

31. 間欠性カオスを特徴づける軌道拡大率と軌道の時間相関

九大・理・物理 小林達治 森信之 秦浩起

吉田健 森肇

1. 軌道拡大率による揺らぎ

カオスの予測不可能性は、軌道間の距離の指数関数的拡大のために生じている。

それを特徴づける量として、場所 x_i の単位時間当りの2つの軌道間の距離の拡大率の対数である軌道拡大率 $\lambda(x_i)$ は、重要な量である。

アトラクター上には、様々な軌道拡大率を持った点が存在しており、それらは、そのアトラクターの特徴的な構造と密接な関係にある。ところが、軌道拡大率の長時間平均であるリャプノフ数は、エルゴード性の成り立っていると期待されている散逸系のカオスでは、ただ一つの軌道拡大率だけしか取り出すことができず、アトラクターの内部構造を取り出すのには、不十分である。そこで、軌道拡大率の揺らぎを取り出す試みとそれによるアトラクターの特徴づけ、さらに、アトラクターの構造変化点で起こる現象について述べる。

今、 n ステップでの平均の軌道拡大率を $\Lambda_n(x_0)$ として、以下の量を考える。

$$Z_n(q) = \langle \exp \{ -n(q-1) \Lambda_n(x_0) \} \rangle \quad (1)$$

$\langle \quad \rangle$: 位相平均

また、 $Z_n(q)$ の $n \rightarrow \infty$ での漸近的指数部分 $\Phi(q)$ を

$$\Phi(q) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(q)$$

と定義する。そうすると、

$$Z_n(q) = Q_n(q) \exp(-n\Phi(q))$$

となる。また、 $\Lambda(q) = \Phi'(q)$ 、 $\sigma(q) = -\Lambda'(q)$ とする。

ここで、 $P(\Lambda; n) = \langle \delta(\Lambda - \Lambda_n(x_0)) \rangle$ を使うと、

$$\Lambda(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_n(q)} \int d\Lambda P(\Lambda; n) \Lambda \exp\{-n(q-1)\Lambda\}$$

$$\sigma(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{Z_n(q)} \int d\Lambda P(\Lambda; n) \{\Lambda - \Lambda(q)\}^2 \exp\{-n(q-1)\Lambda\}$$

となり、 $\Lambda(q)$ は、軌道拡大率の重み付きの平均であり、 $\sigma(q)$ は重み付きの分散である。 $q=1$ の時には、重み=1 となり、 $\Lambda(1)$ は、リャプノフ数に一致している。ところが、 q を変えることによって、様々な軌道拡大率を取り出すことができる。特に、 $q \rightarrow \infty$ では、最も軌道拡大率の小さい安定な軌道を取り出しており、逆に、 $q \rightarrow -\infty$ では、最も軌道拡大率の大きい不安定な軌道を取り出している。

2. 熱力学とのアナロジー

形式的には、今定義した量は、熱力学の形式と対応づけられる。

力学系	熱力学
n : 時間	N : 粒子数
$Z_n(q)$	分配関数
$\int d\Lambda \ p(\Lambda:n) \exp(-n(q-1)\Lambda_n(x_0))$	$\int d\mathbf{m} \ p(\mathbf{m}:n) \exp(N\beta H\mathbf{m})$
$1-q$	H : 外場 (磁場)
$\Phi(q)$	ヘルムホルツの自由エネルギー
$\Lambda(q)$	秩序パラメーター (磁化)
$\sigma(q)$	応答関数 (感受率)

3. 具体的応用 (解析的結果) ———— q - 相転移

区分的に線形な写像に対しては、軌道拡大率の揺らぎによる解析が、厳密に実行できる¹⁾。そこで今回は、間欠性カオスをモデル化した写像 SOM 写像について実行した。

図1のように SOM 写像は、間欠性カオスに特徴的であったラミナー運動とバースト運動が存在している。

チャンネルの部分を狭くしていく極限 (間欠性カオスの発生点に上から近づく極限) では、 $\Phi(q)$ 、 $\Lambda(q)$ 、 $\sigma(q)$ は、各区間での傾き a 、 b と q だけ

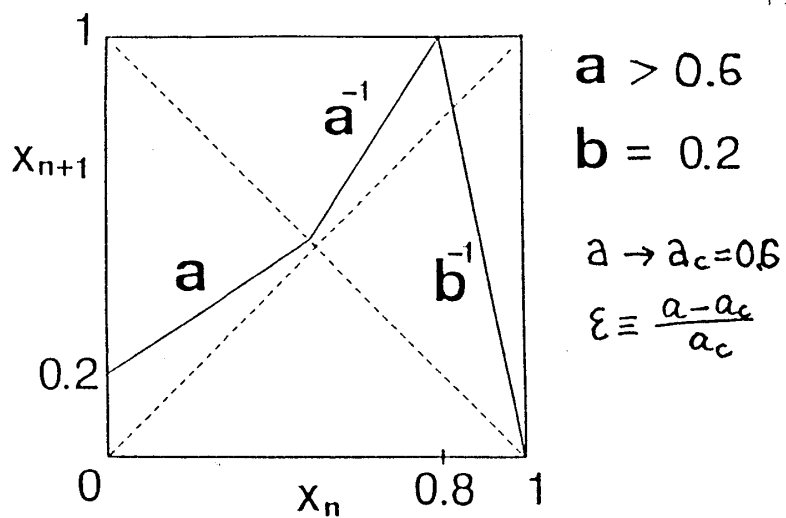


図1 SOM写像

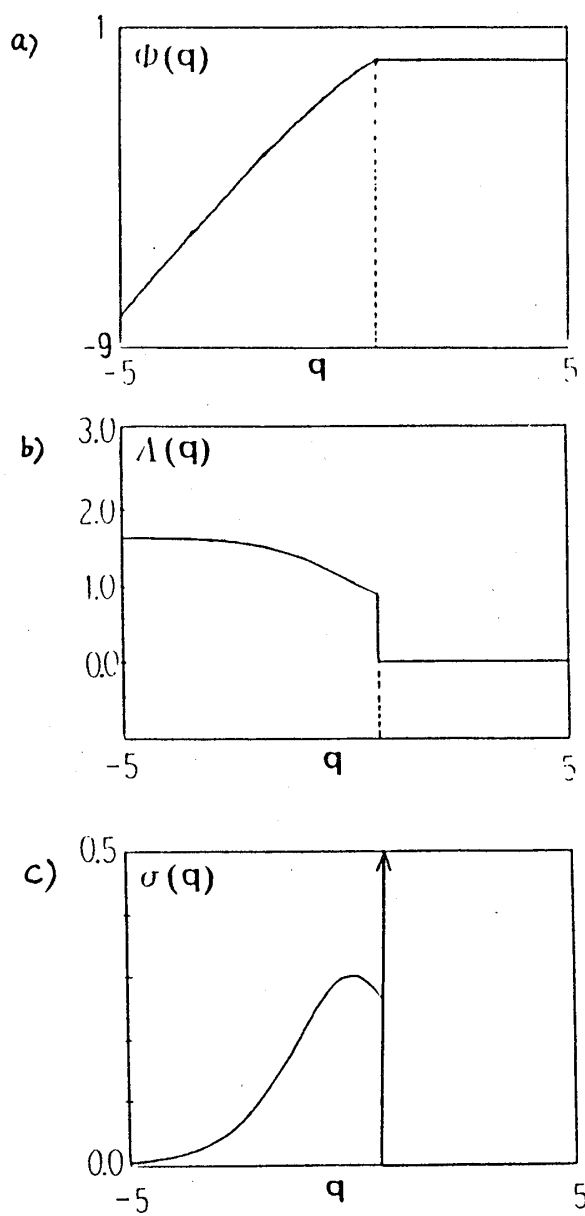


図2

の簡単な関数として、書き下すことができる。それが、図2である。

ここで第一に注目すべきことは、この間欠性カオスの発生点（臨界軌道）で、 $\Lambda(q)$ にとびが生じていることである。すなわち、そのとびを与える q を q_c とすると、 $q > q_c$ では、軌道拡大率の小さいラミナー運動を、 $q < q_c$ では、軌道拡大率の大きいバースト運動（不平等なテント写像と同じ $\Phi(q)$ ）を別々に捉えており、その2つの相の間を q を変えていったときに、シャープに移り変わる。（ q -相転移）²⁾

また、 $\Lambda(q)$ のとびに対応して、 $\sigma(q)$ の発散が生じている。この発散のしかたを調べてみると、臨界点に近づくにつれて、ラミナー運動の特性時間に比例して発散している。（図3）他にも、 $\sigma(q)$ の最大値を与える $\hat{q}_c$ の q_c への近づき方もラミナー運動の特性時間に対してべき則になることがわかった。（図4）

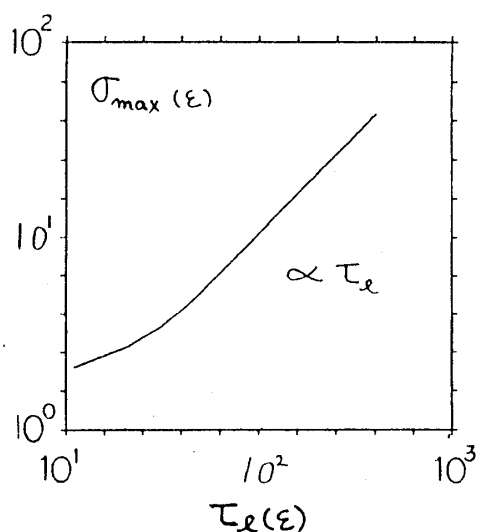


図3

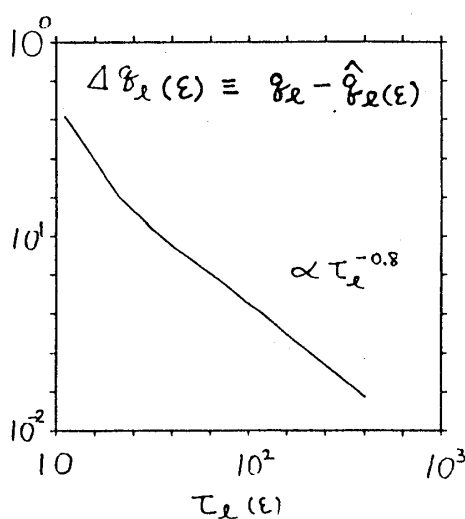
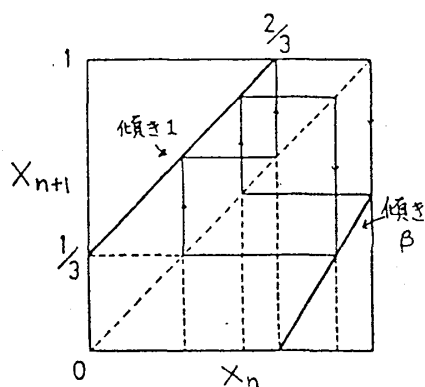
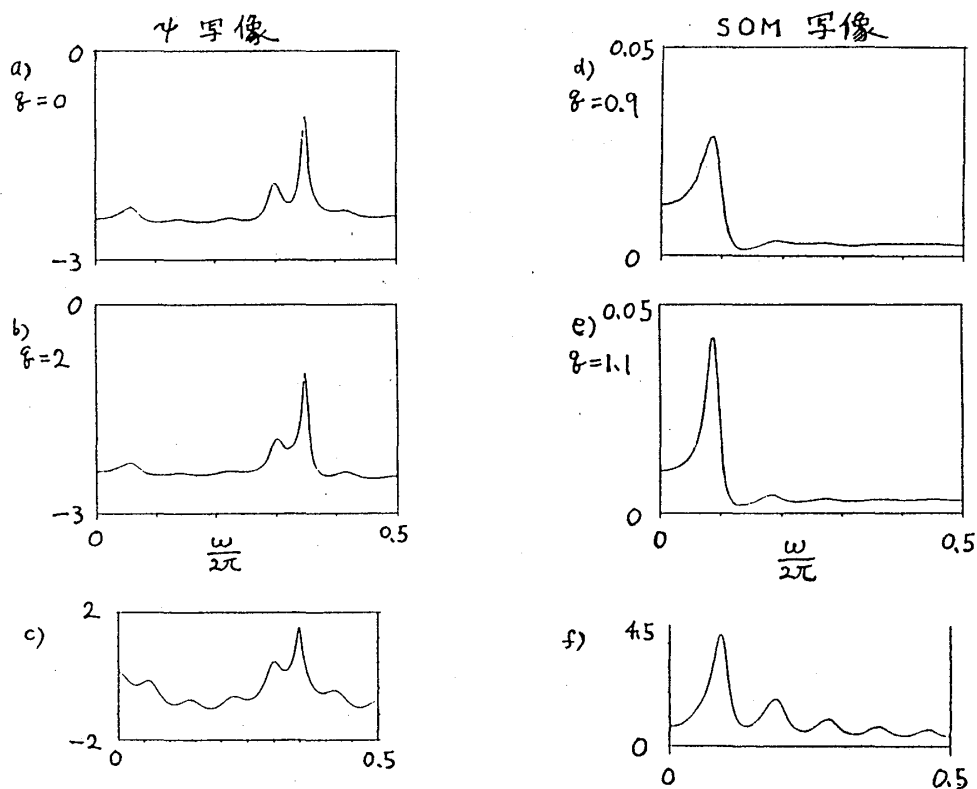


図4 $\tau_\epsilon(\epsilon)$: ラミナー運動の特性時間
 $\tau_\epsilon(\epsilon) \propto \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$

4. $Q_n(q)$ と軌道の時間相関

今までは、力学系の分配関数 $Z_n(q)$ の漸近的指数部分 $\Phi(q)$ を扱ったが、今度は、 $\Phi(q)$ で無視していた部分 $Q_n(q)$ を考える。

例として、SOM写像と ψ 写像（図5）を用いる。 $q=1$ 近傍での $Q_n(q)$ のcos変換と軌道のパワースペクトルを比べるとピークの位置は一致している。（図6）このことから、 $q=1$ 近傍での $Q_n(q)$ は、軌道の相関を捉えている

図5 ψ map $\beta > 1, \beta \rightarrow 1$ 図6 $Q_n(q)$ の $\cos$ 変換の逆符号(a, b, d, e)と
軌道のパワースペクトル(c, f)

ことが期待される。これは、 $Q_n(q)$ が軌道拡大率の相関を捉えている¹⁾ことから、臨界点近傍で、軌道拡大率の相関と軌道の相関が関係づくために起こると考えられる。

references

- 1) H.Fujisaka, M.Inoue :Prog.Theor.Phys. 78 (1987), 268.
- 2) T.Morita et al:Prog.Theor.Phys. 79 (1988) no.2