

非線形エルゴート定理における 弱, 及び強収束定理

東工大 大学院理工学研究科 加田修 (OSAMU KADA)

1. はじめに

$\mathbf{Z}, \mathbf{Z}^+, \mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{R}^+$ をそれぞれ整数全体の集合, 負でない整数全体の集合, 自然数全体の集合, 実数全体の集合, 負でない実数全体の集合とする.

C を実 Hilbert 空間 H の空でない閉部分集合とする. 写像 $T: C \rightarrow C$ は, 次の条件を満たすとき nonexpansive mapping といわれる:

$$\text{任意の } x, y \in C \text{ に対して } \|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

最初の nonexpansivemapping に対するエルゴード定理は Baillon [1] によって次のように得られた:

定理 A C を空でない閉かつ凸な H の部分集合とし, T を C から C への nonexpansivemapping とする. もし T が不動点を持てば, Cesàro means $(1/n) \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$ は T の不動点 y に弱収束する. もし $C = -C$ で T が odd, (すなわち, $T(-x) = -T(x)$) ならば, Sx はある T の不動点 y に強収束する.

このとき $x \in C$ に対して $y = Px$ とおくと P は C から不動点集合 $F(T)$ の上への nonexpansiveretraction となり, $n \in \mathbf{Z}^+$ に対して $PT = TP = P$ で $x \in C$ に対して $Px \in \text{clco}\{T^n x; n \in \mathbf{Z}^+\}$ となっている. ここで $\text{clco}A$ は A の凸包の閉包である.

$S = \{T(s); s \in \mathbf{R}^+\}$ を C から C への nonexpansive mappings の family とする. このとき S は次を満たすとき C 上の nonexpansive semigroup という: $T(s+t) = T(s)T(t)$ ($\forall s, t \in \mathbf{R}^+$), かつ写像 $t \mapsto T(t)x$ は任意の $x \in C$ に対して連続. Baillon と Brézis [5] は次の定理を証明した:

定理 B もし S の共通不動点集合 $F(S)$ が空でないとすると, $(1/t) \int_0^t T(s)x ds$ は $t \rightarrow \infty$ のときある共通不動点 y に弱収束する.

このとき $y = Px$ とおくと, P は C から $F(S)$ の上への nonexpansive retraction で, $PT(s) = T(s)P$, $s \in \mathbf{R}^+$, かつ $Px \in \text{clco}\{T(s)x; s \in \mathbf{R}^+\}$, $x \in C$ となっている.

定理 A, B のような P を Ergodic retraction という. 定理 A は, $S = \mathbf{Z}^+$, 定理 B は $S = \mathbf{R}^+$ でいずれも Hilbert 空間のとき, ある mean の net が ergodic retraction に弱, 又は強収束することをいっている. エルゴート定理において, この ergodic retraction $P(=T(\mu))$ が unique に存在することが本質的である. この unique な存在を仮定してみる. $\{\mu_\alpha\}$ を asymptotically invariant な mean の net; 例えば $S = \mathbf{Z}^+$ で, $\mu_\alpha = \mu_n = (1/n)(\sum_{i=0}^{n-1} \delta(i))$ (3 章参照) とする. $r(s)$ を s だけ shift する operator とする. $\{s_\beta\}$ を S の 任意の subnet とし, μ を $\{r(s_\beta)^*\mu_\alpha\}_{(\alpha,\beta)}$ の cluster point, $\{(\alpha',\beta')\}$ を $\{(\alpha,\beta)\}$ の subnet で $\{r(s_{\beta'})^*\mu_{\alpha'}\} \xrightarrow{w^*} \mu$ となるものとする. すると μ は invariant mean となり, $T(r(s_{\beta'})^*\mu_{\alpha'})x$ は $T(\mu)x$ に弱収束する. $T(\mu)$ が unique なので, $T(r(s_\beta)^*\mu_\alpha)x$ は $T(\mu)x$ へ弱収束する. $\{s_\beta\}$ は S の 任意の net なので, これは $T(r(s)^*\mu_\alpha)x$ が $s \in S$ に関して一様に $T(\mu)x$ へ弱収束することがわかる (ここで, 例えば T を nonexpansive とし, $T(n)x = T^n x$ とすると, $T(\mu_n)x = (1/n)(\sum_{i=0}^{n-1} T^i x)$ となり, 定理 A が得られる).

この ergodic retraction の存在は Hilbert 空間において, 非可換である amenable semigroup に対して Takahashi [40] によって証明され, uniformly convex な Banach 空間において 可換な semigroup に対して Hirano, Kido and Takahashi [16] によって証明された.

我々は Banach 空間において 非可換な semigroup に対しての ergodic retraction に関する定理を得たので 2 節で報告する. 3 節では, nonexpansive semigroup 上の almost orbit を拡張した almost nonexpansive curve のエルゴート定理を, 4 節では 可換な semigroup 上の強エルゴート定理について報告する.

2. Asymptotically Invariant Net と 不動点集合

S は 次が成り立つとき, semitopological semigroup という: Hausdorff topology をもった semigroup で, $\forall t \in S$ に対して, S から S への写像 $s \mapsto st$, $s \mapsto ts$ が連続.

E を 実 Banach 空間, $C_b(S, E)$ を S から E への 有界連続写像 からなる sup norm による Banach 空間とおく. $\mu \in C_b(S)^*$ が $C_b(S)$ 上

の mean であるとは, $\|\mu\| = \mu(1) = 1$ のときをいう. これは又, $\forall f \in C_b(S)$, $\liminf f(s) \leq \mu(f) \leq \overline{\lim}_{s \in S} f(s)$ と同値である. この μ に対して, vector valued mean $\tau(\mu)$ を定義する. すなわち

$$\tau(\mu) \in L(C_b(S), E)$$

で, $\|\tau(\mu)\| = 1$, $\tau(\mu)x = x$, $x \in E$ となるものである. ここで, Banach 空間 E, F に対して $L(E, F)$ は E から F への有界線形写像からなる Banach 空間である. S を位相空間, $C_C(S, E) := \{f \in C_b(S, E); f(S) \text{ が 相対弱 compact } \}$ とおく.

定義 ([13, 40, 23, 17]) $f \in C_C(S, E)$, $\mu \in C_b(S)^*$ に対して $x_{\mu, f}^{**} : x^* \mapsto \mu_s \langle f(s), x^* \rangle (\in E^{**})$ とおくと $x_{\mu, f}^{**} \in E$. $\tau = \tau^E \in L(C_b(S)^*, L(C_C(S, E), E))$ を $\tau(\mu)f = x_{\mu, f}^{**}$ で定義する. これは well defined であることがわかる. 次が成り立つ.

命題 ([23])

- (i) $\|\tau(\mu)f\| \leq \|\mu\| \|f\|$,
- (ii) $\tau(\mu)x = \mu(1)x$,
- (iii) $\delta(s) \in C_b(S)^*$, $\delta(s)f = f(s)$, $f \in C_b(S)$, $\varepsilon(s) \in L(C_C(S, E), E)$, $\varepsilon(s)g = g(s)$, $g \in C_C(S, E)$ とおくと, $\tau(\delta(s)) = \varepsilon(s)$;
- (iv) S : semitopological semigroup とすると, $\mu \in C_b(S)^*$, $s \in S$ に対して, $\tau(r(s)^*\mu) = r(s)^*\tau(\mu)$.

この性質を使うと, mean を使った計算が簡明になる.

S を semitopological semigroup とし, $S = \{T(s); s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とし, 共通不動点集合 $F(S)$ が空でないとする. このとき, $T(\cdot)x \in C_C(S, E)$ である. $T(\mu)x := \tau(\mu)(T(\cdot)x)$ とおく. すなわち, $\forall x^* \in E^*$ に対して,

$$\langle T(\mu)x, x^* \rangle = \langle \tau(\mu)(T(\cdot)x), x^* \rangle = \mu_s \langle T(s)x, x^* \rangle.$$

$$l^1(S) := \{f : S \rightarrow \mathbf{R}; \|f\|_1 := \sum_{s \in S} |f(s)| < \infty\},$$

$$l^\infty(S) := \{f : S \rightarrow \mathbf{R}; \|f\|_\infty := \sup_{s \in S} |f(s)| < \infty\}$$

とおく. すると $l^1(S)^* = l^\infty(S)$ である. $(l(s)f)(t) = f(st)$, $(r(s)f)(t) = f(ts)$ とおく.

E を uniformly convex Banach space, C を E の 非空な有界凸集合, $S = \{T(s); s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする. 我々は次

の定理を得た.

定理 ([21])

(a) $C_b(S)$ が left invariant mean を持つと仮定すると, finite mean の net $\{\lambda_\alpha\}$ が存在し,

$$\lim_{\alpha} \|T(l(t)^*\lambda_\alpha)x - T(l(ts)^*\lambda_\alpha)x\| = 0 \quad \text{uniformly in } t \in S \ (\forall s \in S, \forall x \in C).$$

(b) S : right reversible とすると, $\forall x \in C, \forall$ finite mean λ on $C_b(S)$ に対して,

$$\lim_{t \in S} \|T(s)T(l(t)^*\lambda)x - T(l(st)^*\lambda)x\| = 0 \quad \text{uniformly in } s \in S. \text{ ここで, finite mean とは, } \text{co}\{\delta(s); s \in S\} \text{ の元のことである.}$$

(a) については, $\|T(l(t)^*\lambda_\alpha)x - T(l(ts)^*\lambda_\alpha)x\| \leq \|\lambda_\alpha - l(s)^*\lambda_\alpha\|$ なので, 可換のときは Day の定理 [12] より成り立つ. 非可換のときは Mackey topology $\tau(l^1(S), C_b(S))$ を考えることになる. このとき,

$$\{\langle T(t) \cdot x, x^* \rangle; t \in S, x^* \in B(E^*)\}$$

の absolutely convex hull が $\sigma(C_b(S), l^1(S))$ - 相対 compact であることを証明することが必要になり, この Lemma は有用である.

(b) について: S を可換とし $\lambda = \sum_{i=1}^n a_i \delta(s_i)$: finite mean とする. このとき, Hirano, Kido and Takahashi [15] より,

$$\begin{aligned} & \lim_{t \in S} \|T(s)T(\lambda)T(t)x - T(\lambda)T(s)T(t)x\| \\ &= \lim_{t \in S} \left\| T(s) \sum_{i=1}^n a_i T(s_i)T(t)x - \sum_{i=1}^n a_i T(s_i)T(s)T(t)x \right\| \\ &= 0, \quad \text{uniformly in } s \in S. \end{aligned}$$

すなわちこれは, $T(s)$ は十分時間が経った orbit 上ではほとんど affine であることを言っているが, (b) はこの noncommutative semigroup の version である.

これらを使って, 次の定理を証明できる.

定理 ([21]) S を semitopological semigroup とし, E を uniformly convex Banach space, C を 非空な 有界閉凸集合 な E の 部分集合 とし, $S = \{T(s); s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする.

μ を $C_b(S)$ 上の mean とし, $\Lambda(S) := \{s \in S; st = ts, \forall t \in S\}$, S の algebraic center とする. 次が成り立つ.

- (a) $T(\mu)$ は C 上 nonexpansive;
- (b) $T(\mu)x \in F(S)$ ($\forall x \in C$) とすると, $T(\mu)$ は C 上 retraction である;
- (c) S を right reversible な semigroup, μ をある right invariant mean とする. このとき,
 - (i) $T(\mu)T(s) = T(\mu), \forall s \in S$;
 - (ii) $T(s)T(\mu) = T(\mu), \forall s \in \Lambda(S)$;
 - (iii) $T(\mu)x \in \bigcap_{s \in S} \text{clco} \{T(t)x; t \geq s\}, \forall x \in C$.

これは Hirano, Kido and Takahashi [16] を拡張している.

(注意) [18] では次を証明している: S を right Eberlein-weakly almost periodic (すなわち $\{T(s)x; s \in S\}$ が $C_b(S, E)$ のなかで 相対弱 compact) を仮定すると, (b) $T(\mu)x \in F(S)$ がいえる. よって, (c) (ii) が $\forall s \in S$ に対して言える.

3. 可換な semigroup 上での Almost Nonexpansive Curve

S を 可換な semigroup, H を Hilbert 空間 とする. $u : S \rightarrow H$ が almost nonexpansive curve (ANC) であるとは, $\varepsilon(\cdot, \cdot) : S \times S \rightarrow \mathbf{R}$ が存在して, $\forall s, t, h \in S$ に対して,

$$\begin{aligned} \|u(s+h) - u(t+h)\|^2 &\leq \|u(s) - u(t)\|^2 + \varepsilon(s, t) \\ \lim_{s, t \rightarrow \infty} \varepsilon(s, t) &= 0. \end{aligned}$$

ここで例を与えよう. 次のコーシー問題を考える:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) \ni f(t), & t > 0 \\ u(0) = x, \end{cases} \quad (*)$$

A を H での maximal monotone operator, $f \in L^1(0, \infty; H)$, $x \in \text{cl} D(A)$.

(*) は, unique な integral solution $u(t)$ をもつ. この $u : \mathbf{R}^+ \rightarrow H$ は ANC となる.

$$\text{ここで, } \varepsilon(s, t) = \int_s^\infty \|f(\theta)\| d\theta + \int_t^\infty \|f(\theta)\| d\theta.$$

一般にある nonexpansive semigroup の almost orbit は ANC となる.

$u : S \rightarrow H$ は “curve” なので, 不動点集合を定義できない. それに代わるものとして次の集合を定義する:

$$F_1(u) := \{x \in H; \|u(t) - x\| \leq \|u(s) - x\|, t \geq s\},$$

$$F(u) := \{x \in H; \exists \lim_{s \in S} \|u(s) - x\|\},$$

X を translation invariant な $l^\infty(S)$ の部分空間とし, constant を含むものとする. X 上の invariant mean μ に対して,

$$F_\mu(u) := \{x \in H; \|u(t) - x\|^2 \leq \|u(s) - x\|^2 + \mu_t \varepsilon(s, t), t, s \in S, t \geq s\}.$$

一般に, $F_1 \subset F_\mu \subset F$ が成り立つ.

nonexpansive semigroup $S = \{T(s); s \in S\}$ に対して $F(S) \subset F_1(T(\cdot)x)$ である.

H を Hilbert 空間とし, C を H の 閉部分集合, $u : S \rightarrow C$, 有界, μ を X 上の submean ([30] 参照) とし, μ -asymptotic center を次で定義する:

$$\mu\text{-}AC(u, C) := \{x \in C; \mu_s \|u(s) - x\|^2 = \inf_{y \in C} \mu_s \|u(s) - y\|^2\}.$$

$u = T(\cdot)x$ の時は不動点の singleton となる. 我々は次の定理を得た.

定理 ([22]) $u : S \rightarrow H$ を almost nonexpansive curve とし, $\|u(\cdot) - y\|^2, \varepsilon(s, \cdot) \in X$, $y \in H$, $s \in S$, μ を invariant X 上の mean とし, $P : H \rightarrow F_\mu(u)$: metric projection とする. このとき, $Pu(s) \rightarrow u(\mu) \in \mu\text{-}AC(u, H)$. ここで, $u(\mu) = \tau(\mu)u$.

これは $S = \mathbf{Z}^+, \mathbf{R}^+$ のときでも ANC に対しては新しい結果である. P を H から $F(u)$ への metric projection とするときには強収束しない例がある (Rouhani [34] 参照). 又次の定理を得た.

定理 ([22]) $u : S \rightarrow H$: almost nonexpansive curve, $\|u(\cdot) - y\|^2, \varepsilon(s, \cdot) \in X$, $y \in H$, $s \in S$, $\{\mu_\alpha\}$ を (a) X 上の asymptotically invariant な net, 又は, (b) strongly regular な net とする. このとき,

$$u(r(s)^* \mu_\alpha) \rightarrow u(\mu) \in F(u) \cap \bigcap_{s \in S} \text{clco} \{u(t); t \geq s\}$$

$$= \mu\text{-}AC(u, H) \text{ uniformly in } s \in S.$$

ここで, net $\{\mu_\alpha\} \subset X^*$ が asymptotically invariant であるとは, 次のときをいう:

$$\mu_\alpha - r(s)^* \mu_\alpha \xrightarrow{w^*} 0 \quad (\forall s \in S).$$

又, net $\{\mu_\alpha\} \subset X^*$ が strongly regular であるとは, 次のときをいう:

1. $\sup_\alpha \|\mu_\alpha\| < \infty$;
2. $\lim_\alpha \mu_\alpha(1) = 1$;
3. $\lim_\alpha \|\mu_\alpha - r(s)^* \mu_\alpha\| = 0, \forall s \in S$.

ここで, strongly regular な net の例を挙げよう.

1. $\{\mu_n; n \in \mathbf{N}\}$, ここで, $\mu_n(f) = (1/n) \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$ for $f \in C_b(\mathbf{Z}^+) = l^\infty(\mathbf{Z}^+)$;
2. $\{\mu_s; s \in (0, 1)\}$, ここで, $\mu_s(f) = (1-s) \sum_{k=0}^{\infty} s^k f(k)$ for $f \in C_b(\mathbf{Z}^+) = l^\infty(\mathbf{Z}^+)$;
3. $\{\mu_n; n \in \mathbf{N}\}$, ここで, $\mu_n(f) = (1/n^2) \sum_{i,j=0}^{n-1} f(i, j)$ for $f \in C_b(\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+) = l^\infty(\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+)$;
4. $\{\mu_s; s \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}\}$, ここで, $\mu_s(f) = (1/s) \int_0^s f(t) dt$ for $f \in C_b(\mathbf{R}^+)$;
5. $\{\mu_s; s \in \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}\}$, ここで, $\mu_s(f) = s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, f \in C_b(\mathbf{R}^+)$;
6. $\{\mu_n; n \in \mathbf{Z}^+\}$, ここで, $\mu_n(f) = \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} f(m), f \in C_b(\mathbf{Z}^+) = l^\infty(\mathbf{Z}^+)$, そして, $\{q_{n,m}\}_{n,m \in \mathbf{Z}^+}$ は strongly regular matrix (Lorentz [27], Brézis and Browder [8]). $\{q_{n,m}\}_{n,m \in \mathbf{Z}^+}$ が strongly regular matrix であるとは, 次を満たすときを言う:

$$(a) \sup_{n \in \mathbf{Z}^+} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m}| < \infty;$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} = 1;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} |q_{n,m+1} - q_{n,m}| = 0.$$

7. $\{\mu_s; s \in \mathbf{R}^+\}$, ここで, $\mu_s(f) = \int_0^{\infty} Q(s,t)f(t)dt$, $f \in C_b(\mathbf{R}^+)$, $Q(\cdot, \cdot)$ は strongly regular kernel (Reich [32]). ここで, かんすう $Q: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ が strongly regular kernel であるとは次を満たすときを言う:

$$(a) \sup_{s \in \mathbf{R}^+} \int_0^{\infty} |Q(s,t)| dt < \infty;$$

$$(b) \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} Q(s,t) dt = 1;$$

$$(c) \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |Q(s,t+h) - Q(s,t)| dt = 0 \text{ for every } h \in \mathbf{R}^+.$$

次の系を得る.

系 1 (Rouhani [34]) $\{x(n); n \in \mathbf{Z}^+\}$ を有界な H の中の almost nonexpansive sequence とする. このとき, $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} x(i+k) \rightarrow y \in \overline{\text{lim-AC}}(x(\cdot), H)$ uniformly in $k \in \mathbf{Z}^+$.

系 2 (Rouhani [34]) $\{u(t); t \in \mathbf{R}^+\}$ を有界連続な H の中の almost nonexpansive curve とする. $\varepsilon(s, \cdot): \text{continuous}$ とする. このとき, $\frac{1}{s} \int_0^s u(t+h)dt \rightarrow y \in \overline{\text{lim-AC}}(u(\cdot), H)$ uniformly in $h \in \mathbf{R}^+$

系 3 $C(\subset H): \text{closed, convex}, T: C \rightarrow C, \text{nonexpansive}, \text{Fix}(T) \neq \emptyset$ とする.

(i) (Baillon [1]) このとき, $\forall x \in C, \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T^{i+k}x \rightarrow y \in \text{Fix}(T)$ uniformly in $k \in \mathbf{Z}^+$.

(ii) (Rodé [33]) $\forall x \in C, (1-s) \sum_{i=0}^{\infty} s^i T^{i+k}x \rightarrow y \in \text{Fix}(T)$ uniformly in $k \in \mathbf{Z}^+$.

(iii) (Brézis, Browder [8]) $\{q_{n,m}\}_{n,m \in \mathbf{Z}^+}: \text{strongly regular matrix}$ とする. $\forall x \in C, \sum_{m=0}^{\infty} q_{n,m} T^{m+k}x \rightarrow y \in \text{Fix}(T)$ uniformly in $k \in \mathbf{Z}^+$.

系 4 Hirano, Kido and Takahashi [16] H を Hilbert 空間, $C(\subset H): \text{閉凸}, T, S: C \rightarrow C \text{ nonexpansive } \text{で } TS = ST, \exists x_0 \in C, \{S^i T^j x_0; i, j \in \mathbf{Z}^+\}$

は有界とする. このとき,

$$\forall x \in C, \quad \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=0}^{h-1} S^{i+k} T^{j+k} \rightarrow y \in \text{Fix}(T) \cap F(S) \quad \text{uniformly in } h, k \in \mathbf{Z}^+.$$

系 5 $S = \{T(s); s \in S\}$: nonexpansive semigroup on C とする.

(i) (Baillon [1], Miyadera and Kobayasi [29]) $u: \mathbf{R}^+ \rightarrow C$ を有界な S の almost orbit とする. このとき,

$$\frac{1}{s} \int_0^s u(t+h) dt \rightarrow y \in F(S) (= A^{-1}(0)) \quad \text{uniformly in } h \in \mathbf{R}^+.$$

(ii) (Hirano, Kido and Takahashi [16]) 上と同じ仮定.

$$s \int_0^\infty e^{-st} u(t+h) dt \rightarrow y \in \text{Fix}(S) \quad \text{uniformly in } h \in \mathbf{R}^+.$$

(iii) (Reich [32]) 上と同じ仮定で, $Q(\cdot, \cdot)$ を strongly regular kernel とすると,

$$\int_0^s Q(s, t) u(t+h) dt \rightarrow y \in S \quad \text{uniformly in } h \in \mathbf{R}^+.$$

4. Asyptotically Isometric Semigroup

この章では, 強平均収束定理について説明する. S を commutative semigroup, C を closed, convex な E の部分集合, $D \subset C$, $S = \{T(s): s \in S\}$ を C 上の nonexpansive semigroup とする.

定義 S が D 上 asymptotically isometric であるとは次が成り立つときをいう:

$$\exists \lim_s \|T(s+h)x - T(s+k)y\| \quad \text{uniformly in } h, k \in S.$$

$s \leq t$ のとき $t = t' + s$ とおくと,

$$\begin{aligned} \|T(t+h)x - T(t+k)y\| &= \|T(t'+s+h)x - T(t'+s+k)y\| \\ &\leq \|T(s+h)x - T(s+k)y\| \end{aligned}$$

ゆえ 極限 は一般に存在するが, h, k に関する 一様性を要求する. これは Bruck [9] ($S = \mathbf{N}$), Oka [31] (S : commutative, totally ordered) の定義を拡張したものである. 次に例を挙げる.

例 (i) $T(s)$: isometry,

(ii) $\exists \{s_\alpha\} \subset S, T(s_\alpha)x \rightarrow \exists y$,

(iii) E : Hilbert space で $T(s)$ が affine, 又は odd mapping のとき.

次の定理を得た.

定理 ([23]) E を uniformly convex な Banach 空間, C closed で convex な E の部分集合, $D \subset C$ で, ある C 上の nonexpansive semigroup $S = \{T(s); s \in S\}$ が D 上 asymptotically isometric であるとする. このとき,

(a) 任意の $C_b(S)$ 上の invariant mean μ に対して, $T(\mu)$ は D から $F(S)$ の上への nonexpansive retraction で, $T(\mu)T(s) = T(s)T(\mu) = T(\mu)$ ($\forall s \in S$), $T(\mu)x \in \text{clco}\{T(t)x; t \in S\}$ ($\forall x \in C$) $\forall x \in D, F(S) \cap \bigcap_{s \in S} \{T(t)x; t \geq s\} = \{T(\mu)x\}$ となる. ここで $T(\mu)x = \tau(\mu)(T(\cdot)x)$.

(b) $\{\mu_\alpha\}$ を $C_b(S)$ 上の, strongly regular な net とすると, $T(r(h)^*\mu_\alpha)x \rightarrow y_0 = T(\mu)x = \tau(\mu)(T(\cdot)x) \in F(S)$ uniformly in $h \in S$.

(注意) [20] では, S の Eberlein-weakly almost periodic の仮定のもとに, 上の定理を非可換の場合に拡張している.

5. Vector Valued Weakly Almost Periodic Functions

一方 Ruess and Summers (1988,1992) は全く違った方法で強平均収束定理を証明した. これを説明しよう.

$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow E$ が Eberlein-weakly almost periodic であるとは次のことをいう: $\{r(s)f; s \in \mathbf{R}^+\} \subset C_b(S, E)$ が 相対弱 compact. このとき $\frac{1}{t} \int_0^t f(s+h)ds \rightarrow z \in E$ uniformly in $h \in \mathbf{R}^+$. 特に E を uniformly convex Banach space, C を E の閉凸な部分集合, $x \in C$, nonexpansive semigroup $S = \{T(s); s \in \mathbf{R}^+\}$ が asymptotically isometric on $\{x\}$ とする. このとき, $T(\cdot)x$ は Eberlein-weakly almost periodic となり, $\frac{1}{t} \int_0^t T(s+h)x ds \rightarrow z \in F(S)$ uniformly in $h \in \mathbf{R}^+$.

我々はこれを [17] で commutative semigroup に一般化し, ergodic projectin と ergodic retraction についての結果を得, 又ある Lipschitzian semigroup が Eberlein-weakly almost periodic であるための (必要) 十分条件を得た.

$W(S; E)$ を S から E への Eberlein-weakly almostperiodic 関数全体の集合とする. 次がその Eberlein-weakly almost periodic function に対する強エルゴート定理である.

定理 ([17]) $U(s) = r(s)$ を $W(S; E)$ 上の translationoperator とし, $\tau = \tau^E$, $\tau' = \tau^{W(S; E)}$ (2節参照) とする. このとき

(a) $C_b(S)$ 上の任意の invariantmean μ に対して, $U(\mu)f = \tau'(\mu)(U(\cdot)f) \in W(S; E)$; $f \in W(S; E)$ とおくと $(U(\cdot)f \in C_c(S, W(S; E)))$ に注意), $U(\mu)$ は $W(S; E)$ から E の上への nonexpansive projection となり, $U(\mu)U(s) = U(s)U(\mu) = U(\mu)$, $(\forall s \in S)$, $\{U(\mu)f\} = E \cap \text{clco}\{U(s)f; s \in S\}$, $(\forall f \in W(S; E))$ となる;

(b) $U(\mu)f = \tau'(\mu)(U(\cdot)f) = \tau'(\mu)f$, $f \in W(S; E)$;

(c) $\{\mu_\alpha\}$ を $C(S)$ の strongly regular な net とすると $\forall f \in F := W(S; E) \cap RUC_b(S; E)$, $\tau(r(h)^*\mu_\alpha)f \rightarrow y = U(\mu)f \in E$ uniformly in $h \in S$. $\{U(\mu)f\} = E \cap \text{clco}\{r(s)f; s \in S\}$. ここで $RUC_b(S; E)$ は S から E への一様有界連続関数からなる集合 i.e., $r(\cdot)f$ が連続である.

$V : C \rightarrow C$ に対して, $\|V\| := \sup\{\frac{\|Vx - Vy\|}{\|x - y\|}\}$ とおき, $\text{Lip}(C) := \{V; \|V\| < \infty\}$ とおく. $T : S \rightarrow \text{Lip}(C)$ を表現とする (すなわち $\{T(s); s \in S\}$ が Lipschitzian semigroup)

定義 $T : S \rightarrow \text{Lip}(C)$ が D 上の asymptotically regular な representation であるとは, $\lim_{s \in S} \|T(s+t)x - T(s)x\| = 0; (\forall t \in S, \forall x \in D)$ のときを言う.

上の定理の系として次を得る.

系 E を Banach 空間, C を E の 閉部分集合, D を C の部分集合, $U : S \rightarrow W(S; E)$ を translation のなす表現, $T : S \rightarrow \text{Lip}(C)$ が Eberlein-weakly almost periodic かつ D 上の asymptotically regular な表現, $K := \sup_{s \in S} \|T(s)\| < \infty$, μ を $C(S)$ 上の invariant mean とする. このとき次が成り立つ:

(a) $T(\mu)$ は D から $\text{Fix}(T)$ の上への Lipschitz な retraction で, $\|T(\mu)\| \leq K$, $T(\mu)T(s) = T(s)T(\mu) = T(\mu)$ $(\forall s \in S)$, $T(\mu)x \in \text{clco}\{T(s)x; s \in S\}$ $(\forall x \in D)$ となる;

(b) $\forall x \in D$ に対して, $T(t+s)x \rightarrow y = U(\mu)(T(\cdot)x) = T(\mu)x \in \text{Fix}(T)$ uniformly in $t \in S$.

ここで $T(\cdot)x$ が いつ Eberlein-weakly almost periodic となるかが問題となる.

定義 $T : S \rightarrow \text{Lip}(C)$ が $D \subset C$ 上 RS-表現 であるとは次のときを言う:

$\forall x \in D, \forall \text{net } \{s_\alpha\} \subset S \text{ s.t. } T(s_\alpha)x \rightarrow y \in C \Rightarrow T(s)T(s_\alpha)x \rightarrow T(s)y \ (\forall s \in S).$

$S = (\mathbf{Z}^+)^k$ 又は $(\mathbf{R}^+)^k$ とする. $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$ に対して, $S_I = (\mathbf{Z}^+)^I$ or $(\mathbf{R}^+)^I$ とおき, 表現 $T_I : S_I \rightarrow \text{Lip}(C)$ を $T_I(s^I)x = T((s^I, 0^J)), x, s^I \in S_I, J = \{1, 2, \dots, k\} \setminus I, x \in C$ で定義する. ここで 0^J は S_J の zero element である.

$T : S \rightarrow \text{Lip}(C)$ が C の部分集合 D 上 強 RS-表現 であるとはすべての $I \subset \{1, 2, \dots, k\}$ に対して, T_I が D 上 RS-表現 であるときをいう.

次の場合に T は 強 RS-表現 である:

1. $x \in D, O(x) := \{T(s)x; s \in S\}$ が 相対 compact;
2. $\{T(s); s \in S\}$: affine mapping;
3. E を uniformly convex な Banach 空間, C を E の閉凸部分集合とし, $T : S \rightarrow \text{Cont}(C)$ を表現 (すなわち $\{T(s); s \in S\}$ が C 上 nonexpansive semigroup), T が D 上 asymptotically isometric.

定理 ([17]) $S = (\mathbf{Z}^+)^k$ or $(\mathbf{R}^+)^k$ とし, E を Banach 空間, C を E の閉部分集合, D を C の部分集合, $T : S \rightarrow \text{Lip}(C)$ を D 上の 強 RS-表現 で, $\sup_{s \in S} \|T(s)\| < \infty$ とする. このとき 次は同値:

- (a) $T(\cdot)x, x \in D$ は Eberlein-weakly almost periodic である.
- (b) $\{T(s)x; s \in S\}$ は 相対弱コンパクト.

上の仮定のもとで, orbit が 相対弱コンパクト ならば Eberlein-weakly almost periodic となるわけである.

Ruess and Summers [39] では $S = \mathbf{R}^+$ で $T(\cdot)x$ が Eberlein-weakly almost periodic で RS-表現 のとき strong convergence theorem を証明している. 我々はこれを一般化している.

定理において, strongly regular な net の取り方によってたくさんの系が得られるが, そのうちの 1 つのみを挙げる.

系 E を uniformly convex な Banach 空間, C を E の 閉凸部分集合,

$V, W \in \text{Cont}(C)$, $VW = WV$, $\text{Fix}V \cap \text{Fix}W \neq \emptyset$. $x \in C$, $\lim_{s_1, s_2 \rightarrow \infty} \|V^{s_1+h_1}W^{s_1+h_2}x - V^{s_1+k_1}W^{s_1+k_2}x\|$ が $h_1, h_2, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}^+$ に関して一様に存在すると仮定する. このとき $f(s) = V^{s_1}W^{s_2}x$ for $s = (s_1, s_2) \in (\mathbf{Z}^+)^2$ とおくと $f : (\mathbf{Z}^+)^2 \rightarrow E$ は Eberlein-weakly almost periodic となり, $\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} V^{i+h_1}W^{j+h_2}x \rightarrow$

$y \in \text{Fix}V \cap \text{Fix}W$, 収束は $h_1, h_2 \in \mathbf{Z}^+$ に関して一様.

さらに $\lim_{s_1, s_2 \rightarrow \infty} \|V^{s_1+t_1}W^{s_2+t_2}x - V^{s_1}W^{s_2}x\| = 0$ ($\forall t_1, t_2 \in \mathbf{Z}^+$) とする. このとき $V^{s_1+t_1}W^{s_2+t_2}x \rightarrow y \in \text{Fix}V \cap \text{Fix}W$, 収束は $t_1, t_2 \in \mathbf{Z}^+$ に関して一様 ($s_1, s_2 \rightarrow \infty$).

(証明) $T : (\mathbf{Z}^+)^2 \rightarrow \text{Cont}(C)$ を $T((s_1, s_2))x = V^{s_1}W^{s_2}x$, $(s_1, s_2) \in (\mathbf{Z}^+)^2$, $x \in C$ で定義する. μ_n を strongly regular な net の例の (b)(iii) のものとする. すると, $T(r(h)^*\mu_n)x = (1/n^2) \sum_{i,j=1}^{n-1} V^{i+h_1}W^{j+h_2}x$, $h = (h_1, h_2) \in (\mathbf{Z}^+)^2$. 従って, 定理と系から得られる.

(注意) [19] では, 以上を semigroup の Eberlein-weakly almost periodic の仮定のもとに, 非可換な場合に拡張している.

参考文献

- [1] J. B. Baillon, *Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 280 (1975), 1511-1514.
- [2] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les semigroups de contractions impaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 283 (1976), 75-78.
- [3] J. B. Baillon, *Quelques propriétés de convergence asymptotique pour les contractions impaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 283 (1976), A587-A590.
- [4] J. B. Baillon, *Comportement asymptotic des itérés de contractions non linéaires dans les espaces L^p* , C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 286 (1978), A157-A159.
- [5] J. B. Baillon and H. Brézis, *Une remarque sur le comportement asymptotique des semigroupes non lineaires*, Houston J. Math. 2 (1976), 5-7.
- [6] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Editura Academiei R. S. R. Bucuresti, 1976.
- [7] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [8] H. Brézis and F. E. Browder, *Nonlinear ergodic theorems*, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 959-961.
- [9] R. E. Bruck, *On the almost-convergence of iterates of a nonexpansive mapping in Hilbert space and the structure of the weak ω -limit set*, Israel J. Math., 29 (1978), 1-16.
- [10] R. E. Bruck, *On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces*, Israel J. Math., 38 (1981), 304-314.
- [11] R. E. Bruck, *Asymptotic behavior of nonexpansive mappings*, Contemporary Mathematics, 18 (1983), 1-47.

- [12] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math., 1 (1957), 509-544.
- [13] M. M. Day *Fixed point theorem for compact convex sets*, Illinois J. Math., 5 (1961), 585-590.
- [14] W. F. Eberlein, *Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 667 (1949), 217-240.
- [15] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Asymptotic behavior of commutative semigroups of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 10 (1986), 229-249.
- [16] N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, *Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 12 (1988), 1269-1281.
- [17] O. Kada, *Strong ergodic theorems for commutative semigroups of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
- [18] O. Kada, *Existence of ergodic retraction for noncommutative semigroups of weakly almost periodic operators*, preprint.
- [19] O. Kada, *Ergodic theorems for noncommutative semigroups of operators*, preprint.
- [20] O. Kada, *Strong ergodic theorems for noncommutative semigroups in Banach spaces*, preprint.
- [21] O. Kada, A. Lau and W. Takahashi, *Asymptotically invariant net and fixed point set for semigroup of nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis (to appear).
- [22] O. Kada and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems for almost nonexpansive curves over commutative semigroups*, Topological Methods in Nonlinear Analysis (to appear).
- [23] O. Kada and W. Takahashi, *Strong convergence and nonlinear ergodic theorems for commutative semigroups of nonexpansive mappings*, Nonlinear Analysis (to appear).
- [24] J. L. Kelly and I. Namioka, *Linear topological spaces*, Van Nostrand, 1963.
- [25] K. Kido and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for semigroups of linear operators*, J. Math. Anal. Appl., 103 (1984), 387-394.
- [26] A. T. Lau and W. Takahashi, *Invariant means and fixed point properties for nonexpansive representations of topological semigroups*, Topological Methods in Nonlinear Analysis (to appear).
- [27] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent series*, Acta Math. 80 (1948), 167-190.
- [28] P. Milnes, *On vector-valued weakly almost periodic functions*, J. London Math. Soc., 22 (1980), 467-472.
- [29] I. Miyadera and K. Kobayasi, *On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces*, Nonlinear Analysis, 6 (1982), 349-365.
- [30] N. Mizoguchi and W. Takahashi, *On the existence of fixed points and ergodic retractions for Lipschitzian semigroups in Hilbert spaces*, Nonlinear Analysis, 14 (1990), 69-80.
- [31] H. Oka, *On the strong ergodic theorems for commutative semigroups in Banach spaces*, Tokyo J. Math, 16 (1993), 385-398.

- [32] S. Reich, *Almost convergence and nonlinear ergodic theorems*, J. Approximation Theory, 24 (1978), 269-272.
- [33] G. Rodé, *An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., 85 (1982), 172-178.
- [34] B. D. Rouhani, *Asymptotic behavior of quasi-autonomous dissipative systems in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. 147 (1990), 465-476.
- [35] B. D. Rouhani, *Asymptotic behavior of almost nonexpansive sequences in a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. 151 (1990), 226-235.
- [36] W. M. Ruess and W. H. Summers, *Weak almost periodicity and the strong ergodic limit theorem for contraction semigroups*, Israel J. Math., 64 (1988), 139-157.
- [37] W. M. Ruess and W. H. Summers, *Integration of asymptotically almost periodic functions and weak asymptotic almost periodicity*, Diss. Math. 279 (1989).
- [38] W. M. Ruess and W. H. Summers, *Weakly almost periodic semigroups of operators*, Pacific J. Math., 143 (1990), 175-193.
- [39] W. M. Ruess and W. H. Summers, *Ergodic theorems for semigroup of operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 114 (1992), 423-432.
- [40] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc., 81 (1981), 253-256.
- [41] W. Takahashi, 非線形関数解析学, 近代科学社, 1988.