

Cesàro和を不変にする generalized limit の 存在とその性質について

東大 教養 水鳥 哲也

実有界数列の Banach limit の特徴は、数列の移動に対して不変な値をもつことである。[Banach: 1]

この論文では、Banach limit の対比として、Cesàro 和不変極限を定義し、その極限の存在および性質について考察した。

§ 1. では、Cesàro 和不変極限の定義から導かれる諸性質、および Banach limit との相互関係を列挙する。§ 2. では、Cesàro 和不変極限の存在定理を示す。その証明は、Banach limit の場合と同様に、三種類の方針による別々の方法がある。§ 3. では、数列の almost convergence の理論を用いて、平均一様収束性が Banach limit の特徴の一つであることを示した。§ 4. では、Cesàro 和不変極限の応用例として、Ergode 理論における、移動不変な有限測度の構成につ

いて述べる。

1. Cesàro 和不変極限の性質. 実有界数列

空間を m , m の上の線型汎関数 l が一般化極限であるとは、(i) l は positive, すなわち m の元 $x = (x_n)$ に対して $(\forall n) x_n \geq 0$ ならば $l(x) \geq 0$, (ii) 単位数列 $e = (1, 1, 1, \dots)$ に対して $l(e) = 1$ を満たすことと定義する。

Banach limit, Cesàro 和不変極限 および **積不変極限** は、それぞれ次の性質をもつ一般化極限のことである: m の元 $x = (x_n)$ に対して、

$$(\text{Banach}) \quad l(x_n) = l(x_{n+1})$$

$$(\text{Cesàro 和不変}) \quad l(x_n) = l\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)$$

$$(\text{積不変}) \quad l(x_n y_n) = l(x_n) \cdot l(y_n).$$

これらの不変極限の集合を L_T , L_S および L_u と書く。

(1) $l \in L_S$ ならば $\forall x = (x_n) \in m$ に対して

$$l(0, x_2, x_3, \dots) = l(0, x_3, x_4, \dots).$$

(証明) l の Cesàro 和不変性から

$$l(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) = 0.$$

したがって、 l の positivity より任意の (x_n) に対して

$$l(0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots) = 0.$$

$$\begin{aligned} \therefore l(x_n) - l(x_{n+1}) &= l(x_n - x_{n+1}) \\ &= l(\frac{x_1 - x_{n+1}}{n}) \\ &= l(x_1 - x_2, 0, 0, 0, \dots) \end{aligned}$$

となって、標記を得る。

$$(2) \quad L_T \cap L_U = \phi, \quad L_S \cap L_U = \{l_1\}.$$

ただし、線型汎関数 $l_1(x_n) = x_1$ と定める。

$$(3) \quad l \in L_S \text{ のとき } \quad \begin{aligned} l(e_1) = 0 &\leftrightarrow l \in L_T, \\ l(e_1) = 1 &\leftrightarrow l \in L_U. \end{aligned}$$

ただし、数列を $e_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$ とする。

(証明) 数列 $x = (1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots)$ の評価から

$$L_T \cap L_U = \phi$$

を得る。次に $l \in L_S$ とする。性質(1)を適用して

$$l(e_1) = 0 \rightarrow l \in L_T$$

が示される。また $l(e_1) = 1$ を仮定すれば、 l の positivity から、任意の $x = (x_n) \in m$ に対して

$$l(0, x_2, x_3, x_4, \dots) = 0.$$

$$\begin{aligned} \ell(x_n) &= x_1 \cdot \ell(e_1) + \ell(0, x_2, x_3, x_4, \dots) \\ &= x_1, \end{aligned}$$

すなわち、 ℓ は evaluation mapping ℓ_1 に等しいから

$$\ell(e_1) = 1 \rightarrow \ell \in L_u.$$

逆に $\ell \in L_S \cap L_u$ を仮定すれば、積不変性から

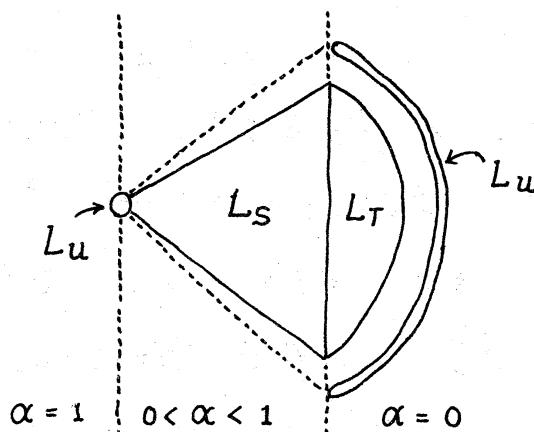
$$\ell(e_1) = 0, \text{ または } 1.$$

$L_T \cap L_u = \emptyset$ だから、 $\ell(e_1) = 0$ の場合は排除される。よって $\ell(e_1) = 1$ であり、また ℓ は ℓ_1 に一致する。

(4) L_T, L_S は w^* -compact, convex.

(5) $\text{extr}(L_S) = \{\ell_1\} \cup \text{extr}(L_T \cap L_S).$

このように、 $\alpha = \ell(e_1)$ は特徴的なパラメータで、その値によって、それぞれの一般化極限は図のように分類される。



2. Cesàro 和不変極限に関する存在定理. m の

上の operator

$$T(x_n) = (x_{n+1}), \quad S(x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

に対して、 m の 部分空間

$$M = \text{range}(id - T), \quad N = \text{range}(id - S)$$

と定める。このとき $x = (x_n) \in m$ に対して

$$x \in M \iff \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \in m$$

$$x \in N \iff \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{i-1} \right) \in m.$$

ただし、最後の数列については、第一項を x_1 と置く。

定理 1 次の性質をみたす、 ℓ_1 とは異なる、 m 上の線型汎関数 ℓ が存在する。

$$(i) \quad \ell(e) = 1$$

$$(ii) \quad \|\ell\| = 1$$

$$(iii) \quad \forall x \in m \quad \ell(x) = \ell(Sx)$$

定理 2 次の性質をみたす、 m 上の線型汎関数 ℓ , および m の元 a 。が存在する。

$$(i) \quad \ell(e) = 1$$

$$(ii) \quad \|\ell\| = 1$$

$$(iii) \quad \forall x \in m \quad \ell(x) = \ell(Tx)$$

$$(iv) \quad l(a_0) \neq l(Sa_0)$$

定理 1 は、Cesàro 和不変極限の存在を、定理 2 は、Cesàro 和を不変にしない Banach limit の存在を示している。

(定理 1 の証明) m の元 $e' = (0, 1, 1, 1, \dots)$ とすると、 e' と部分空間 N との距離 $d = \inf_{x \in N} \|e' - x\|_\infty$ は 1 以上である。この e' に関して、Hahn-Banach の拡張定理を用いれば、性質 (i) $l(e') = d$, (ii) $\|l\| = 1$, (iii) $l|_N = 0$ を持つ線型汎関数 l を得る。 $d \leq \|l\| \cdot \|e'\|_\infty$ より $d = 1$ 。したがって、 l は positive. とくに $l(e) = 1$ だから $l(e_1) = l(e) - l(e') = 0$ となって、確かに $l \neq l_1$ である。(証明終り)

定理 2 の証明の準備として、数列 $c_0 = (c_n)$ を次のように構成する：

$$(1) \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1$$

$$(2) \quad N_k < n \leq N_{k+1} \text{ ならば } c_n = (-1)^k.$$

ただし、自然数の列 $\{N_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ は、帰納的に、

$$(a) \quad N_1 = 2$$

(b) $k+1$ が偶数のとき N_{k+1} は $\sum_{n=2}^{N_{k+1}-1} \frac{c_n}{n-1} > 0$, $\sum_{n=2}^{N_{k+1}} \frac{c_n}{n-1} \leq 0$

(c) $k+1$ が奇数のとき N_{k+1} は $\sum_{n=2}^{N_{k+1}-1} \frac{c_n}{n-1} < 1$, $\sum_{n=2}^{N_{k+1}} \frac{c_n}{n-1} \geq 1$

となるように決める。

定義から、 $c_0 \in N$ 。一方、 $S_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} N_{k+1} - N_k$ は k に関して単調増大となるから $c_0 \in M$ 。

(定理 2 の証明) m の部分空間 $M' = M + \mathbb{R}c_0$ 。
 $+ \mathbb{R}e$ 上の写像 l を

$$x \in M, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : l(x + \alpha c_0 + \beta e) = \alpha + \beta$$

と定義する。 l は M' 上の線型汎関数で、性質 (i)

$l(e) = 1$, (ii) $\|l\|_{M'} = 1$, (iii) $l|_M = 0$,
 (iv) $l(c_0) = 1$ をみたす。とくに、(ii) では、
 c_0 の選び方が重要な役割を果たしている。

したがって、 M' 上の線型汎関数 l を、norm 不変
 のまま m 全体に拡張したものが求める線型汎関数となる。
 このとき (iv) は、 $c_0 \in N$ だから、 $c_0 = a_0 - Sa_0$ 。
 となる m の元 a_0 に関して

$$l(a_0) \neq l(Sa_0)$$

を示している。(証明終り)

尚、定理 1 の別証明としては、不動点定理 (cf. [Day: 3]), および semi-norm 有界に関する Hahn-

Banachの拡張定理を用いる方法とがある。前者は、operator T, S の一般化を、後者は極限の係数に対する依存性を示唆する。

(別証明1) m^* の部分空間 K を

$$K = \{ l \in m^* : l(e) = \|l\| = 1 \} \\ \cap \{ l \in m^* : l(e_1) = l(0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) = 0 \}$$

とすれば、求める Cesàro 和不変極限は、dual operator S^* についての K 中の不動点に他ならない。

(別証明2) m 上の operator R 、および sublinear functional p を

$$R(x_n) = \left(\frac{\sum_{i=2}^n \frac{x_i}{i-1}}{\sum_{i=2}^n \frac{1}{i-1}} \right) \quad (\text{第-項は } x_1)$$

$$p(x_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} R(x_n)$$

と定義すれば、 m の任意の元 $x = (x_n)$ に対して

$$p(x - Tx) = p(x - Sx) = 0$$

だから、 p -有界な線型汎関数が求める不変極限を与える。

3. Banach limit の一様収束性. 任意の

$x = (x_n) \in m$ に対して、Banach limit に関する極大・極小値は次の関係式で与えられる。[Jerison : 4]

$$\sup\{l(x): l \in L_T\} = \lim_n (\sup_j \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{j+n-1} x_i)$$

$$\inf\{l(x): l \in L_T\} = \lim_n (\inf_j \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{j+n-1} x_i).$$

したがって、この系として次を得る。[Sucheston: 5]

$x = (x_n)$ が $s \in \mathbb{R}$ に almost convergent
(すなわち、すべての Banach limit l に対して $l(x) = s$) であることの必要十分条件は、

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{j+n-1} x_i = s$$

が j に関して一様収束することである。

命題 $\bar{M} = \bigcap \{l^{-1}(0) : l \in L_T\}$

(証明) $\bar{M} \supset \bigcap l^{-1}(0)$ を示せばよい。

$x \in \bigcap l^{-1}(0)$ を仮定すれば、 x は 0 に almost convergent である。したがって、上のことから

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=j}^{j+n-1} x_i = 0 \quad (j \text{ に関して一様}).$$

今、任意の $\epsilon > 0$ に対して、次のような n_ϵ を固定する：
 $|\sum_{i=j}^{j+n_\epsilon-1} x_i| \leq n_\epsilon \cdot \epsilon \quad (j \text{ に関して一様}).$

$\Delta_k = \sum_{i=kn_\epsilon+1}^{(k+1)n_\epsilon} x_i$ として、数列 $y = (y_n)$ を

$$kn_\epsilon < n \leq (k+1)n_\epsilon \quad \text{ならば} \quad y_n = x_n - \frac{\Delta_k}{n_\epsilon}$$

と定義すれば、 y は M の元で、 $\|y - x\|_\infty < \epsilon$ を満たす。よって $x \in \bar{M}$ が示された。

4. Cesàro 和不変極限の応用. Ergode 理論
では、確率空間 $(X, \mathcal{O}, \mu)$ の上の 全単射、non-singular な可測変換 τ に対して、

(*) μ と同値で、 τ -不変な有限測度が存在することの 必要十分条件が多数求められている。ここでは、Cesàro 和不変極限の応用として、次の条件の十分性を証明する。

命題 $\forall A \in \mathcal{O} : \mu(A) > 0 \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu(\tau^i A) > 0$
が成立するとき、(*) は正しい。

(証明) $\mathcal{L}$ を Cesàro 和不変性をもつ Banach limit の一つとして固定する。 X 上の有限加法的測度 P を次のように定義する：

$$A \in \mathcal{O} : P(A) = \mathcal{L}(\mu(\tau^n A)).$$

P は μ と同値であり、同時に τ -不変である。

実際、 τ -不変性は、 $\mathcal{L}$ が Banach limit であることの帰結。また μ -同値については、 $\mathcal{L}$ の Cesàro 和不変性から次の不等式を利用する。

$$\begin{aligned} P(A) &= \mathcal{L}(\mu(\tau^n A)) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu(\tau^i A)\right) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu(\tau^i A)\right) \end{aligned}$$

命題の仮定から、 $\mu(A) > 0$ であれば 不等式の最後の項は 正。したがって、 $P(A) > 0$ となって μ -同値が示された。

Calderón の補助定理により、 P から μ -同値な、 τ -不変測度 を構成することができる。[Calderón : 2]
これが求める有限測度である。

REFERENCES

1. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932.
2. A. P. Calderón, Sur les mesures invariantes, C. R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), 1960-1962.
3. M. M. Day, Normed linear spaces, Third edition, Chap. V, Springer, 1973.
4. M. Jerison, The set of all generalized limits of bounded sequences, Canad. J. Math. 9 (1957), 79-89.
5. L. Sucheston, On existence of finite invariant measures, Math. Zeit. 86 (1964), 327-336.