

CQF-3' 加群と双対遺伝的振れ理論の一般化

函館工業高等専門学校・一般科目理数系竹花靖彦 (Yasuhiko Takehana)
General Education Hakodate National College of Technology

0. 序

ここでは R は単位元を持つ右完全環とする. $\text{Mod-}R$ で右 R -加群全体を表し, 特に断らない限り加群はユニタリーな R -加群を表すことにする. 加群 M に対し $0 \rightarrow K(M) \rightarrow P(M) \rightarrow M \rightarrow 0$ を M の射影被覆とする, 即ち $P(M)$ は射影加群で $K(M)$ は $P(M)$ の小部分加群である. $P(M)$ が M で生成されているとき加群 M は CQF -3' 加群であるという.

$\text{Mod-}R$ の恒等関手の部分関手を弱根基という. 弱根基 σ に対し任意の加群 M とその部分加群 N について $M \supseteq \sigma(M)$ であり $\sigma(M/N) \supseteq (\sigma(M) + N)/N$ が成り立つ. 弱根基 σ に対して $\mathcal{T}_\sigma := \{M \in \text{Mod-}R : \sigma(M) = M\}$ で定義しその元を σ -torsion 元といい $\mathcal{F}_\sigma := \{M \in \text{Mod-}R : \sigma(M) = 0\}$ で定義してその元を σ -torsionfree 元という. $\text{Hom}_R(M, -)$ が $A \in \mathcal{F}_\sigma$ である短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ の完全性を保つとき加群 M は σ -射影的であると言う. 加群 M に対し $P_\sigma(M) := P(M)/\sigma(K(M))$ と定める. $P_\sigma(M)$ は M で生成されるなら M は σ -CQF-3' 加群であると言う.

ここでは σ -CQF-3' 加群の性質とその関連事項について述べる.

1. 振れ理論に付随するCQF-3' 加群

F. F. Mbuntum と K. Varadarajan は QF -3' 加群の双対化として CQF -3' 加群を定義し [10] において特徴づけを与えた. [12] より CQF -3' 加群は森田同値の一般化に有用な役割を果たしている. ここでは冪等根基を用いて CQF -3' 加群を拡張する. 弱根基 σ は任意の加群 M について $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$ [$\sigma(M/\sigma(M)) = 0$] がいつでも成立するとき, それぞれ冪等 [根基] であるという. 短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ で $A, C \in \mathcal{W}$ であるなら $B \in \mathcal{W}$ のときクラス $\mathcal{W}$ は拡大で閉じているという. よく知られているように σ が冪等なら $\mathcal{F}_\sigma$ は拡大で閉じており σ が根基なら $\mathcal{T}_\sigma$ は拡張で閉じている. 弱根基 t は任意の加群 M とその部分加群 N について $t(M/N) = (t(M) + N)/N$ が成り立てば全射保持であると言われる. 弱根基 σ が全射保持であることと, σ が根基でありかつ $\mathcal{T}_\sigma$ が剰余加群で閉じていることとは同値である. ここで全射保持性の概念を拡張する. 弱根基 σ に対し弱根基 t は任意の加群 M とその部分加群 $N \in \mathcal{F}_\sigma$ に対し $t(M/N) = (t(M) + N)/N$ が成立するとき σ -全射保持であるという. 加群 M, N について $\sum_{f \in \text{Hom}_R(N, M)} \text{im } f$ を $t_N(M)$ であらわす. そ

のとき任意の加群 N に対して t_N は冪等弱根基になる. そして $\mathcal{F}_{t_A} = \{M \in \text{Mod-}R : \text{Hom}_R(A, M) = 0\}$ and $\mathcal{T}_{t_A} = \{M \in \text{Mod-}R : \oplus A \rightarrow M \rightarrow 0\}$ であることがわかる.

$X, Y \in \text{Mod-}R$ に対し全射 $g \in \text{Hom}_R(X, Y)$ が極小全射であるというのは $X \supsetneq H$ ならば $g(H) \subsetneq Y$ がいつでも成立するときに言う. 全射 $g \in \text{Hom}_R(X, Y)$ が極小であることと $\ker g$ が X の小部分加群であることは同値である.

次に良く知られている射影被覆の拡張を述べる. $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow M \rightarrow 0$ は Y が σ -射影的で X は σ -torsionfree で X は Y の小部分加群であるなら M の σ -射影被覆であるという. σ -射影被覆は同型を除いてただ一つに定まることが知られている. 弱根基 σ が冪等ならば [11] の Lemma 1.4 により $P(M)/\sigma(K(M))$ は σ -射影加群である. σ が根基であるなら $K(M)/\sigma(K(M)) \in \mathcal{F}_\sigma$ である. 弱根基 σ に対し $K_\sigma(M) := K(M)/\sigma(K(M))$ で $P_\sigma(M) := P(M)/\sigma(K(M))$ と定義するとき $K_\sigma(M)$ は $P_\sigma(M)$ の小部分加群である. 従って σ が冪等根基なら加群 M は σ -射影被覆を持ち $0 \rightarrow K_\sigma(M) \rightarrow P_\sigma(M) \rightarrow M \rightarrow 0$ で与えられる.

以下 σ は弱根基とし $\mathcal{C}$ は $\text{Mod-}R$ の部分クラスとする. また N は M の部分加群とする.

拡大の概念を拡張する. $N, M/N \in \mathcal{C}$ で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ ならば $M \in \mathcal{C}$ であるとき $\mathcal{C}$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -拡大で閉じているという.

次に剰余加群で閉じていることの拡張概念を述べる. $M \in \mathcal{C}$ でありかつ N は M の σ -torsionfree な部分加群であるなら $M/N \in \mathcal{C}$ がいつでも成り立つとき $\mathcal{C}$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -剰余加群で閉じているという.

次に双対本質的拡大の拡張を述べる. 全射 $h: M \twoheadrightarrow X$ があって $\ker h \in \mathcal{F}_\sigma$ のとき M は X の σ -双対本質的拡大であるという. また任意の極小全射 $f: M \twoheadrightarrow X$ で $\ker f \in \mathcal{F}_\sigma$ であるものに対して $X \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C}$ が成立するとき $\mathcal{C}$ は σ -双対本質的拡大で閉じているという.

しかしここでは記述の簡易化のために N は M の σ -torsionfree な小部分加群のとき M は M/N の σ -双対本質的拡大であるということにする. また N は M の σ -torsionfree な小部分加群のとき $M/N \in \mathcal{C} \Rightarrow M \in \mathcal{C}$ が成り立つとき $\mathcal{C}$ は σ -双対本質的拡大で閉じているということにする.

定理 1. σ は弱根基とする. 加群 A について次の条件を考える.

- (1) A は σ -CQF-3' 加群である.
- (2) $t_A(P_\sigma(A)) = P_\sigma(A)$ が成立する.
- (3) 任意の加群 M に対して $t_A(M) = t_{P_\sigma(A)}(M)$ が成立する.
- (4) $t_A(-)$ は σ -全射保持な弱根基である.
- (5) (a) $\mathcal{T}_{t_A}$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -拡大で閉じている.
(b) $\mathcal{F}_{t_A}$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -剰余加群で閉じている.
- (6) $\mathcal{T}_{t_A}$ は σ -射影被覆で閉じている.

(7) $\mathcal{T}_{t_A}$ は σ -双対本質的拡大で閉じている.

(8) N は σ -torsionfree な M の部分加群のとき標準的全射 $f: M \rightarrow M/N$ に対して $[\text{Hom}_R(A, f) = 0 \Rightarrow \text{Hom}_R(A, M/N) = 0]$ が成立する.

そのとき (1) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (1) と (4) $\rightarrow$ (5) が成り立つ.

σ が冪等なら (3) $\rightarrow$ (4), (1) $\rightarrow$ (8) と (7) $\leftarrow$ (6) $\rightarrow$ (5) が成り立つ.

σ が根基なら (7) $\rightarrow$ (6), (6) $\leftarrow$ (4) $\rightarrow$ (2) が成り立つ.

σ が全射保持根基で $A \in \mathcal{F}_\sigma$ であるならば (8) $\rightarrow$ (5) が成り立ち, 更に σ が冪等なら (5) $\rightarrow$ (2) が成り立つ.

かくして σ が弱根基なら (1)(2)(3) が同値であり, σ が冪等根基なら (1)(2)(3)(4) が同値である.

また σ が全射保持-冪等-根基で $A \in \mathcal{F}_\sigma$ であるなら全ての条件は同値である.

証明. (1) $\rightarrow$ (3): 仮定より完全列 $\oplus A \rightarrow P_\sigma(A) \rightarrow 0$ がある. よって加群 M に対し $t_A(M) \supseteq t_{P_\sigma(A)}(M)$ である. $P_\sigma(A) \rightarrow A \rightarrow 0$ であるから, $t_A(M) \subseteq t_{P_\sigma(A)}(M)$ が得られる. かくして $t_A(-) = t_{P_\sigma(A)}(-)$ が成り立つ.

(3) $\rightarrow$ (2): $t_A(P_\sigma(A)) = t_{P_\sigma(A)}(P_\sigma(A)) = P_\sigma(A)$ であるから明らかである.

(2) $\rightarrow$ (1): $P_\sigma(A) = t_A(P_\sigma(A))$ であり $\oplus A \rightarrow t_A(P_\sigma(A))$ であるから明らかである.

(3) $\rightarrow$ (4): σ は冪等とする. そのとき $P_\sigma(A)$ は σ -射影加群である. $N \subseteq M$ で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ とする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_\sigma(A) & & & & \\ & & \swarrow h \downarrow f & & & & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & M & \xrightarrow[g]{} & M/N \rightarrow 0, \end{array}$$

そこで g は標準的全射で $f \in \text{Hom}_R(P_\sigma(A), M/N)$ であり,

$h \in \text{Hom}_R(P_\sigma(A), M)$ は $P_\sigma(A)$ の σ -射影性から導かれ $f = gh$ になる準同型である.

かくして $t_{P_\sigma(A)}(M/N) \subseteq (t_{P_\sigma(A)}(M) + N)/N$ が成り立ち, 仮定から $t_A(M/N) \subseteq (t_A(M) + N)/N$ が成り立つ. $t_A(-)$ は弱根基であるから,

$t_A(M/N) \supseteq (t_A(M) + N)/N$ が成り立つ. よって $t_A(-)$ は σ -全射保持である.

(4) $\rightarrow$ (2): ここで σ は根基と仮定する.

そのとき $K_\sigma(A) = K(A)/\sigma(K(A)) \in \mathcal{F}_\sigma$ となる. よって $(t_A(P_\sigma(A)) + K_\sigma(A))/K_\sigma(A) = t_A(P_\sigma(A)/K_\sigma(A))$. しかし $t_A(A) = A$ であり $A \simeq P_\sigma(A)/K_\sigma(A)$ であるから $t_A(P_\sigma(A)/K_\sigma(A)) = P_\sigma(A)/K_\sigma(A)$ が従う. かくして $t_A(P_\sigma(A)) + K_\sigma(A) = P_\sigma(A)$ が成立する. $K_\sigma(A)$ は $P_\sigma(A)$ の小部分加群であるから $P_\sigma(A) = t_A(P_\sigma(A))$ が成り立つ.

(4) $\rightarrow$ (5)(a): N は加群 M の部分加群で $N \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{t_A}$ と $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ を満たすものとする. そのとき $N = t_A(N) \subseteq t_A(M)$ と $t_A(M/N) = M/N$

が成り立つ。仮定より $t_A(M/N) = (t_A(M) + N)/N$ が成り立ち、従って $M = t_A(M) + N = t_A(M)$ が得られる。

(b): N は加群 M の部分加群で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ と $M \in \mathcal{F}_{t_A}$ を満たすものとする。そのとき次が成り立つ。 $t_A(M/N) = (t_A(M) + N)/N = N/N = 0$ 。

(1)→(8): σ は冪等であると仮定する。そのとき $P_\sigma(A)$ は σ -射影的である。 $M \supseteq N \in \mathcal{F}_\sigma$ である加群 M, N を考える。 A は σ -CQF-3' 加群であるから、全射 $\bigoplus A_i \xrightarrow{(\varphi_i)} P_\sigma(A)$ があって $(\varphi_i)(a_i) = \sum_i \varphi_i(a_i)$ を満たす。ただし $(a_i) \in \bigoplus A_i$, $\varphi_i \in \text{Hom}_R(A_i, P_\sigma(A))$ で $A_i \cong A$ である。

次に $\text{Hom}_R(A, f) = 0 \Rightarrow \text{Hom}_R(A, M/N) = 0$ を示す。 $\text{Hom}_R(A, M/N) \neq 0$ を仮定する。そのとき $0 \neq j \in \text{Hom}_R(A, M/N)$ がある。 $f: M \rightarrow M/N$ は標準的全射であり、 $g: P_\sigma(A) \rightarrow A$ は A の σ -射影性から引き起こされる準同型で $h: P_\sigma(A) \rightarrow M$ は $P_\sigma(A)$ の σ -射影性より引き起こされ、 $fg = fh$ を満たす。

次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} P_\sigma(A) & \xrightarrow{g} & A & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow h & \downarrow j & & \\ 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow{f} & M & \rightarrow & M/N \rightarrow 0 \end{array}$$

そのとき $j(x) \neq 0$ となる $0 \neq x \in A$ がある。そのとき $0 \neq y \in P_\sigma(A)$ があって $y = \sum_i \varphi_i(a_i)$ と $x = g(y) = g(\sum_i \varphi_i(a_i)) = \sum_i g(\varphi_i(a_i))$ が成り立つ。従って $0 \neq j(x) = j(g(y)) = \sum_i j(g(\varphi_i(a_i)))$ が得られ、それである a_i が A に存在し、ある φ_i が $\text{Hom}_R(A, P_\sigma(A))$ に存在し $j(g(\varphi_i(a_i))) \neq 0$ となる。 $fg = fh$ であるから $0 \neq j(g(\varphi_i(a_i))) = f(h(\varphi_i(a_i)))$ が成り立つ。 $h\varphi_i \in \text{Hom}_R(A, M)$ であるから $0 \neq fh\varphi_i = \text{Hom}(A, f)(h\varphi_i)$ が成り立つ。しかしこれは矛盾である。よって $\text{Hom}_R(A, M/N) = 0$ が得られる。

(8)→(5): ここでは σ は全射保持弱根基で $A \in \mathcal{F}_\sigma$ を仮定する。

(a): ここでは $\mathcal{T}_{t_A}$ が拡大で閉じているという、より強い条件を示す。 N は加群 M の部分加群で $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ と $N \in \mathcal{T}_{t_A}$ を満たすものとする。 $t_A(M)$ は $A \in \mathcal{F}_\sigma$ のコピーの直和であるから $t_A(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う。 $\mathcal{F}_\sigma \ni t_A(M) \hookrightarrow M \xrightarrow{f} M/t_A(M)$ であるから $t_A(M)$ の定義より $\text{Hom}_R(A, f) = 0$ が従う。よって仮定より $\text{Hom}_R(A, M/t_A(M)) = 0$ が成り立ち $M/t_A(M) \in \mathcal{F}_{t_A}$ が言える。 $N \in \mathcal{T}_{t_A}$ であるから $N = t_A(N) \subseteq t_A(M)$ が従う。 $M/t_A(M)$ は $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ の剰余加群であるから $M/t_A(M) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う。 $M/t_A(M) \in \mathcal{F}_{t_A}$ であつたから $M/t_A(M) = 0$ となる。

(b): 加群 N は加群 M の部分加群で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ で $M \in \mathcal{F}_{t_A}$ とする。短完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow M \xrightarrow{f} M/N \rightarrow 0$ を考える。 $M \in \mathcal{F}_{t_A}$ であるから $\text{Hom}_R(A, f) = 0$ が従う。よって仮定より $\text{Hom}_R(A, M/N) = 0$ が成り立ち $M/N \in \mathcal{F}_{t_A}$ となることがわかる。

(5)→(2): ここでは σ は全射保持-冪等-根基で $A \in \mathcal{F}_\sigma$ を仮定する. $\mathcal{F}_\sigma$ は拡大で閉じていて $K_\sigma(A) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $P_\sigma(A) \in \mathcal{F}_\sigma$ が得られる. $\mathcal{F}_\sigma$ は部分加群で閉じているから $t_A(P_\sigma(A)) \in \mathcal{F}_\sigma$ が成立する. $K = t_A(P_\sigma(A))$ と置く. $K = P_\sigma(A)$ を示したい. $K \subsetneq P_\sigma(A)$ を仮定して矛盾を導く. $K_\sigma(A)$ は $P_\sigma(A)$ の小部分加群であるから $K + K_\sigma(A) \subsetneq P_\sigma(A)$ が得られる. $A \simeq P_\sigma(A)/K_\sigma(A) \rightarrow P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + K) \neq 0$ であるから

$\text{Hom}_R(A, P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + K)) \neq 0$ が得られる. よって $P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + K) \notin \mathcal{F}_{t_A}$ となる. $(K_\sigma(A) + K)/K$ は $K_\sigma(A) \in \mathcal{F}_\sigma$ の像であり $\mathcal{F}_\sigma$ は剰余加群で閉じているから $(K_\sigma(A) + K)/K \in \mathcal{F}_\sigma$ が成り立つ. 次の短完全列を考える. $0 \rightarrow (K_\sigma(A) + K)/K \rightarrow P_\sigma(A)/K \rightarrow P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + K) \rightarrow 0$. (b) の仮定より, $(P_\sigma(A)/K) \notin \mathcal{F}_{t_A}$ が従う. $X/K = t_A(P_\sigma(A)/K) (\neq 0)$ と置く. 短完全列 $0 \rightarrow K \rightarrow X \rightarrow X/K \rightarrow 0$ を考える. $K = t_A(P_\sigma(A)) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $K \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{t_A}$ が得られる. $X/K \in \mathcal{T}_{t_A}$ であるから 仮定 (a) より $X \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う. $X \subseteq P_\sigma(A)$ であるから $X = t_A(X) \subseteq t_A(P_\sigma(A)) = K$ が得られる. 従って $X = K$ を得る. $X/K = t_A(P_\sigma(A)/K) \neq 0$ であるから矛盾となる. よって $t_A(P_\sigma(A)) = K = P_\sigma(A)$ が従う.

(4)→(6): σ は根基であるとする. そのとき任意の加群 X について $K_\sigma(X) \in \mathcal{F}_\sigma$ が得られる. $M \in \mathcal{T}_{t_A}$ とする. 短完全列 $0 \rightarrow K_\sigma(M) \rightarrow P_\sigma(M) \rightarrow P_\sigma(M)/K_\sigma(M) \rightarrow 0$ を考える. $K_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ であり $P_\sigma(M)/K_\sigma(M) \simeq M \in \mathcal{T}_{t_A}$ であるから $P_\sigma(M)/K_\sigma(M) = t_A(P_\sigma(M)/K_\sigma(M)) = (t_A(P_\sigma(M)) + K_\sigma(M))/K_\sigma(M)$ が従う. 従って $P_\sigma(M) = t_A(P_\sigma(M)) + K_\sigma(M)$ が得られる. $K_\sigma(M)$ は $P_\sigma(M)$ の小部分加群であるから $P_\sigma(M) = t_A(P_\sigma(M)) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う.

(6)→(5): σ は冪等であると仮定する. 任意の加群 X について $P_\sigma(X)$ は σ -射影的である.

(a): 加群 M とその部分加群 N は $N \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{T}_{t_A}$ で $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ を満たすものとする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P_\sigma(M/N) & & & \\ & & & \downarrow f & \downarrow g & & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & M & \xrightarrow{h} & M/N \rightarrow 0, \end{array}$$

そこで g は M/N の σ -射影被覆に付随する全射であり, h は標準的な全射であり, f は $P_\sigma(M/N)$ の σ -射影性から導かれる準同型である. 仮定より $P_\sigma(M/N) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う. よって $f(P_\sigma(M/N)) = f(t_A(P_\sigma(M/N))) \subseteq t_A(M)$ が導かれる. $N \in \mathcal{T}_{t_A}$ であるから $N = t_A(N) \subseteq t_A(M)$ となる. そのとき次の式が成り立つ. $M/N = g(P_\sigma(M/N)) = h(f(P_\sigma(M/N))) = (f(P_\sigma(M/N)) + N)/N \subseteq (t_A(M) + N)/N = t_A(M)/N \subseteq t_A(M/N) = M/N$. よって $M = t_A(M)$ が得られる.

(b): $N(\in \mathcal{F}_\sigma)$ は加群 $M(\in \mathcal{F}_{t_A})$ の部分加群とする. そのとき次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_\sigma(t_A(M/N)) & \xrightarrow{g} & t_A(M/N) & \rightarrow & 0 \\ & & f \downarrow & & \downarrow i & & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & M & \xrightarrow{h} & M/N \rightarrow 0, \end{array}$$

そこで g は $t_A(M/N)$ の σ -射影被覆に付随する全射であり, i は標準的単射で, f は $P_\sigma(t_A(M/N))$ の σ -射影性により誘導される準同型である.

仮定より $P_\sigma(t_A(M/N)) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う. $M \in \mathcal{F}_{t_A}$ であるから $f = 0$ が従い $ig = 0$ が

得られ, $i = 0$ となる. 従って $t_A(M/N) = 0$ が従う.

(7)→(6): σ は根基であるとする. そのとき任意の加群 M について $K_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ であり, $P_\sigma(M)$ は M の σ -双対本質的拡大であるから明らかに成り立つ.

(6)→(7): σ は冪等と仮定する. そのとき任意の加群 X について $P_\sigma(X)$ はいつでも σ -射影的になる. N は M 小部分加群で $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ で $N \in \mathcal{F}_\sigma$ であるものとする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} & & P_\sigma(M/N) & & & & \\ & & h \swarrow \downarrow f & & & & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & M & \xrightarrow{g} & M/N \rightarrow 0, \end{array}$$

そこで f は M/N の σ -射影被覆に付随する全射で, g は標準的全射で, h は $P_\sigma(M/N)$ の σ -射影性より誘導される準同型である.

g は極小全射で f は全射であるから h もまた全射になる. 仮定より $M/N \in \mathcal{T}_{t_A}$ から $P_\sigma(M/N) \in \mathcal{T}_{t_A}$ が導かれる. h は全射であるから $M \in \mathcal{T}_{t_A}$ が従う.

σ は 0 関手であるなら σ は全射保持-冪等根基となり A は σ -torsionfree となる. よってこのとき σ -CQF-3' 加群は CQF-3' 加群である.

命題 2. σ は全射保持-冪等根基とする. そのとき加群 A に関する次の条件は同値である.

(1) $\mathcal{F}_{t_A}$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -剰余加群で閉じている.

(2) $\mathcal{F}_{t_A} = \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$

証明. (1)→(2): 射影被覆に付随する $P_\sigma(A) \rightarrow A$ は全射であるから $\mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}} \subseteq \mathcal{F}_{t_A}$ が従う. 次に $\mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}} \supseteq \mathcal{F}_{t_A}$ を示す. M は $\mathcal{F}_{t_A}$ の元とする. $M \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ を示す. $M \notin \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ と仮定する. そのとき $\text{Hom}_R(P_\sigma(A), M) \neq 0$ が成り立ち $0 \neq f \in \text{Hom}_R(P_\sigma(A), M)$ が存在する. $\ker f \subsetneq P_\sigma(A)$ であり $K_\sigma(A)$ は $P_\sigma(A)$ の小部分加群であるから $\ker f + K_\sigma(A) \subsetneq P_\sigma(A)$ が従う. σ は全射保持であるから, $\mathcal{F}_\sigma$ は剰余加群で閉じている. かくして

$(K_\sigma(A) + \ker f)/\ker f \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う. よって $P_\sigma(A)/\ker f \subseteq M \in \mathcal{F}_{t_A}$ であるから $P_\sigma(A)/\ker f \in \mathcal{F}_{t_A}$ が成り立つ. 次の図式を考える. $0 \rightarrow (K_\sigma(A) + \ker f)/\ker f \rightarrow P_\sigma(A)/\ker f \rightarrow P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + \ker f) \rightarrow 0$.

仮定より $P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + \ker f) \in \mathcal{F}_{t_A}$ が従う. $A \in \mathcal{T}_{t_A}$ であり, $A \simeq P_\sigma(A)/K_\sigma(A) \rightarrow P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + \ker f)$ であるから $P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + \ker f) \in \mathcal{T}_{t_A} \cap \mathcal{F}_{t_A}$ が成り立つ. よって $P_\sigma(A)/(K_\sigma(A) + \ker f) = 0$ が導かれるがこれは矛盾である. よって $M \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ が成り立つ.

(2) $\rightarrow$ (1): 仮定より $\mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -剰余加群で閉じている. $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は $M \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ の部分加群とする. $M/N \notin \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ と仮定すると $0 \neq f \in \text{Hom}_R(P_\sigma(A), M/N)$ がある. $P_\sigma(A)$ は σ -射影的であるから, $gh = f$ を満たす $h \in \text{Hom}_R(P_\sigma(A), M)$ がある. $M \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ であるから $h = 0$ となり, $f = 0$ が得られる. これは矛盾であるから $M/N \in \mathcal{F}_{t_{P_\sigma(A)}}$ が従う.

補題 3. σ は冪等根基とする. 加群 M とその部分加群 N について次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & K_\sigma(M) & \rightarrow & P_\sigma(M) & \xrightarrow{f} & M \rightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow j \\ 0 & \rightarrow & K_\sigma(M/N) & \rightarrow & P_\sigma(M/N) & \xrightarrow{g} & M/N \rightarrow 0, \end{array}$$

ただし f と g は σ -射影被覆に付随する全射で, j は標準的全射である. $P_\sigma(M)$ の σ -射影性より $jf = gh$ を満たす $h: P_\sigma(M) \rightarrow P_\sigma(M/N)$ が存在する.

そのとき次が成り立つ.

(1) M が M/N の σ -双対本質的拡大なら, $h: P_\sigma(M) \rightarrow P_\sigma(M/N)$ は同型である.

(2) σ が全射保持で $h: P_\sigma(M) \rightarrow P_\sigma(M/N)$ が同型であるなら M は M/N の σ -双対本質的拡大である.

証明. (1): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は M の小部分加群とする. jf は全射であり g は極小全射であるから, h もまた全射である. $j(f(\ker h)) = g(h(\ker h)) = g(0) = 0$ であるから $f(\ker h) \subseteq \ker j = N \in \mathcal{F}_\sigma$ となり, $f(\ker h) \in \mathcal{F}_\sigma$ が得られる. $f|_{\ker h}$ を f の $\ker h$ への制限写像とする. そのとき次式が成り立つ. $\ker(f|_{\ker h}) = \ker h \cap \ker f = \ker h \cap K_\sigma(M) \subseteq K_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$. 次の短完全列を考える. $0 \rightarrow \ker f|_{\ker h} \rightarrow \ker h \rightarrow f(\ker h) \rightarrow 0$. $\mathcal{F}_\sigma$ は拡大で閉じているから $\ker h \in \mathcal{F}_\sigma$ が成り立つ. $P_\sigma(M/N)$ は σ -射影的であるから短完全列 $0 \rightarrow \ker h \rightarrow P_\sigma(M) \rightarrow P_\sigma(M/N) \rightarrow 0$ は分解する. 従ってある部分加群 L が $P_\sigma(M)$ にあって $P_\sigma(M) = L \oplus \ker h$ が成り立つ. それで $f(P_\sigma(M)) = f(L) + f(\ker h)$ が成り立つ. $f(\ker h) \subseteq N$ であり $f(P_\sigma(M)) = M$ であるから $M = f(L) + N$ が成り立つ. N は M の小部分加群であるから $M = f(L)$ が従う. f は極小全射であるから $P_\sigma(M) = L$ が成り立ち $\ker h = 0$ となる. 従って $h: P_\sigma(M) \simeq P_\sigma(M/N)$ となる.

(2): $h : P_\sigma(M) \simeq P_\sigma(M/N)$ と仮定する. 上の図式と h の可換性より, $h(f^{-1}(N)) \subseteq K_\sigma(M/N) \in \mathcal{F}_\sigma$ が成り立つ. h は同型であるから $f^{-1}(N) \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う. $f|_{f^{-1}(N)} : f^{-1}(N) \rightarrow N \rightarrow 0$ であり σ は全射保持弱根基であるから $N \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う.

次に N は M の小部分加群であることを示す. K は M の部分加群で $M = N + K$ が成り立つものとする. もし $f^{-1}(K) \subsetneq P_\sigma(M)$ であるなら h は同型であるから $h(f^{-1}(K)) \subsetneq P_\sigma(M/N)$ が成り立つ. $g(h(f^{-1}(K))) = j(f(f^{-1}(K))) = j(K) = (K + N)/N = M/N$ が成立するが g は極小全射であるから矛盾を引き起こす. 従って $f^{-1}(K) = P_\sigma(M)$ となる. よって $K = f(f^{-1}(K)) = f(P_\sigma(M)) = M$ が成り立ち N は M の小部分加群である.

命題 4. σ は冪等根基とする. σ -CQF-3' 加群全体は σ -双対本質的拡大で閉じている.

証明. $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は $P_\sigma(M/N)$ が M/N で生成されるような加群 M の部分加群とする. そのとき補題 3 より次が成り立つ. $\oplus M \rightarrow \oplus(M/N) \rightarrow P_\sigma(M/N) \simeq P_\sigma(M)$. よって M は σ -CQF-3' 加群である.

2. σ -全射保持-弱根基と σ -双対遺伝的振れ理論

ここでは振れ理論を重複して用いて全射保持-弱根基を拡張する. 加群 A が σ -CQF-3' ならば t_A は定理 1 より σ -全射保持-弱根基である.

定理 5. σ は冪等根基とする. 弱根基 t に関する次の条件を考える.

- (1) t は σ -全射保持である.
- (2) $\mathcal{T}_t$ は σ -双対本質的拡大で閉じている.
- (3) $\mathcal{T}_t$ は σ -射影被覆で閉じている.
- (4) (i) $\mathcal{F}_t$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -剰余加群で閉じている.
(ii) $\mathcal{T}_t$ は $\mathcal{F}_\sigma$ -拡大で閉じている.

そのとき (4) $\leftarrow$ (1) $\rightarrow$ (2) $\longleftrightarrow$ (3) が成り立つ.

もし t が冪等ならば (3) $\rightarrow$ (1) が成り立つ.

σ が全射保持で t は根基ならば (4) $\rightarrow$ (1) が成り立つ.

よって σ が全射保持冪等根基で t が冪等根基なら全ての条件は同値である.

証明. σ は冪等根基であるから任意の加群 M は σ -射影被覆を持ち $P_\sigma(M)$ で与えられる.

(1) $\rightarrow$ (2): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は加群 M の小部分加群で $M/N \in \mathcal{T}_t$ とする. よって $M/N = t(M/N) = (t(M) + N)/N$ が成り立ち, $M = t(M) + N$ が得られる. N は M の小部分加群であるから $M = t(M)$ が得られる.

(2) $\rightarrow$ (3): 明らかである.

(3)→(2): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は M の小部分加群で $M/N \in \mathcal{T}_t$ を満たすものとする。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P_\sigma(M/N) & & & \\ & & & \downarrow f & & & \\ & h \swarrow & & & \searrow & & \\ 0 & \rightarrow & N & \rightarrow & M & \xrightarrow[g]{} & M/N \rightarrow 0, \end{array}$$

そこで f は M/N の σ -射影被覆に付随する全射とし、 g は標準的全射で h は $P_\sigma(M/N)$ の σ -射影性から導かれる写像とする。

f は全射で g は極小全射であるから、 h は全射である。仮定により $P_\sigma(M/N) \in \mathcal{T}_t$ が得られ、従って $M \in \mathcal{T}_t$ となる。

(1)→(4): これは定理 1 の (4)→(5) の証明とほとんど同じである。

(3)→(1): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は加群 M の部分加群で t は冪等弱根基とする。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P_\sigma(t(M/N)) & & & \\ & & & \downarrow f & & & \\ & & & t(M) \rightarrow t(M/N) & & & \\ & & \downarrow j & & \downarrow i & & \\ 0 & \rightarrow & N & \xrightarrow[u]{} & M & \xrightarrow[g]{} & M/N \rightarrow 0, \end{array}$$

ただし i, j と u は標準的単射であり、 f は $t(M/N)$ の σ -射影被覆に付随する全射で g は M から M/N への標準的全射とする。仮定より $P_\sigma(t(M/N)) \in \mathcal{T}_t$ である。 $N \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $P_\sigma(t(M/N))$ の σ -射影性より

$h \in \text{Hom}_R(P_\sigma(t(M/N)), M)$ が存在して $if = gh$ が成り立つ。

$h(P_\sigma(t(M/N))) = h(t(P_\sigma(t(M/N)))) \subseteq t(M)$ であるから

$h \in \text{Hom}_R(P_\sigma(t(M/N)), t(M))$ である。 $g(t(M)) \subseteq t(M/N)$ であるから g は $f = g'h$ である $g' \in \text{Hom}_R(t(M), t(M/N))$ を誘導する。 f は全射であるから、 g' もまた全射である。よって $(t(M) + N)/N = g'(t(M)) = t(M/N)$ が得られる。

(4)→(1): $N \in \mathcal{F}_\sigma$ は加群 M の部分加群で t は根基で σ は全射保持とする。そのとき次の式が成り立つ。 $(N + t(M))/t(M) \simeq N/(N \cap t(M)) \leftarrow N \in \mathcal{F}_\sigma$ 。次の短完全列を考える。 $0 \rightarrow (N + t(M))/t(M) \rightarrow M/t(M) \rightarrow M/(N + t(M)) \rightarrow 0$ 。 $M/t(M) \in \mathcal{F}_t$ であるから仮定 (i) より $M/(N + t(M)) \in \mathcal{F}_t$ が従う。よって $(M/N)/((N + t(M))/N) \in \mathcal{F}_t$ となり、 $t(M/N) \subseteq (N + t(M))/N$ が成り立つ。 t は弱根基であるから、 $t(M/N) \supseteq (N + t(M))/N$ が成り立つので $t(M/N) = (N + t(M))/N$ が従う。

命題 6. σ は全射保持根基で t は弱根基とする. そのとき次は同値である.

(1) N は M の部分加群で $M \supseteq N \supseteq t(M)$ を満たすものとする. このとき $N/t(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ なら $M/N \in \mathcal{F}_t$ が成り立つ.

(2) t は根基で σ -全射保存弱根基である.

証明. (1) $\rightarrow$ (2): N の代わりに $t(M)$ を用いる. そのとき $M/t(M) \in \mathcal{F}_t$ が成り立ち t は根基となる.

次に 「 $N \in \mathcal{F}_\sigma \Rightarrow t(M/N) = (t(M) + N)/N$ 」 を示したい. N の代わりに $N + t(M)$ を使う. 次の短完全列を考える. $0 \rightarrow (N + t(M))/t(M) \rightarrow M/t(M) \rightarrow M/(N + t(M)) \rightarrow 0$.

「 $(N + t(M))/t(M) \simeq N/(N \cap t(M)) \leftarrow N \in \mathcal{F}_\sigma$ 」であるから $(N + t(M))/t(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ が従う. よって仮定により $M/(N + t(M)) \in \mathcal{F}_t$ が従い同型であるから $(M/N)/((N + t(M))/N) \in \mathcal{F}_t$ となる. よって $t(M/N) \subseteq (N + t(M))/N$ が従う. 弱根基の性質より, $t(M/N) \supseteq (N + t(M))/N$ は成り立つから $t(M/N) = (N + t(M))/N$ は成り立つ.

(2) $\rightarrow$ (1): N は M の部分加群で $M \supseteq N \supseteq t(M)$ で $N/t(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるものとする. 次の完全列を考える. $0 \rightarrow N/t(M) \rightarrow M/t(M) \rightarrow M/N \rightarrow 0$. t は σ -全射保持根基であるから,

$\{t(M/t(M)) + N/t(M)\}/(N/t(M)) \simeq t(M/N)$ である. 従って $0 \simeq t(M/N)$ がわかる.

参考文献

1. L. Bican, **QF-3' modules and rings**, Commentationes Mathematicae, Universitatis Carolinae, 14(1973), 295-301.
2. P. E. Bland, **Perfect torsion theories**, Proc. Amer. Math. Soc. 41(1973), 349-355.
3. P. E. Bland, **Divisible and codivisible modules**, Math. Scand. 34(1974), 153-161
4. R. R. Colby and E. A. Rutter Jr., **Semi-primary QF-3' rings**, Nagoya Math. J. 32(1968), 253-258.
5. S. E. Dickson, **A torsion theory for abelian categories**, Trans. Amer. Math. Soc. 121(1966), 223-235.
6. J. S. Golan, "Localization of Noncommutative Rings". Marcel Dekker, New York, 1975.
7. J. P. Jans, H. Y. Mochizuki and L. E. T. Wu, **A characterization of QF-3 rings**, Nagoya Math. J. 27(1966), 7-13.

8. J. P. Jans, H. Y. Mochizuki, **Torsion associated with duality**, Tohoku Math. J. 32 (1972), 449-452.
9. Y. Kurata and H. Katayama, **On a generalization of QF-3' rings**, Osaka Journal of Mathematics, 13(1976), 407-418.
10. F. F. Mbuntum and K. Varadarajan, **Half exact preradicals**, Comm. in Algebra, 5(1977), 555-590.
11. K. Ohtake, **Colocalization and Localization**, Journal of pure and applied algebra 11(1977), 217-241.
12. K. Ohtake, **Equivalence between colocalization and localization in abelian categories with applications to the theory of modules**, Journal of Algebra 79(1982), 169-205.
13. Bo Stenstrom, **"Rings and Modules of Quotients"**. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
14. C. Vinsonhaler, **A note on two generalizations of QF-3**, Pac. J. Math. 40(1972), 229-233.
15. Y. Takehana, **On a generalization of CQF-3' modules and cohereditary torsion theories**, to appear in Math. J. Okayama Univ.
16. Y. Takehana, **On a generalization of QF-3' modules and hereditary torsion theories**, to appear in Math. J. Okayama Univ.

General Education, Hakodate National College of Technology,
 14-1, Tokura-cho, Hakodate-shi, Hokkaido, 042-8501 Japan
 Email takehana@hakodate-ct.ac.jp