

## 流体問題の数値計算と丸め誤差

電気通信大学 藤間 昌一 (Shoichi Fujima)

電気通信大学 田端 正久 (Masahisa Tabata)

0. はじめに

計算機の内部では数値は有限桁で表現される。このため、一般に実数を計算機で扱うときには丸め誤差の発生が避けられない。丸め誤差は通常は数値計算には望ましくないものと考えられるが、逆にその存在により初めて可能になる計算もある。円柱まわり流れでの差分法の Kawamura et al. [1, 2] の計算もその一例である。本報では新しい有限要素スキームによりこの丸め誤差の効果を調べる。

1. 円柱まわり流れ問題

この流れ問題の支配方程式は非圧縮ナビエ・ストークス方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \text{grad}) u - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u + \text{grad } p = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1a)$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1b)$$

である。ここに、 $\Omega = \{x; |x| > \frac{1}{2}\}$  で、 $u$  は流速、 $p$  は圧力、 $\text{Re}$  はレイノルズ数である。

境界条件は、

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_0 \quad (\equiv \partial \Omega) \quad (2a)$$

$$u = (1, 0) \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \quad (2b)$$

である。

数値解法は、最近我々が開発した 3 次上流型有限要素近似スキームを使う。近似の定義を 2 節、3 節に示す。

2. ナビエ・ストークス問題の有限要素近似

方程式(1)を変分法で定式化する。ここでは領域  $\Omega$  は有界とし、境界条件は斉次ディリクレ条件、

$$u = 0 \quad \text{on } \partial \Omega$$

とする。関数空間、

$$X = (H_0^1(\Omega))^m, \quad M = \{q \in L^2(\Omega)\}$$

を導入する。(1)の弱形式は、各時刻  $t$  で、 $(u(t), p(t)) \in X \times M$  であり、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + a_1(u, u, v) + \frac{1}{\text{Re}} a_0(u, v) + b(v, p) = (f, v), \quad v \in X \quad (3a)$$

$$b(u, q) = 0, \quad q \in M \quad (3b)$$

を満たす  $(u, p)$  を求めることである。ここに、

$$a_0(u, v) = 2 \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^m D_{ij}(u) D_{ij}(v) \right\},$$

$$D_{ij}(u) = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2,$$

$$a_1(w, u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^m (w \cdot \text{grad } u_i) v_i \right\},$$

$$b(v, q) = - \int_{\Omega} q \text{ div } v$$

である。

時間刻みを  $\tau$  として、時間方向の半陰的離散化、

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (u^n \cdot \text{grad}) u^n - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u^n + \text{grad } p^{n+1} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4a)$$

$$\text{div } u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4b)$$

を考える。ここに、 $u^n$ ,  $p^n$  はそれぞれ、時刻  $n\tau$  での流速、圧力を示している。

空間方向の離散化には混合型有限要素近似を用いる。基底関数は、圧力が3角形1次要素、流速が各3角形を4つに合同に分けた小3角形上で1次であるBercovier-Pironneau要素[3]を使う。この要素は混合型有限要素近似で重要な Inf-Sup 条件を満たしている。この要素から作られる  $X$ ,  $M$  の有限次元部分空間をそれぞれ  $X_h$ ,  $M_h$  とする。

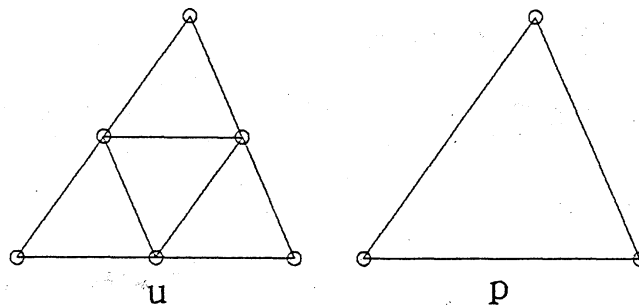


図1. Bercovier-Pironneau 要素

3次精度上流型有限要素近似スキームでは、 $u_h^n$ から次の時間ステップの $(u_h^{n+1}, p_h^{n+1})$ を

$$\begin{aligned} ((u_h^{n+1} - u_h^n)/\tau, v_h)_h + a_1^h(u_h^n, u_h^n, v_h) + \frac{1}{\text{Re}} a_0(u_h^n, v_h) \\ + b(v_h, p_h^{n+1}) = (f^n, v_h)_h, \quad v_h \in X_h \quad (5a) \end{aligned}$$

$$b(u_h^{n+1}, q_h) = 0, \quad q_h \in M_h \quad (5b)$$

を満たすように求める。ここに、 $(\cdot, \cdot)_h$ は質量集中化 $L^2$ 内積、

$$(u_h, v_h)_h = \sum_i u_h(P_i) v_h(P_i) \text{mes } D_i \quad (6)$$

であり、 $D_i$ は節点 $P_i$ のまわりの重心領域である。 $a_1^h$ は、

$$a_1^h(b_h, u_h, v_h) = \sum_i \sum_{j=1}^m (b_h \cdot \text{grad } u_{hj})_h(P_i) v_{hj}(P_i) \text{mes } D_i$$

で定義される。 $(b_h \cdot \text{grad } u_{hj})_h(P_i)$ は3次精度上流型近似であり、その定義は次節で与える。境界付近で3次精度近似が使えないところでは、1次精度上流型近似[4]などを使う。

### 3. 3次精度上流型有限要素近似

$b$ を与えられた流速、 $v_h$ をスカラー関数とする。点 $O$ を任意の節点、 $b(O) \neq 0$ とする。 $\xi$ を $b(O)$ 方向の単位ベクトルとし、 $O$ を原点とする $\xi$ 軸を考える。点 $W, U, D, B$ を図2のように選ぶ。ここに、 $U$ は $O$ を囲む多角形と $\xi$ 軸負の部分との交点、 $W$ は $U$ を含む辺を囲む多角形と $\xi$ 軸負の部分との交点である。 $D, B$ は $\xi$ 軸正の部分との同様な交点である。3次精度上流型近似を

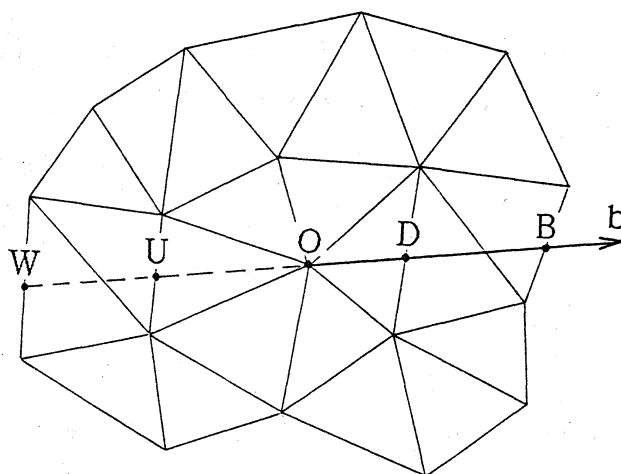


図2. 流速 $b$ と点 $W, U, O, D, B$

$$(b \cdot \text{grad } v_h)_h(O) = |b(O)| \sum_{P \in \{W, U, O, D, B\}} \gamma_P v_h(P) / h, \quad (7)$$

$$\gamma_P = \{\prod_{Q \neq P, 0} (\xi_0 - \xi_Q) + \alpha\} / \prod_{Q \neq P} (\xi_P - \xi_Q), \quad P \neq O, \quad (8a)$$

$$\gamma_0 = -\sum_{Q \neq 0} \gamma_Q \quad (8b)$$

で定義する。ここに、 $h$ は点 $O$ まわりでの代表要素サイズ(長さ $OU$ )、点 $P$ の $\xi$ 座標が $\xi_P h$ 、

$\alpha$  は 4 階の人工粘性量を調整する正定数 ( $\leq 6$ ) である。

注意 W, U, O, D, B が等間隔のとき次が成立する。

- 1)  $\alpha = 0$  のとき, 4 次精度中心型近似である。
- 2)  $\alpha = 2$  のとき, W, U, O, D の 4 点を使う Leonard[5] 型の 3 次精度上流型近似である。
- 3)  $\alpha = 4$  のとき, W, U, O, B の 4 点を使う Leonard 型の 3 次精度上流型近似である。
- 4)  $\alpha = 6$  のとき, Kawamura et al. [1, 2] 型の 3 次精度上流型近似である。

定理  $v$  を滑らかな関数とする。  $h$  に依存しない正定数  $c_1, c_2$  が存在して,

$$c_1 \leq \xi_B - \xi_D, \quad \xi_D - \xi_O, \quad \xi_O - \xi_U, \quad \xi_U - \xi_W \leq c_2$$

ならば,

$$\begin{aligned} (b \cdot \text{grad } v)_h(O) &= (b \cdot \text{grad } v)(O) \\ &\quad + \alpha |b(O)| (\partial^4 v / \partial \xi^4)(O) h^3 / 4! + O(h^4) \end{aligned} \quad (9)$$

が成立する。

#### 4. 円柱まわり流れ問題の計算

計算領域は  $\Omega_h = [-7.5, 22.5] \times [-7.5, 7.5]$  とする。領域の有限化により現れる人工的な境界に対しては, 境界条件,

$$u = (1, 0) \quad \text{on } \Gamma_1 = \{x \in \partial \Omega_h \mid x_1 = -7.5\} \quad (10a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{1j} n_j = 0 \\ u_2 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{on } \Gamma_2 = \{x \in \partial \Omega_h \mid x_2 = \pm 7.5\} \quad (10b)$$

$$\tau_{ij} n_j = 0, \quad i=1, 2 \quad \text{on } \Gamma_3 = \{x \in \partial \Omega_h \mid x_1 = 22.5\} \quad (10c)$$

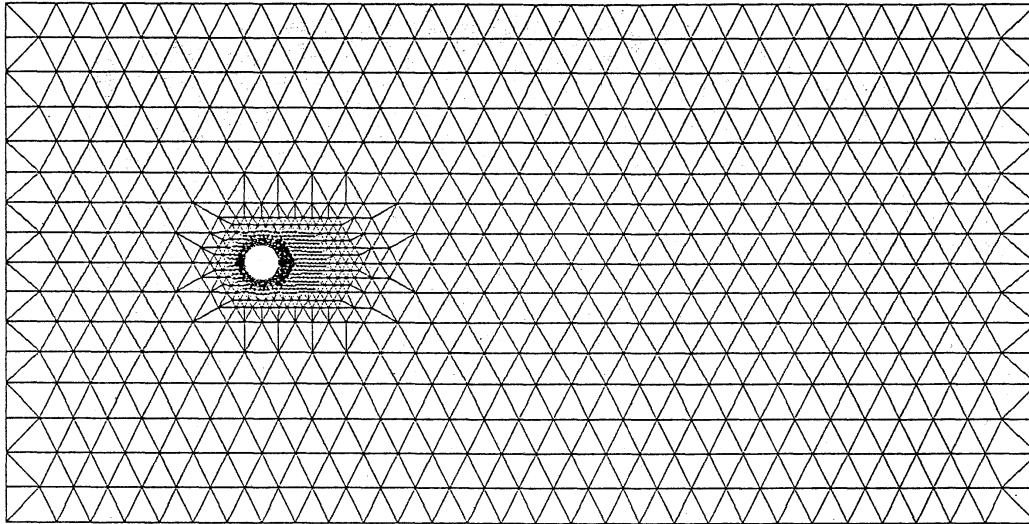
を課す。ここに,  $\tau_{ij}$  は応力テンソルである。

領域の要素分割図を図 3 に, 要素数, 流速の自由度, 圧力の自由度を表 1 に示す。

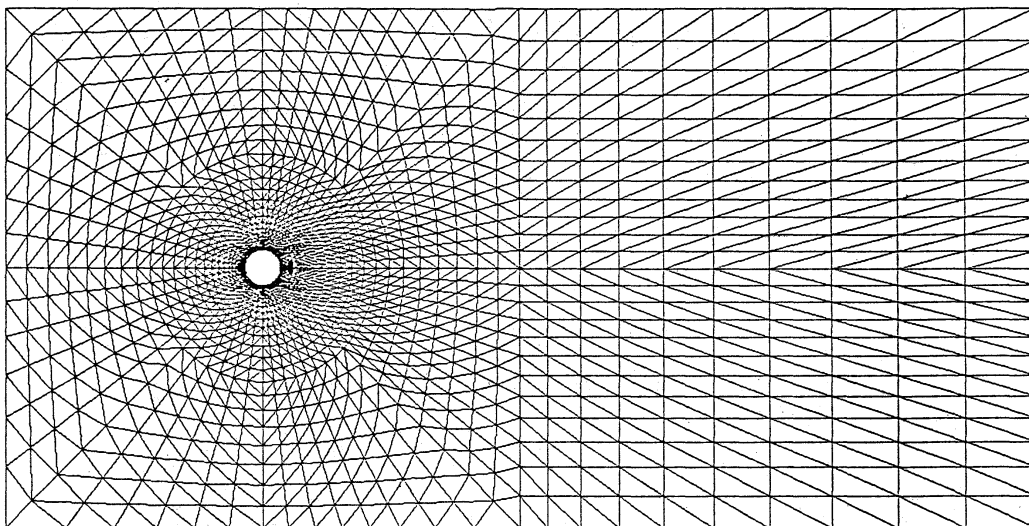
初期条件は,  $u = 0$  とする。

$Re=10, 100, 1000, 10000$  の 4 ケースについて計算を行った (表 2)。図 4, 5, 6 に  $Re=10, 100, 10000$  での流線を示す。また, 図 7 に抗力係数  $C_D$ , 揚力係数  $C_L$  の時間変化を示す。

$Re=10$  では  $x_1$  軸対称な双子渦が得られた。これに対して,  $Re=100$  以上では  $x_1$  軸非対称なカルマン渦が得られた。 $Re=100$  では渦の様子は比較的単純であり, ほぼ完全な周期状態が得られた。 $Re=10000$  では, 円柱表面の境界層が薄くなるためそこで急激な流速変化が生じ, 剥離



(a)分割#1



(b)分割#2

図3. 要素分割

表1. 要素分割

| 分割 | 要素数   | 流速自由度   | 圧力自由度 | 円柱の近似 |
|----|-------|---------|-------|-------|
| #1 | 2,334 | 4,806x2 | 1,236 | 正48角形 |
| #2 | 4,320 | 8,788x2 | 2,234 | 64角形  |

表2. 計算データ

| Re    | 分割 | $\tau$ | $\alpha$ | 結果         |
|-------|----|--------|----------|------------|
| 10    | #1 | 0.001  | 1.92     | 定常双子渦流れ    |
| 100   | #1 | 0.01   | 1.92     | 非定常カルマン渦流れ |
| 1000  | #2 | 0.01   | 1.92     | 非定常カルマン渦流れ |
| 10000 | #2 | 0.0075 | 2.88     | 非定常カルマン渦流れ |

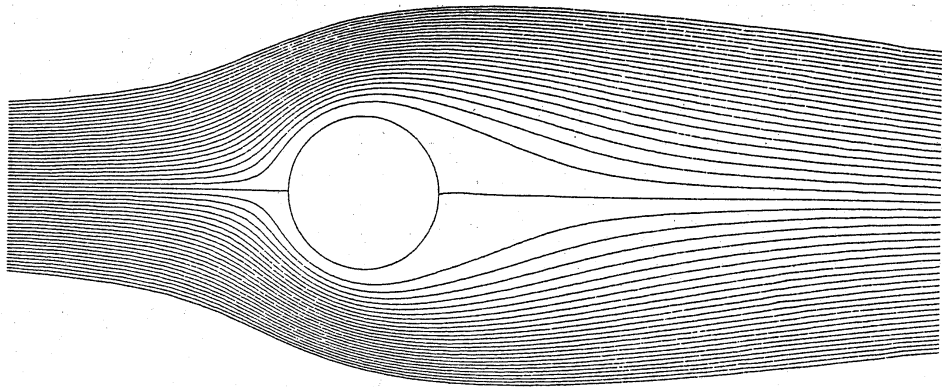


図4. 流線,  $Re=10$

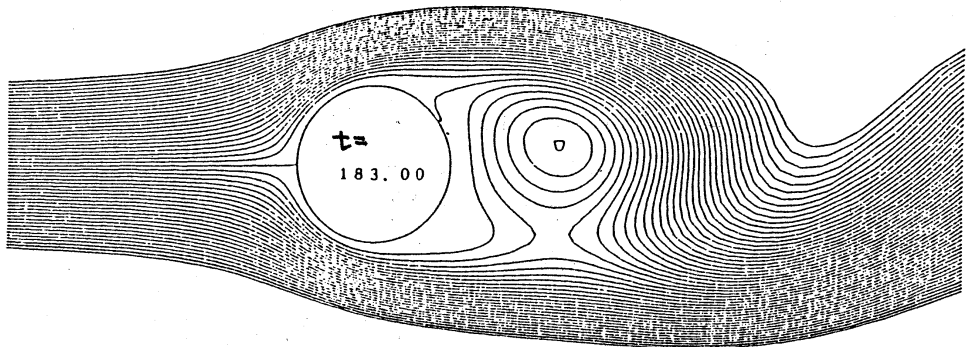
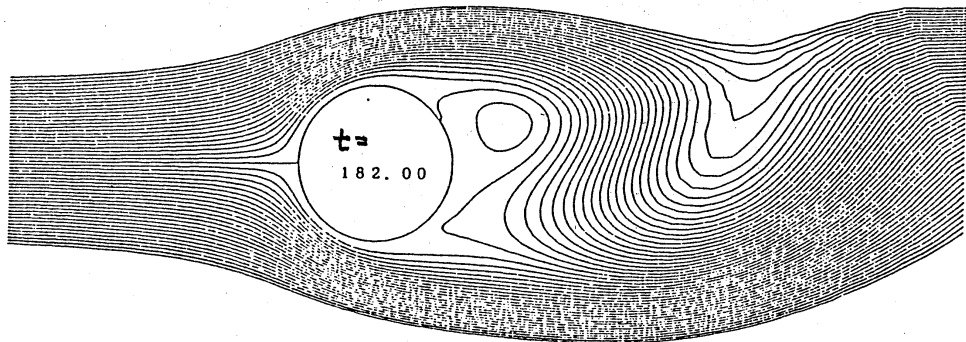
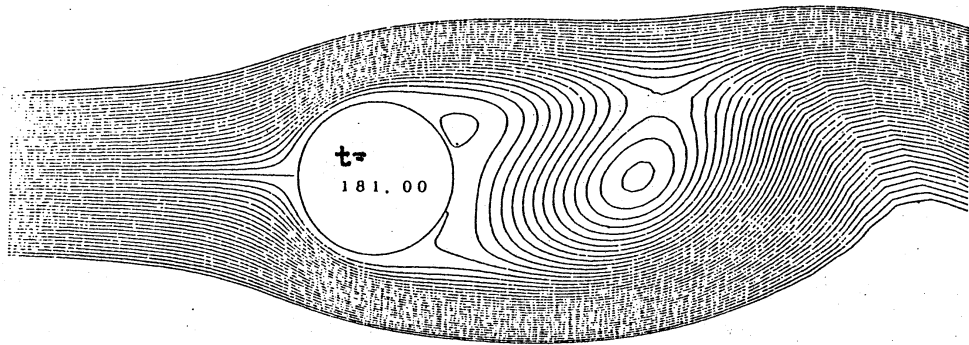


図5. 流線,  $Re=100$

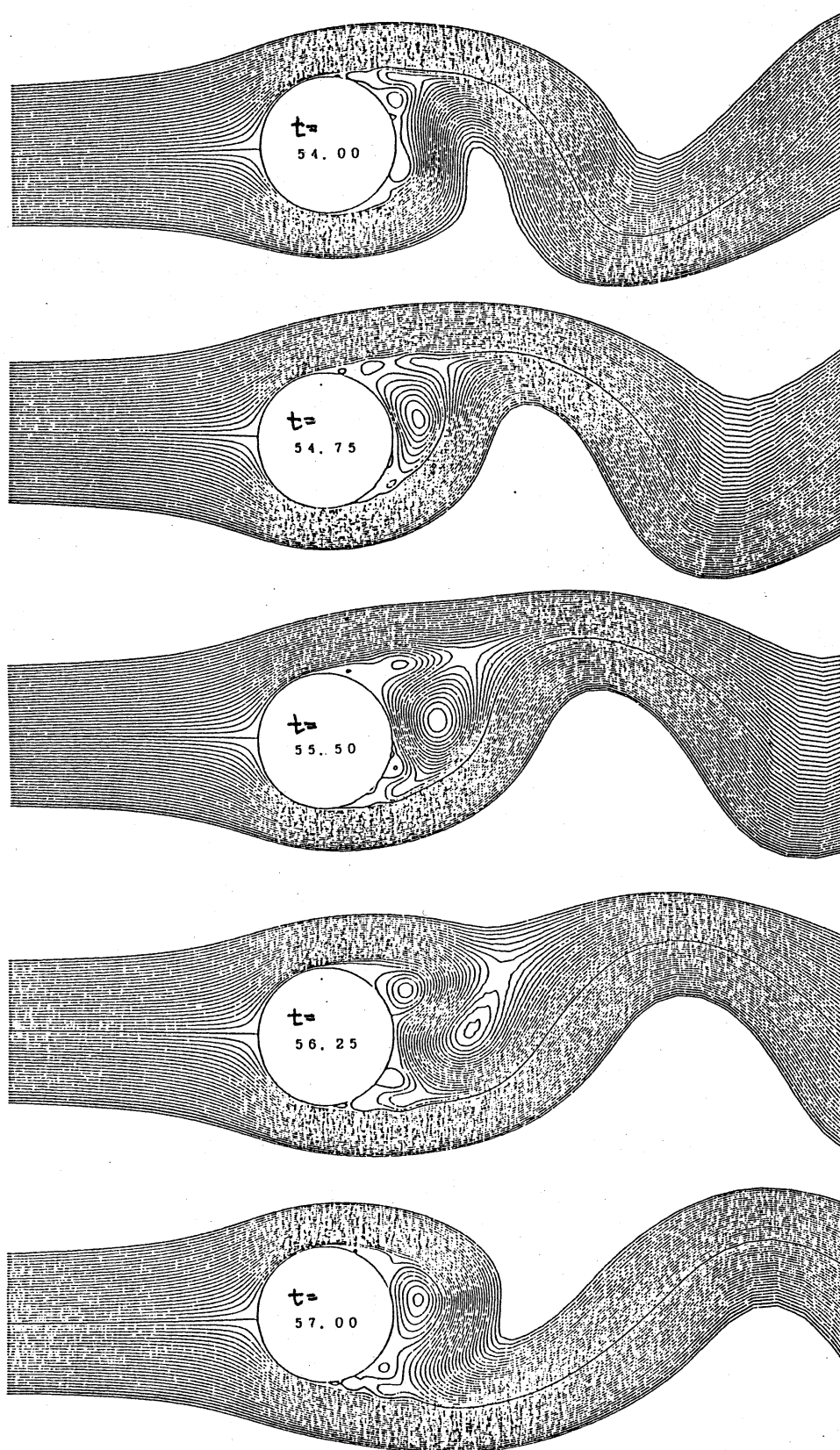


图 6. 流线,  $Re=10000$

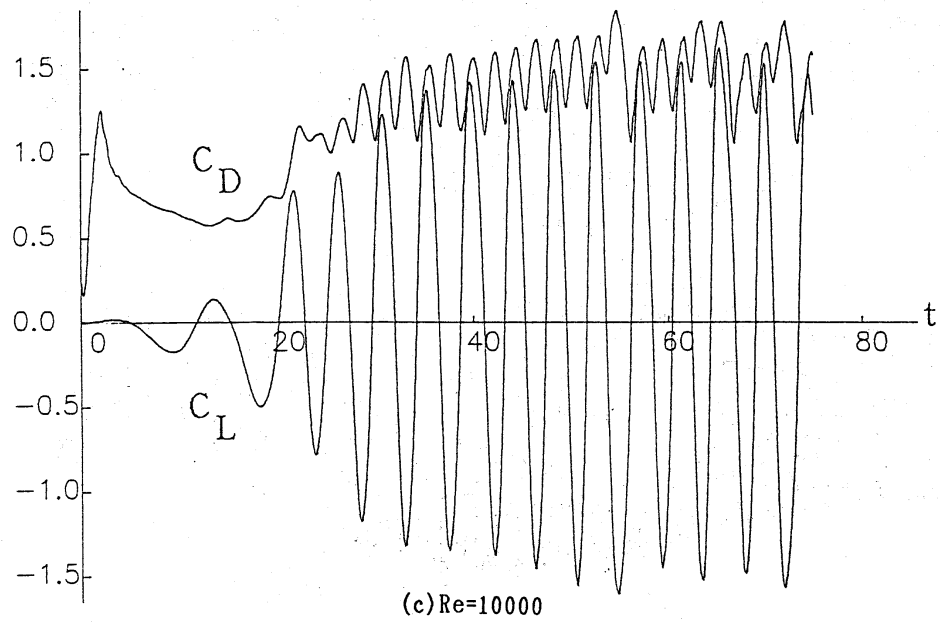
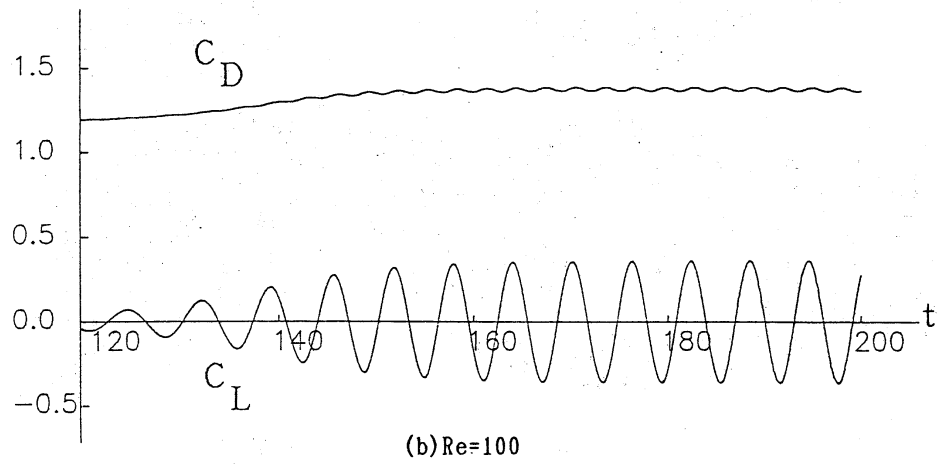
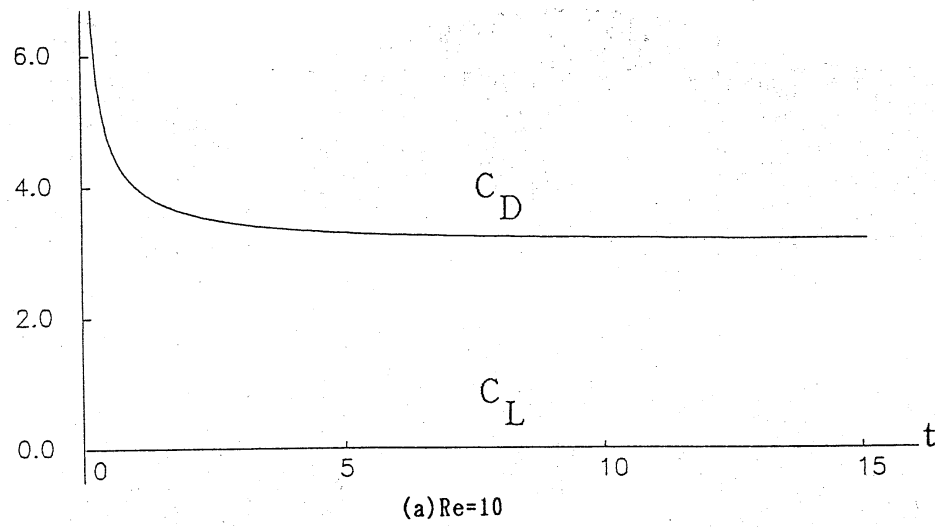


図7.  $C_D$ ,  $C_L$ の変化

部から多数の渦が発生するなど、流れの構造が複雑化する様子が捉えられた。抗力係数の値では本計算の結果と実験結果[6]とはよく一致しており、近似の有効性が確かめられた。

## 5. 丸め誤差の効果

前節の円柱まわり流れ問題の計算では、スキーム、要素分割、入力データすべてが $x_1$ 軸に関して対称である。従って、その離散厳密解は対称である。しかし計算では非対称な結果(カルマン渦)が得られた。その原因は丸め誤差であると考えられる。

丸め誤差の効果を調べるために、 $Re=100$ の場合について単精度計算と倍精度計算の2通りの計算を行った。連続問題、離散化問題ともに $x_1$ 軸について対称であるが、計算結果は両方の場合とも $x_1$ 軸非対称なカルマン渦の状態が得られた。

つぎに、初期値からカルマン渦への遷移過程を調べる。

図8に流速と圧力の変化率,

$$\max |u^{n+1} - u^n| / U \tau, \quad \max |p^{n+1} - p^n| / P \tau$$

(但し、 $U$ は代表速度、 $P$ は代表圧力)の時間変化を示す。また、図9に円柱に働く、抗力、揚力の係数,

$$C_D = 2 \int_{\Gamma_0} \tau_{1j} n_j ds, \quad C_L = 2 \int_{\Gamma_0} \tau_{2j} n_j ds$$

の時間変化を、図10に $\log_{10}|C_L|$ の時間変化を示す。

図8より、計算開始からしばらくは、流れは定常な流れ(双子渦の状態)に近づく。しかし、ある時点から流れは時間変化率が增大し、やがて周期的に変化する状態になる。これがカルマン渦の状態である。

このように流れが $x_1$ 軸対称な流れから非対称な流れに遷移する原因は丸め誤差の効果にある。 $x_1$ 軸対称な流れの場合には $C_L = 0$ であるが、計算開始直後から丸め誤差に応じた量の $C_L$ が生じていることが図10よりわかる。これは丸め誤差のため流れに乱れが加わったことに起因している。 $x_1$ 軸対称な流れは安定ではないためこの乱れは指数的に増幅する。

このように、問題の設定の中に作為的な攪乱を加えることなく、丸め誤差の効果だけを使ってカルマン渦を計算できた。

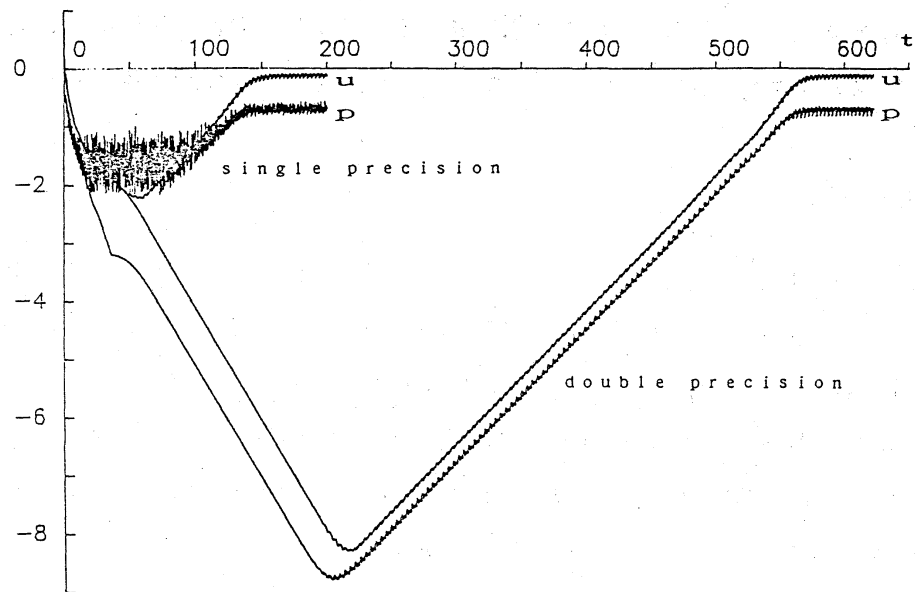


図8. 流速と圧力の変化,  $Re=100$ .

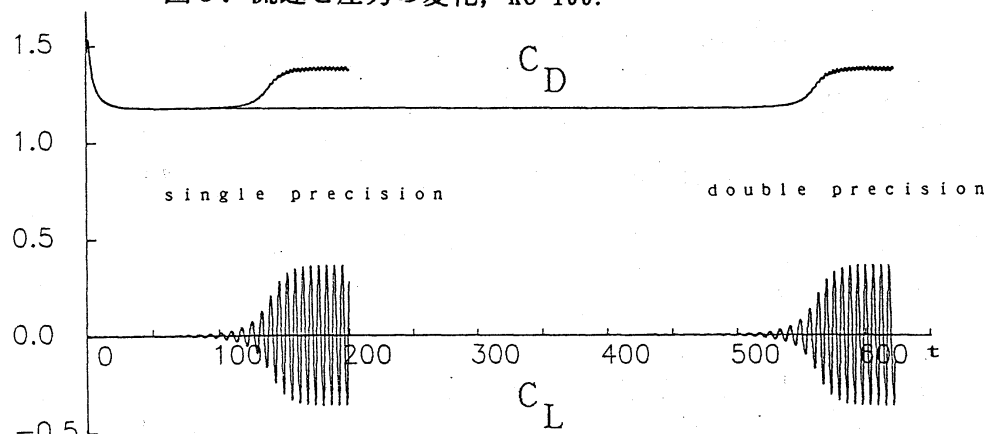


図9.  $C_D$ ,  $C_L$  の変化,  $Re=100$ .

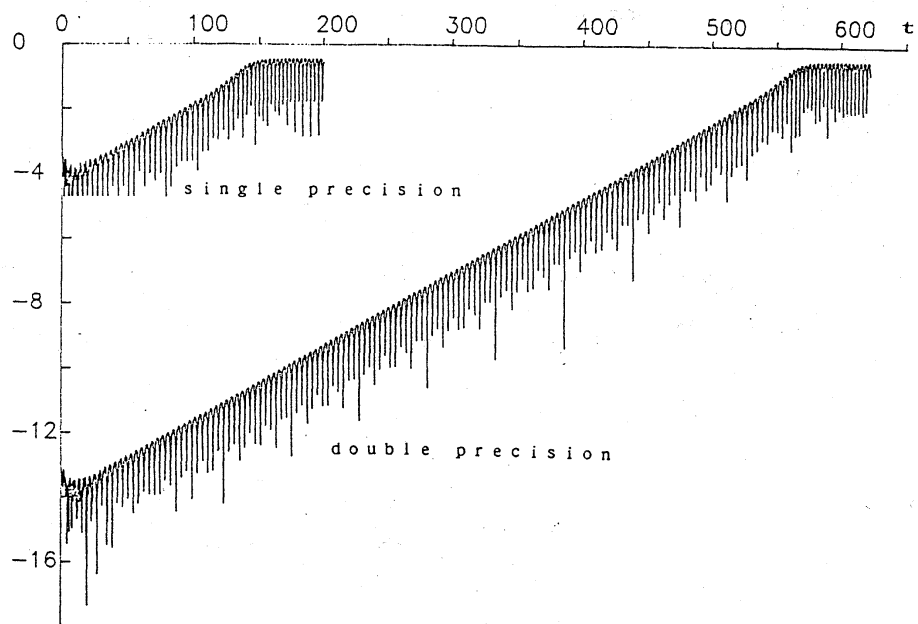


図10.  $\log_{10}|C_L|$  の変化,  $Re=100$ .

## 6. おわりに

単精度計算では丸め誤差が大きいため、カルマン渦への遷移は短い時間で終了する。得られるカルマン渦の様子は倍精度計算とほぼ同じである。これに対して、倍精度の計算では遷移に長い時間を要するため、カルマン渦を得るには長い計算時間を要するが、遷移の様子をよく観察することができる。 $\log|C_L|$ はカルマン渦へ遷移するかの判定のパラメータとして適切である。Re=10では、 $\log|C_L|$ は増大せず、対称な数値解に収束することが確認できている。

物理現象では、流体中の不純物や物体表面の粗さなどにより、流れに微小な攪乱が加わる。これに対して数値実験で、実数の内部表現による丸め誤差の効果により、流れに微小な攪乱を取り入れることは、自然な計算法と言える。

計算には、東京大学大型計算機センターHITAC M-680Hを使用した。

## 参考文献

- [1] Kawamura, T., Takami, H., Kuwahara, K.: New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations, Proc. 9th Int. Conf. on Numer. Meth. in Fluid Dyn., Springer, 291-295(1985).
- [2] Kawamura, T., Kuwahara, K.: Computation of higher Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness, AIAA-84-0340.
- [3] Bercovier, M., Pironneau, O.: Error estimates for finite element method solution of the Stokes problem in the primitive variables, Numer. Math., 33 (1979), 211-224.
- [4] Tabata, M.: A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing, Memoirs of Numerical Mathematics, 4(1977), 47-63.
- [5] Leonard, B.P.: The QUICK algorithm: a uniformly third-order finite-difference method for highly convective flows, Computer Methods in Fluids, 159-195 (Eds. Morgan K. and Brebbia, C.A., Pentech Press, 1980).
- [6] Schlichting, H.: Boundary-Layer Theory(7th ed.), McGraw-Hill, New York, 1979.
- [7] Tabata, M., Fujima, S.: A finite element scheme for the Navier-Stokes equations using a third-order upwind approximation, Proc. 7th Int. Conf. on Finite Element Methods in Flow Problems, 1034-1039 (Eds. Chung, T.J. et al., Univ. Alabama in Huntsville Press, 1989).
- [8] 田端正久: 高レイノルズ数流れ問題の有限要素解析, 日本数学会応用数学分科会講演アブストラクト(1989.9).