

四次元から見た unknotting operations I

早大理工 安原 晃 (Akira Yasuhara)

ここでは、特にことわらないかぎり、smooth category で、knot および manifold は全て oriented とします。

ある素数 p に対して、Fig.1 のような knot diagram の local move を $\#^p$ -move と呼ぶことにします。

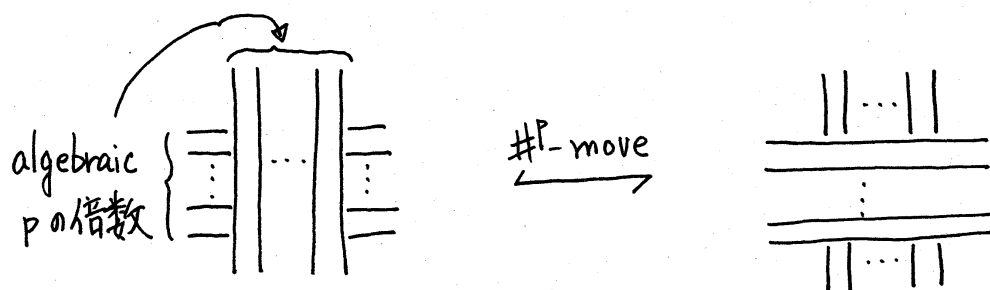


Fig. 1

注: $\#^p$ -move では、縦と横の string の本数は同じでなくてもよい。

命題 1. $\#^p$ -move は unknotting operation である。即ち、任意の knot は有限回の $\#^p$ -move (p を固定) で、trivial knot にできる。

定理2. knot k_1, k_2 に対して、もし k_2 が k_1 から1回の $\#^p$ -move で得られるとき、 k_1 の diagram で $\#^p$ -move をほどこすところの格子点の符号の総数 $(= (\text{正の総数}) + (\text{負の総数}))$ は、 $\#^p$ -move をほどこす場所や knot diagram に依存せず、knot type と p のみに依存する。

定理2 を証明する為に、いくつか定理と補題を導入します。

定理3. (Rohlin [R]) M を connected, simply connected, closed 4-manifold とする。 $H_2(M)$ の元 Σ が M 内の 2-sphere で実現されているとき、次が成立する。

(i) もし Σ が 2 で割れるならば、

$$\left| \Sigma^2/2 - \sigma(M) \right| \leq \text{rank } H_2(M).$$

(ii) もし Σ が奇素数 q で割れるならば、

$$\left| \Sigma^2(q^2-1)/2q^2 - \sigma(M) \right| \leq \text{rank } H_2(M).$$

定理4. (Kervaire and Milnor [K-M]) M は定理3 と同じものとする。もし $H_2(M)$ の特性類 Σ が M 内の 2-sphere で実現されているならば、 $\Sigma^2 \equiv \sigma(M) \pmod{16}$ が成立する。

Kirby's calculus と Fig.2 より、ただちに次の補題が得られ

る.

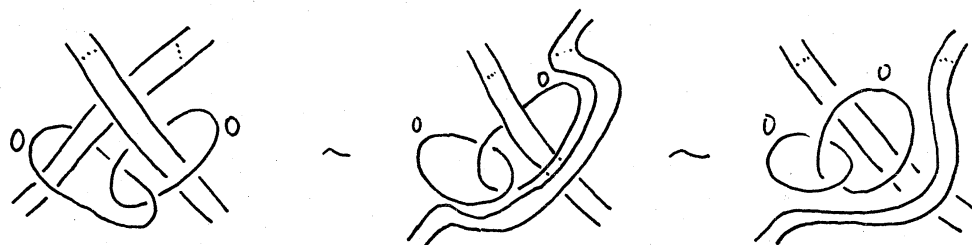


Fig. 2.

補題 5. k_1 を knot, k_2 を k_1 から 1 回の $\#$ -move で得られた knot とする. n を k_1 の diagram で $\#$ -move をほどくところの格子点の符号の総数とする. このとき, $S^2 \times S^2 - \text{int}(B_1^4 \cup B_2^4)$ に proper に埋め込まれた annulus A で次の性質を満たすものが存在する.

$$(i) A \cap \partial B_1^4 = k_1, \quad A \cap \partial B_2^4 = -k_2^!$$

(ii) A が実現する $H_2(S^2 \times S^2 - \text{int}(B_1^4 \cup B_2^4), \mathbb{Z})$ の元は p で割れ.

かつ, $\frac{p}{2} = 2n$ を満たす.

ここで, $-k^!$ は k の reflected inverse を表わす.

定理 2 の証明. k_1 から k_2 を得る $\#$ -move が 2 通りあり, それらから決まる格子点の総数を n_1, n_2 とする.

補題 5 より, 各 n_i ($i=1, 2$) に対して, $M_i = S^2 \times S^2 - \text{int}(B_{i,1}^4 \cup B_{i,2}^4)$

に proper に埋め込まれた annulus A_i が存在して.

$$(i) A_i \cap B_{i1}^+ = k_1, A_i \cap B_{i2}^+ = -k_2^!$$

(ii) A_i が実現する $H_2(M_i, \mathbb{Z})$ の元 $\bar{\gamma}_i$ は, p で割れて, $\bar{\gamma}_i^2 = 2n_i$ を満たす.

このとき pair の orientation reversing diffeo

$$f: (\partial B_{12}^+, \partial B_{12}^+ \cap A_1) \rightarrow (-\partial B_{22}^+, -\partial B_{22}^+ \cap (-A_2))$$

が存在するので, $M = M_1 \cup_f (-M_2)$, $A = A_1 \cup_f (-A_2)$ とおく.

そこで, A 上に proper arc をとり, その M での neighborhood を M からとり除くことにより得られる manifold を M' , $M' \cap A = A'$ とすると, M' は punctured $2(S^2 \times S^2)$, A' は M' に proper に埋め込まれた $\mathbb{Z}$ -disk で $\partial A' = k_1 \# (-k_2^!)$ を満たす. 更に A' が実現する $H_2(M', \mathbb{Z})$ の元 $\bar{\gamma}$ は p で割れて, $\bar{\gamma}^2 = 2n_1 - 2n_2$ を満たす.

$k_1 \# (-k_2^!)$ が slice knot であることから $\bar{\gamma}$ が $2(S^2 \times S^2)$ 内の $\mathbb{Z}$ -sphere で実現できることがわかる.

そこで, $p=2$ のときは, 定理3 および定理4 から $n_1 = n_2$ が導かれ, $p \neq 2$ のときは, 定理3 から $n_1 = n_2$ が導かれる. //

定義. k を knot, $\mathcal{K}(k, p)$ を k から 1 回の $\#^p$ -move により得られる knot の集合とする. このとき, $k' \in \mathcal{K}(k, p)$ に対して, $\varphi_{(k,p)}(k')$ を k に $\#^p$ -move をほどこすところの格子点の符号の総数とすることにより, 関数 $\varphi_{(k,p)}: \mathcal{K}(k, p) \rightarrow \mathbb{Z}$ を

定義する. この定義が well-defined であることは, 定理 2 により保証される. また, 定理 2 の証明をみれば, $\varphi(k, p)$ は cobordism invariant であることがわかる. 即ち $k', k'' \in \mathcal{K}(k, p)$ に対して $k' \sim k''$ ならば, $\varphi(k, p)(k') = \varphi(k, p)(k'')$ が成立する.

例. T を S^3 内の solid torus. k を T 内の knot で T の meridian と k との linking number を l とする. また k_* を k から T の meridian に沿う $-2l$ -full twist により得られた knot とする. もし l がある素数 p で割れるならば, $k_* \in \mathcal{K}(k, p)$ であり, さらに $\varphi(k, p)(k_*) = \alpha l^2$ なので, $\alpha \neq \alpha'$ ならば $k_* \not\sim k_{*}'$ である.

定理 2 の証明とはほぼ同様にして, 次の定理を示すことができる.

定理 6. $k_0, k_1, \dots, k_n$ を knot の列で, k_i は k_{i-1} から 1 回の $\#$ -move で得られる knot とする.

(i) $p=2$ かつ, $k_0 \sim k_n$ ならば, $\left| \sum_{i=1}^n \varphi(k_{i-1}, 2)(k_i) \right| \leq 2n$ かつ $\sum_{i=1}^n \varphi(k_{i-1}, 2)(k_i) \equiv 0 \pmod{8}$

(ii) $p^2 > 2n+1$, $p \neq 2$ かつ $k_0 \sim k_n$ ならば $\sum_{i=1}^n \varphi(k_{i-1}, p)(k_i) = 0$

(iii) k_n が slice knot, $p^2 > 2n+1$ かつ $\sum_{i=1}^n \varphi(k_{i-1}, p) \neq 0$ ならば, k_0 の cobordism group での order は infinite.

系 6.1. k_0, k_1, k_2, k_3 を定理 6 のような knot の列とする.
 $k_0 \sim k_3$ ならば, $\sum_{i=1}^3 \varphi(k_{i-1}, p)(k_i) = 0$

例. k を $(-3, 7)$ -torus knot の $(3, 7)$ -cable とすると,
 $\sigma(k) = 0$ か, $\text{Arf}(k) = 0$ である. ところが k は 1 回の $\#^3$ -move
 で trivial knot O になることがわかり, $\varphi(k, 3)(O) = 9$ となる
 従って, 定理 6 (iii) より k の cobordism group $\mathcal{T}$ の order は infinite.

参 考 文 献

- [K-M] M. A. Kervaire and J. W. Milnor, On 2-sphere in 4-manifolds,
 Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 47 (1961), 1651-1657.
 [R] V. A. Rohlin, Two-dimensional submanifolds of four-dimensional
 manifolds, Functional Anal. Appl., 5 (1974), 39-48.