

拡大の同型類の個数について

大阪市立大学理学部 浅芝秀人 (Hideto Asashiba)

k を代数的閉体とし、考える多元環および加群はすべて k 上有限次元とする。 A を多元環、 X, Z を右 A -加群とするととき X の Z による拡大 e とは、つぎの形の右 A -加群の完全系列のことである：

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\alpha(e)} M(e) \xrightarrow{\beta(e)} Z \longrightarrow 0.$$

X の Z による拡大【分裂しない拡大】の全体を $\text{EXT}(Z, X)$ 【 $\text{ext}(Z, X)$ 】で表す。 $\text{EXT}(Z, X)$ の元 e, f にたいして、 e と f が同型 ($e \cong f$) であるとは、同型写像 $\gamma: X \rightarrow X$ 、 $\delta: M(e) \rightarrow M(f)$ および $\varepsilon: Z \rightarrow Z$ が存在して、 $\delta \cdot \alpha(e) = \alpha(f) \cdot \gamma$ かつ $\varepsilon \cdot \beta(e) = \beta(f) \cdot \delta$ となることである。また e と f が合同 ($e \equiv f$) であるとは、 e と f が $\gamma =$ 「 X の恒等写像」と $\varepsilon =$ 「 Z の恒等写像」によって同型であることをいう。拡大群 $\text{Ext}^1(Z, X)$ は $\text{EXT}(Z, X)$ のなかの合同類の全体とみなすことができる。そこで $\text{EXT}(Z, X)$ の各元 e にたいして、 $(e) := \{f \in \text{EXT}(Z, X) \mid e \equiv f\} \in \text{Ext}^1(Z, X)$ とおく。 $\text{ext}(Z, X)$ のなかの拡大の同型類の個数を $n(Z, X)$ で表し、 $\text{ext}(Z, X)$ のなかの同値関係 $M(e) \cong M(f)$ を法とする同値類の個数を $n'(Z, X)$ で表す。「 $e \equiv f$ 」 $\Rightarrow$ 「 $e \cong f$ 」 $\Rightarrow$ 「 $M(e) \cong M(f)$ 」より、 $n'(Z, X) \leq n(Z, X) \leq |\text{Ext}^1(Z, X) \setminus \{0\}|$ の濃度が分かる。

さてよく知られているように、単純右 A -加群 X, Z にたいして $[\text{Ext}^1(Z, X): k] > 1$ ならば、 $n(Z, X)$ も $n'(Z, X)$ も無限である。ただし $[V: k]$ は k -ベクトル空間 V の k -次元を表す。他方 [2, 29 ページ] によれば、ある多元環 A とその上の直既約右加群 X, Z が存在して、 $n'(Z, X) = n(Z, X) = [\text{Ext}^1(Z, X): k] (= 2)$ となる。そこで、いつこれらの数 $n'(Z, X)$ 、 $n(Z, X)$ 、 $[\text{Ext}^1(Z, X): k]$ が有限となって一致するか、という問題を考える。結果はつぎの定理と、最後の例で与えた。

定理。 X と Z をある多元環 A 上の直既約右加群とすると、つぎは同値である：

- (1) $n(Z, X) < \infty$ 。
- (2) $\text{Ext}^1(Z, X)$ は $(\text{End}_A X, \text{End}_A Z)$ - 両側加群として単列である。
- (3) $n(Z, X) = [\text{Ext}^1(Z, X): k]$ 。
- (4) $n'(Z, X) = n(Z, X) = [\text{Ext}^1(Z, X): k]$ 。

この定理を証明するために以下、3つの補題を用意する。最初の補題は定義から明らかである。環 R の単元全体を R^* で表し、単位元を 1_R で表す。

補題1。 A を多元環、 X, Z を右 A -加群とする。各 $e, f \in \text{ext}(Z, X)$ についてつぎは同値である：

(1) $e \cong f$ 。

(2) $(f) = \phi(e)\Psi$ となる $\phi \in (\text{End}, X)^*$ と $\Psi \in (\text{End}, Z)^*$ が存在する。

補題2。 (Cf. [3], [1]) $A, [B]$ を basic 多元環とし、 $J, [N]$ をそのジャコブソン根基とする。単列 (A, B) -両側加群 $U = AxB$ にたいして、 $JU \geq UN$ 【 $JU \leq UN$ 】ならば、 $U = Ax$ 【 $U = xB$ 】で、 U は単列左 A -【右 B -】加群である。そのただ1つの組成列は、 (A, B) -両側加群としての U のただ1つの組成列と一致する。

証明。 対称性から、 $JU \geq UN$ の場合だけを考えれば十分である。すべての (A, B) -両側加群を自然に $C := A \otimes_k B^{op}$ 上の左加群とみなす。 W を C のジャコブソン根基として、 $WS = JS + SN$ がすべての (A, B) -両側加群 S にたいして成り立つことに注意すると、 $JU \geq UN$ より $W^i U = J^i U$ ($\forall i \geq 0$) が出る。これより (C が仮定から basic となることを使って、) $[J^i U / J^{i+1} U : k] \leq 1$ ($\forall i \geq 0$) となる。よって U はただ1つの組成列 $(J^i U)_i = (W^i U)_i$ をもつ。さてもし $U \neq Ax$ とすると、 $X \in JU = WU$ 。すると $AxB = Cx \leq WU < U$ となって矛盾。 //

補題3。 A, B を局所多元環、 M を (A, B) -両側加群、 L を M の (A, B) -両側部分加群で M/L が半単純 (A, B) -両側加群 ($\neq 0$) となるものとする。すると $M \setminus L$ の各元 x, y にたいして、条件

(1) $y = axb$, $\exists a \in A^*$, $\exists b \in B^*$ 。

から条件

(2) $[y] \in k^* \cdot [x]$ (ただし $[t] := t + L$, $t = x, y$)。

が出る。さらに L が単列 (A, B) -両側加群で AxB に含まれているならば、逆に(2)から(1)が出る。

証明。 補題2とその証明で使った記号をそのまま使うことにする。 k が代数的閉体で A も B も局所多元環であるから、 $A^* = k \cdot 1_A + J$, $B^* = k \cdot 1_B + N$ となることに注意する。

(1) $\Rightarrow$ (2)。上の注意から明らか。

(2)⇒(1). C が局所多元環であるから、 ${}_C S := Cx = AxB$ はただ1つの極大部分加群 WS をもつ。よって $L \leq WS$ 。他方仮定より S/L は半単純左 C -加群であるから $L = WS$ となる。ゆえに ${}_C S$ は単列である。とくに $JS \geq SN$ または $JS \leq SN$ が成り立つ。一般性を失うことなく、 $JS \geq SN$ が成り立っているとしてよい。すると補題2より、 $S = Ax$ で $L (= WS = JS) = Jx$ 。これより $k^*x + L = k^*x + Jx = A^*x$ となって証明が終わる。

定理の証明. $R_x := \text{End}_A X$, $R_z := \text{End}_A Z$, $E := \text{Ext}^1(Z, X)$ とおく。 X も Z も直既約であるから、 R_x も R_z も局所多元環である。

$$(*) \quad 0 = S_0 < S_1 < S_2 < \cdots < S_n = E$$

を (R_x, R_z) -両側加群としての E の socle 列とする。各 $(e), (f) \in S_i \setminus S_{i-1}$ ($1 \leq i \leq n$) にたいして、補題1と3をつかって、 $e \cong f$ から $[(e)]_i \in k^* \cdot [(f)]_i$ が出る。ただし各 $g \in E$ にたいして $[(g)]_i := (g) + S_{i-1}$ とおいた。

(4)⇒(3)⇒(1)は明らか。

(1)⇒(2). ある $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ で $[S_i/S_{i-1} : k] > 1$ となったとせよ。すると k 上一次独立な2元 $[(e)]_i, [(f)]_i \in S_i/S_{i-1}$ がとれる。上の注意から、任意の $s, t \in k^*$ にたいして、 $e + sf \cong e + tf \Rightarrow [(e)]_i + s[(f)]_i \in k^* \cdot ([(e)]_i + t[(f)]_i) \Rightarrow s = t$ 。よって $n(Z, X) \geq \text{「} k^* \text{の濃度」} = \infty$ 。

(2)⇒(4). E を単列 (R_x, R_z) -両側加群とせよ。 $(*)$ より $n = [E : k]$ 。各 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ にたいして $(e_i) \in S_i \setminus S_{i-1}$ を1つずつ選んでおく。このとき $S_i/S_{i-1} = k \cdot [(e_i)]_i$ となる。 $n \leq n'(Z, X)$ と $n(Z, X) \leq n$ を示せばよい。

$n(Z, X) \leq n$ の証明. 各 $e \in \text{ext}(Z, X)$ にたいして、ある $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ が存在して、 $(e) \in S_i \setminus S_{i-1}$ となる。すると $(e) \in k^* \cdot (e_i) + S_{i-1}$ 。補題3を $M = S_i, L = S_{i-1}, x = e_i$ に適用すると、補題1より $e \cong e_i$ となる。

$n \leq n'(Z, X)$ の証明. $e \in \text{ext}(Z, X)$ を1つとる。 e に $\text{Hom}(Z, -)$ を作用させると、完全系列

$$0 \rightarrow \text{Hom}(Z, X) \rightarrow \text{Hom}(Z, M(e)) \rightarrow \text{Hom}(Z, Z) = R_z \xrightarrow{\delta} E$$

が得られる。ここで $\text{Im } \delta = (e) \cdot R_z$ であることに注意すると、

$$[(e)R_z : k] = [R_z : k] - [\text{Hom}(Z, M(e)) : k] + [\text{Hom}(Z, X) : k]。$$

そこで $f \in \text{ext}(Z, X)$ をとり、 $M(e) \cong M(f)$ となつたとせよ。すると上の式から

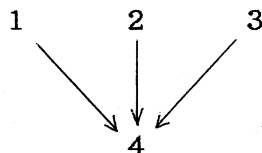
$$[(e)R_z : k] = [(f)R_z : k] ; \text{さらに双対的に、}$$

$$[R_x(e) : k] = [R_x(f) : k] .$$

$$\begin{aligned} \text{よって補題2より、} [R_x(e)R_z : k] &= \max \{ [R_x(e) : k] , [(e)R_z : k] \} \\ &= \max \{ [R_x(f) : k] , [(f)R_z : k] \} \\ &= [R_x(f)R_z : k] . \end{aligned}$$

結局 $R_x(e)R_z = R_x(f)R_z$ となる。以上のことを、 $e = e_i$, $f = e_j$ に適用すると、 $M(e_i) \cong M(e_j)$ から $S_i = S_j$ が出来て $i = j$ となる。 //

例。 $n'(Z, X) \leq n(Z, X)$ より $n(Z, X) < \infty \Rightarrow n'(Z, X) < \infty$ 。しかしこの逆は一般には成り立たない。 $n'(Z, X) < \infty$ であるが、 $n(Z, X) = \infty$ となる例を挙げよう。 A^{op} をつぎの quiver で与えられる多元環とする：



X, Z をそれぞれ dimension type が $\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & & \end{smallmatrix}$ となる直既約右 A -加群とする。

すると A が有限表現型で、どの $e \in \text{ext}(Z, X)$ にたいしても $M(e)$ の dimension type は $\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & & \end{smallmatrix}$ であるから、 $n'(Z, X) < \infty$ となる。しかし $n(Z, X) = \infty$ で

ある。じっさい、Auslander-Reiten公式と A が遺伝的であることから $\text{Ext}^1(Z, X) \cong \text{DHom}(X, \tau Z)$ 。よって、 $[\text{Ext}^1(Z, X) : k] = [\text{Hom}(X, \tau Z) : k] = \text{「} \tau Z \text{ の dimension type } \begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & & \end{smallmatrix} \text{ の第4成分} \text{」} = 2$ (X が vertex 4 に対応する射影的直既約

右 A -加群であることに注意)。他方 $R_x = R_z = k$ であるから $\text{Ext}^1(Z, X)$ は単列両側加群ではない。したがって定理より、 $n(Z, X) = \infty$ 。

References

- [1] R. Bautista, P. Gabriel, A. V. Roiter and L. Salmerón: Representation-finite algebras and multiplicative bases, *Invent. math.* **81** (1985), 217-285.
- [2] P. Gabriel: Auslander-Reiten sequences and representation-finite algebras, *Proc. Ottawa 1979*, Springer Lect. Notes **831**, 1-71.
- [3] H. Kupisch: Symmetrische Algebren mit endlich vielen unzerlegbaren Darstellungen. I, II, *J. Reine Angew. Math.* **219** (1965), 1-25; **245** (1970) 1-14.