq t$, $2^j t \leq 1$ とする.

$$|e^{-ix' \cdot \xi} - 1| \leq |x'| |\xi| \leq 2t 2^j \quad \text{on } \text{supp } \mathcal{G}(2^{-j}\xi),$$

$$|\partial_{\xi}^{\alpha'} (e^{-ix' \cdot \xi} - 1)| = |\partial_{\xi}^{\alpha'} e^{-ix' \cdot \xi}| \leq |x'|^{|\alpha'|} \leq t^{|\alpha'|}$$

$$= t \cdot t^{|\alpha'|-1} \leq t 2^j 2^{-j|\alpha'|} \quad \text{for } \alpha' \neq 0,$$

従って (2.8) に 代入して, $f_j(x+x^0, x)$ の代りに

$$(f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x)) \text{ を入れて}$$

$$(2.11) \int |f_j(x+x^0, x-x') - f_j(x+x^0, x)| dx \leq C_3 2^j t \quad (|x'| \leq t, 2^j t \leq 1)$$

を得る.

$$F_N(x, x) = \sum_{j=0}^N f_j(x, x) \quad \text{と おくとき, (2.10) と}$$

(2.11) より

$$(2.12) \int_{|x| \geq 2t} |F_N(x+x^0, x-x') - F_N(x+x^0, x)| dx \\ \leq C_4 \sum_{j=0}^{\infty} \min\{(2^j t)^{\left(\frac{n}{2}-\kappa\right)}, 2^j t\} \leq C'_4 \quad (|x'| \leq t)$$

を得る.

II) $u \in L^1$ で その台がコンパクトとする.

$$g_N(x, \xi) = \sum_{j=0}^N (g(x, \xi) g(2^{-j}\xi)) \quad (\in S^{-\infty} \subset S_{1, \delta}^0)$$

とあけは、 $F_N(x, z)$ の定義より

$$(2.13) \quad g_N(x, D_x) u(x) = \int F_N(x, x-x') u(x') dx'$$

と書ける.

今注意の $s > 0$ に対して, Calderón-Zygmund の分解 ([1], p. 115):

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = v + \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \quad \text{supp } v, \text{supp } w_k \subset K \\ \|v\|_{L^1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|w_k\|_{L^1} \leq 3 \|u\|_{L^1}, \\ |v(x)| \leq 2^n s, \quad \text{a.e.}, \\ \text{ある disjoint な cubes } I_k \text{ に対して} \\ \int_{I_k} w_k dx = 0, \quad w_k(x) = 0 \text{ if } x \notin I_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leq s^{-1} \|u\|_{L^1} \end{array} \right.$$

を行なう, ところで K は $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合, $m(I_k)$ は I_k の (Lebesgue) 測度を表わす.

このとき

$$\hat{u}(\xi) = \hat{v}(\xi) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}_k(\xi), \quad |\hat{v}(\xi)| + \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{w}_k(\xi)| \leq 3 \|u\|_{L^1}$$

となり, 従って

$$(2.15) \quad g_N(x, D_x) u(x) = g_N(x, D_x) v(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_N(x, D_x) w_k(x)$$

と書ける. $x^{(k)}$ を各 I_k の中点として, I_k^* を

$$I_k^* = \{x; x - x^{(k)} = 2\sqrt{n}(x' - x^{(k)}), x' \in I_k\}$$

とあくと, ある $t_k > 0$ に 対し,

$$(2.16) \quad \begin{cases} I_k \subset \{x; |x - x^{(k)}| \leq t_k\}, \\ I_k^* \subset \{x; |x - x^{(k)}| \geq 2t_k\} \end{cases}$$

となり

$$(2.17) \quad m(I_k^*) / m(I_k) = \gamma (= (2\sqrt{n})^n).$$

さて, $\int_{I_k} w_k dx = 0$ に 注意 すると, (2.13) より

$$g_N(x, D_x) w_k(x) = \int_{I_k} (F_N(x, x-x') - F_N(x, x-x^{(k)})) w_k(x') dx'$$

と書ける. こゝで $x - x^{(k)} = y$, $x' - x^{(k)} = y'$ と

あくと, (2.12) と (2.16) より

$$\begin{aligned} \int_{I_k^*} |g_N(x, D_x) w_k(x)| dx &\leq \int_{|y| \geq 2t_k} |g_N(x, D_x) w_k(y+x^{(k)})| dy \\ (2.18) &\leq \int_{|y| \geq 2t_k} \int_{|y'| \leq t_k} |F_N(y+x^{(k)}, y-y') - F_N(y+x^{(k)}, y)| \\ &\quad \cdot |w_k(y'+x^{(k)})| dy' dy \leq C'_4 \|w_k\|_{L^1}. \end{aligned}$$

今 $O^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^*$ とあくと, (2.14) と (2.17) より

$$(2.19) \quad m(O^*) \leq \gamma s^{-1} \|u\|_{L^1}.$$

また, $w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$ とあくと (2.18) より

$$(2.20) \quad \int_{O^{*c}} |g_N(x, D_x) w(x)| dx \leq 3 C'_4 \|u\|_{L^1}.$$

一方 v は 台 が コンパクト な 有界 函数 で

あることより $v \in L^2$. このとき (1.5) と (2.14)

$$\begin{aligned} \text{より} \quad & \|g_N(x, D_x)v\|_{L^2}^2 \leq C_5 \left\| \left(\sum_{j=0}^N g(2^{-j}\xi) \right) \widehat{v}(\xi) \right\|_{L^2}^2 \\ (2.21) \quad & \leq C_5 2^n s \int |v| dx \leq 3 \cdot 2^n C_5 s \|u\|_{L^1}, \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ C_5 は N に depend しない定数.

III) $m\{x; |g_N(x, D_x)u(x)| > s\}$ を考える.

(2.20) より

$$(2.22) \quad \frac{s}{2} m\{x \in O^{*c}; |g_N(x, D_x)w(x)| > \frac{s}{2}\} \leq 3 C_4 \|u\|_{L^1},$$

また (2.21) より

$$(2.23) \quad \left(\frac{s}{2}\right)^2 m\{x; |g_N(x, D_x)v(x)| > \frac{s}{2}\} \leq 3 \cdot 2^n C_5 s \|u\|_{L^1}.$$

もし, $|g_N(x, D_x)u(x)| > s$ なら $|g_N(x, D_x)w(x)| > s/2$

か $|g_N(x, D_x)v(x)| > s/2$ とあることに注意す

れば, (2.19), (2.22), (2.23) より

$$(2.24) \quad m\{x; |g_N(x, D_x)u(x)| > s\} \leq C_6 s^{-1} \|u\|_{L^1},$$

$\Rightarrow$ C_6 は N に depend しない定数.

一方 (1.5) より

$$(2.25) \quad \|g_N(x, D_x)u\|_{L^2} \leq C_7 \left\| \left(\sum_{j=0}^N g(2^{-j}\xi) \right) \widehat{u}(\xi) \right\|_{L^2} \leq C_7 \|u\|_{L^2}.$$

従って Marcinkiewicz の補間定理より, N は

depend しない定数 C_p , $1 < p < 2$, が存在して

$$\|g_N(x, D_x)u\|_{L^p} \leq C_p \|u\|_{L^p}, \quad u \in L^p.$$

$u \in \mathcal{S}$ とすると, $\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x, D_x)u(x) = g(x, D_x)u(x)$ より (2.4)を得る.

§3. $H^{s,p}$ -理論. 先ず一般化された Poincaré の不等式を証明する.

定理 3.1. 実数 $s > 0$ と $1 < p < \infty$ に対して, 定数 $C_{s,p}$ が存在して

$$(3.1) \quad \|u\|_{0,p} \leq C_{s,p} d^s \|u\|_{s,p}, \quad u \in C_0^\infty(|x| < d), d > 0.$$

(証明). $d \geq 1$ のときは補題 1.2 の系 2° より明らか. 故に $0 < d < 1$ とする.

C_0^∞ -函数 $\psi(\xi)$:

$$(3.2) \quad \psi(\xi) = 1 \quad \text{for } |\xi| \leq 1, \quad = 0 \quad \text{for } |\xi| \geq 2$$

を取り, $\psi_{\varepsilon,d}(\xi) = \psi(\varepsilon^{-1}d\xi)$, $\varepsilon > 0$, とおく.

明らかに $\psi_{\varepsilon,d}(\xi) \in S^{-\infty}$, $(1 - \psi_{\varepsilon,d}(\xi)) \in S_{+,0}^0$, かつ

$$(3.3) \quad u(x) = \psi_{\varepsilon,d}(D_x)u(x) + (1 - \psi_{\varepsilon,d}(D_x))u(x).$$

このとき

$$\begin{aligned} |\psi_{\varepsilon,d}(D_x)u(x)|^p &= \left| \int_{|x'| < d} \widehat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x) u(x') dx' \right|^p \\ &\leq \left(\int_{|x'| < d} |\widehat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x)| dx' \right)^{p/p'} \left(\int_{|x'| < d} |\widehat{\psi}_{\varepsilon,d}(x'-x)|^p |u(x')|^p dx' \right) \\ &\quad \quad \quad (p^{-1} + p'^{-1} = 1). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{て, } |\widehat{\psi}_{\varepsilon,d}(x)| = (\varepsilon d^{-1})^n |\widehat{\psi}(\varepsilon d^{-1}x)| \leq (\varepsilon d^{-1})^n C,$$

$$\|\widehat{\psi}_{\varepsilon,d}\|_{\perp} = \|\widehat{\psi}\|_{\perp} < \infty$$

なることに注意すれば

$$\|\psi_{\varepsilon,d}(D_x)u\|_{0,p} \leq C_p' \varepsilon^{np'} \|u\|_{0,p}.$$

従って $C' \varepsilon_0^{n/p'} \leq 2^{-1}$ なる $\varepsilon_0 > 0$ を固定して

$$(3.4) \quad \|\psi_{\varepsilon_0, d}(D_x)u\|_{0,p} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{0,p}$$

を得る. 以下に ε_0 に対して

$$g_d(\xi) = d^{-s} \langle \xi \rangle^{-s} (1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))$$

を考える.

$$\begin{aligned} \partial_{\xi}^{\alpha} g_d(\xi) &= d^{-s} \partial_{\xi}^{\alpha} \langle \xi \rangle^{-s} (1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)) \\ &\quad + d^{-s} \sum_{0 \neq \alpha' \leq \alpha} \binom{\alpha}{\alpha'} \partial_{\xi}^{\alpha - \alpha'} \langle \xi \rangle^{-s} \cdot \partial_{\xi}^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{cases} \varepsilon_0^{-1} d |\xi| \geq 1 & \text{on } \text{supp}(1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(\xi)), \\ 2 \geq \varepsilon_0^{-1} d |\xi| \geq 1 & \text{on } \text{supp}(\partial_{\xi}^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))) \\ & (\alpha' \neq 0), \\ |\partial_{\xi}^{\alpha'} (-\psi_{\varepsilon_0, d}(\xi))| \leq C_{\alpha'} (\varepsilon_0^{-1} d)^{|\alpha'|} \end{cases}$$

に注意すると, $g_d(\xi)$ を $S_{1,0}^0$ の元と考えて

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} g_d(\xi)| \leq C_{\alpha} \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad \text{を得る, 従って } C_{\alpha} \text{ は}$$

$0 < d < 1$ に depend しない定数. 従って補題 1.2 の系 1° より

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \|(1 - \psi_{\varepsilon_0, d}(D_x))u\|_{0,p} &= d^s \|g_d(D_x) \langle D_x \rangle^s u\|_{0,p} \\ &\leq C_{p, \varepsilon_0} \|u\|_{sp} \end{aligned}$$

を得る. (3.3) - (3.5) より (3.1) を得る.

定理 3.2. $g(x, \xi) \in S_{1, \delta}^m$ とすると, 任意の実数 s と $1 < p < \infty$ に対して, 定数

$C_{s,p}$ が存在して

$$(3.6) \quad \|g(x, D_x)u\|_{s,p} \leq C_{s,p} \|u\|_{s+m,p}, \quad u \in H^{s+m,p},$$

が成り立つ.

系. $g_0(x, \xi) \in S_{\pm, \delta}^0$ とすると, 任意の $1 < p \leq q < \infty$ に対し, $s_0 = n(1/p - 1/q)$ とおくと, 定数 $C_{p,q}$ に對して

$$(3.7) \quad \|g_0(x, D_x)u\|_{-s_0, q} \leq C_{p,q} \|u\|_{0,p}, \quad u \in H^{0,p},$$

が成り立つ.

注. これは Hörmander の問題頁 ([2], p. 163) が $\rho = 1$ の場合には肯定的であることを示す (系の証明). $\chi(\xi)$ を条件 (3.2) を満たす C_0^∞ 函数として,

$$\begin{aligned} \|g_0(x, D_x)u\|_{-s_0, q} &= \|\langle D_x \rangle^{-s_0} g_0(x, D_x)u\|_{0, q} \\ &\leq \|\chi(D_x) \langle D_x \rangle^{-s_0} g_0(x, D_x)u\|_{0, q} + \|\langle D_x \rangle^{-s_0} (1 - \chi(D_x)) \langle D_x \rangle^{s_0} \\ &\quad \cdot g_0(x, D_x)u\|_{0, q} \equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

を得る, $\Rightarrow$ で $|D_x|$ は $\widehat{|D_x|u}(\xi) = |\xi| \widehat{u}(\xi)$ で定義される.

$\chi(\xi) \langle \xi \rangle^{-s_0} \in S^{-\infty}$ であるから 補題 1.3 の i) より $g_\infty(x, \xi) \in S^{-\infty}$ が存在して,

$$g_\infty(x, D_x) = \chi(D_x) \langle D_x \rangle^{-s_0} g_0(x, D_x).$$

補題 2.1 に於て, $g_\infty(x, \xi)$ に対応する核を $K_\infty(x, z)$ とおけば,

(3.8) $I_1 = \|g_\infty(x, D_x)u\|_{0,p} \leq C_r \|u\|_{0,p}$,
 $\Rightarrow$ て, C_r は $r^{-1} = 1 + q^{-1} - p^{-1}$ なる r
 に 変 化 し

$\text{Max} \left\{ \sup_x \int |K_\infty(x, x)|^r dx, \sup_x \int |K_\infty(x, x-y)|^r dx \right\} \leq C_r^r$
 $\varepsilon + 1$ は 定 数. 一 方 $|\varepsilon|^{s_0} (1 - \psi(\varepsilon)) \langle \varepsilon \rangle^{-s_0} \in S_{\perp,0}^0 \subset S_{\perp,\delta}^0$
 であるから再び補題 1.3 の i) より $g_1(x, \varepsilon) \in$
 $S_{\perp,\delta}^0$ に 存 在 し て

$$g_1(x, D_x) = |D_x|^{s_0} (1 - \psi(D_x)) \langle D_x \rangle^{-s_0} g_0(x, D_x).$$

$\Rightarrow$ て Hardy - Littlewood - Sobolev の Potential
 評価式 ([7], p. 99 & 348 参照) と 定理 3.2
 を 用 い て

$$(3.9) \quad I_2 = \| |D_x|^{-s_0} g_1(x, D_x) u \|_{0,p} \\
\leq C'_{p,q} \|g_1(x, D_x) u\|_{0,p} \leq C''_{p,q} \|u\|_{0,p}$$

を得, (3.8), (3.9) より (3.7) を 得 る.

(定理 3.2 の 証 明). I) $1 < p < 2$ の とき.

$\|g(x, D_x)u\|_{s,p} = \| \langle D_x \rangle^s g(x, D_x) \langle D_x \rangle^{-(s+m)} (\langle D_x \rangle^{s+m} u) \|_{0,p}.$
 $\langle \varepsilon \rangle^s \in S_{\perp,0}^s \subset S_{\perp,\delta}^s$, $p(x, \varepsilon) \langle \varepsilon \rangle^{-(s+m)} \in S_{\perp,\delta}^{-s}$ より,
 補題 1.3 の i) が 適 用 出 来 て, ある $g_0(x, \varepsilon)$
 $\in S_{\perp,\delta}^0$ に 変 化 し

$$g_0(x, D_x) = \langle D_x \rangle^s g(x, D_x) \langle D_x \rangle^{-(s+m)}.$$

従 っ て 定理 2.1 より (3.6) を 得 る.

II) $2 < p < \infty$ のとき. $p^{-1} + p'^{-1} = 1$ なる p' をとると, $1 < p' < 2$. 補題 3.1 の ii) より

$g^*(x, \varepsilon) \in S_{1, \delta}^m$ が存在して,

$$(g(x, D_x)u, v) = (u, g^*(x, D_x)v), \quad u, v \in \mathcal{S}.$$

$p^*(x, D_x)$ $1 < p' < 2$ に対して (3.6) を用いて

$$\begin{aligned} |(g(x, D_x)u, v)| &\leq \|u\|_{s+m, p} \|g^*(x, D_x)v\|_{-(s+m), p'} \\ &\leq \|u\|_{s+m, p} C_{s, p'} \|v\|_{-s, p'}. \end{aligned}$$

このことは, $\|g(x, D_x)u\|_{s, p} \leq C_{s, p'} \|u\|_{s+m, p}$ を意味する. $\mathcal{S}$ は $H^{s+m, p}$ で dense であるから $2 < p < \infty$ についても (3.6) を得る.

定理 3.3. $g(x, \varepsilon) \in S_{1, \delta}^m$ に対して, 正の定数 C_0 によって, $\langle \varepsilon \rangle^m \leq C_0 |g(x, \varepsilon)|$ が成り立つとすると, 定数 $C_{s, p}, C'_{s, p}$ が存在して

$$(3.10) \quad \|u\|_{s+m, p} \leq C_{s, p} \|g(x, D_x)u\|_{s, p} + C'_{s, p} \|u\|_{s+m-(1-\delta), p}$$

が成り立つ.

三注. (1.6) を用いて, $\lim_{p \rightarrow 2} C_{s, p} = C_0$ となるよう定数 $C_{s, p}$ を取ることも出来る ([5] 参照).

(証明). $g_{-1}(x, \varepsilon) = g(x, \varepsilon)^{-1} (\in S_{1, \delta}^{-m})$ において,

$$\begin{aligned} \|u\|_{s+m,p} &\leq \| (g_{-1}(x, D_x) \langle D_x \rangle^{s+m}) g(x, D_x) u \|_{0,p} \\ &\quad + \| g_{-1}(x, D_x) \{ g(x, D_x) \langle D_x \rangle^{s+m} - \langle D_x \rangle^{s+m} g(x, D_x) \} u \|_{0,p} \\ &\quad + \| \{ (1 - g_{-1}(x, D_x) g(x, D_x)) \langle D_x \rangle^{s+m} \} u \|_{0,p}. \end{aligned}$$

二、で 第1項 には 定理3.2 を適用し、
 第2, 第3項 には 補題1.3 の i) の展開
 定理を $N=1$ で用いて 次数を $(1-\delta)$ 下げ、
 その後で 定理3.2 を適用して (3.10) を得る。

定理3.4. $x(y): R_y^n \longrightarrow R_x^n$ を条件(1.7)を
 みたす変換とする。このとき $g(x, \xi) \in S_{1,0}^{-s}$,
 $h(y, \eta) \in S_{1,0}^{-s}$ が存在して、

$$\begin{aligned} (3.11) \quad &\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } u = \langle D_x \rangle^{-s} u_0 \text{ for } u_0 \in L_x^p \\ \Rightarrow w = h(y, D_y) w_0 \text{ for } w_0(y) = u_0(x(y)), \\ \text{ii) } w = \langle D_y \rangle^{-s} w_0 \text{ for } w_0 \in L_y^p \\ \Rightarrow u = g(x, D_x) u_0 \text{ for } u_0(x) = w_0(y(x)), \end{array} \right. \end{aligned}$$

二、で、 $w(y) = u(x(y))$ 。従って空間 $H^{s,p}$ は
 $u \in H^{s,p} \iff w \in H^{s,p}$ の意味で座標変換
 に関して不変である。

証明は補題1.5より明らか。Lions-Magenes [6]
 ではより一般的な形で述べられているが、二、で
 は $P_s D_0^p$ で対応関係を具体的に示している。

References

- [1] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math., 104 (1960), 93-140.
- [2] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symposium on Singular Integrals, Amer. Math. Soc., 10 (1968), 138-183.
- [3] V. M. Kagan, Boundedness of pseudodifferential operators in L_p , Izv. Vyss. Učebn. Zaved. Matematika, no.6 (73)(1968), 35-44 (in Russian).
- [4] H. Kumano-go, Algebras of pseudo-differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), to appear.
- [5] H. Kumano-go and M. Nagase, L^p -theory of pseudo-differential operators, Proc. Japan Acad., 46 (1970), to appear.
- [6] J. L. Lions and E. Magenes, Problemi ai limiti non omogenei (III), Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Ser. 3, 15 (1961), 41-103.
- [7] S. Mizohata, Theory of partial differential equations, Iwanami, Tokyo (1965) (in Japanese).
- [8] A. Zygmund, Trigonometrical series II, Cambridge (1959).