

双曲型混合問題の L^2 -well-posedness について

奈良女子大 坂本礼子

はじめに 強双曲型方程式は, いかなる境界条件のもとで L^2 -well posed になるかという問題について, 必要条件・十分条件の両面から研究がすすめられてきた。とくに定数係数, 半空間の場合には, 上見-白田による, L^2 -well-posedness が成り立つための必要十分条件の1つの定式化がある。それは, (t, y) についての Laplace-Fourier 変換によって得られるパラメータ付きの常微分方程式にかんする一様 L^2 -well-posedness であった。しかしそれは一様ロパチンスキー条件とのかかわりをあまり明確にするものではなかったように思われる。ここでは, そのような問題を扱いながら, 元の方程式によ, てかなり直接的に求められる代数的量によ, て L^2 -well-posedness を特徴づけることを試みた。

問題 $t > 0, x > 0, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ において,

$$(P) \begin{cases} A(D_t, D_x, D_y)u = f \\ B_j(D_t, D_x, D_y)u|_{x=0} = 0 \quad j=1, \dots, \mu \\ D_t^j u|_{t=0} = 0 \quad j=0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

この問題に対する L^2 -well-posedness とは: 任意の $T > 0$ に対し, $C_T > 0$ が存在して, $C_T \rightarrow 0$ ($T \rightarrow +\infty$) かつ

$$\sum_{i+j+|\mu| \leq m-1} \int_0^T dt \int_{R_+^n} |D_t^i D_x^j D_y^\mu u(t, x, y)|^2 dx dy$$

$$\leq C_T \int_0^T dt \int_{R_+^n} |f(t, x, y)|^2 dx dy$$

が成り立つときをいうことにしよう。 ($0 \leq r_j \leq m-1$)

仮定 A : m 次同次, B_j : r_j 次同次 $\underbrace{\quad}_{(0 \leq r_j \leq m-1)}$ であって,

- i) A は t 軸の方向に強双曲型,
- ii) $x=0$ は A の特性面でない,
- iii) $\{A, B_j\}$ は, ロバチンスキー条件 (Hersh の条件) を満たす.

いま, (t, y) について Laplace-Fourier 変換すれば,

問題は

$$\begin{cases} A(t, z; D_x) \hat{u}(x) = \hat{f}(x), & x > 0 \\ B_j(t, z; D_x) \hat{u}(0) = 0, & j=1, \dots, \mu \end{cases}$$

となる。これに対する Green 函数を $G(t, z; x, y)$ とかくと, この $\hat{f} \in L^2$ に対する L^2 解は,

$$\hat{u}(x) = \int_0^\infty G(t, z; x, y) \hat{f}(y) dy, \quad x > 0$$

と表わせる。このとき, 上見-白田の考察から, つぎのことがいえている。

補題 (P) に対し L^2 -well-posedness が成り立つための必要十分条件は,

$$\|G(\tau, \eta; x, y)\| \Rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^k G(\tau, \eta; x, y) \right\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} \tau|}$$

$$(\tau \in \mathbb{C}^1, \operatorname{Im} \tau < 0, \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, |\tau|^2 + |\eta|^2 = 1)$$

である。ただし、 C は (τ, η) に無関係である。したがってまた

$$G(\tau, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{i(x-y)\xi}}{A(\tau, \xi, \eta)} d\xi = G_\tau(\tau, \eta; x, y)$$

とあれば、上の条件において G を G_τ で置きかえてよい。

ここでは、この事実を未発表として考察していく。

§1. 主要条件について.

1.1. 準備. いま、実数 (σ_0, η_0) をとめて、 $A=0$ の ξ に
関する実根を $\{\xi_i \text{ (} m_i \text{ 重根)}\}_{i=1, \dots, N}$ とする。このとき、
その近傍で

$$A(\tau, \eta; \xi) = \prod_{i=1}^N H_i(\tau, \eta; \xi) E(\tau, \eta; \xi) = H \cdot E,$$

$$H_i(\tau, \eta; \xi) = (\xi - \xi_i)^{m_i} + a_{i,1}(\tau, \eta) (\xi - \xi_i)^{m_i-1} + \dots + a_{i,m_i}(\tau, \eta),$$

$$(a_{i,j}(\tau, \eta) : \text{正則}, a_{i,j}(\sigma_0, \eta_0) = 0)$$

なる分解ができる。また、仮定から、

$$\begin{cases} a_{i,j}(\tau, \eta) \text{ (} (\tau, \eta) \in \mathbb{R}^n \text{)} \text{ は実数値,} \\ \sum_{i=1}^N a_{i,m_i}(\tau, \eta) \neq 0, \end{cases}$$

なる性質をもつ τ と η とを仮定する。さて、 $0 < \theta < 1$ を 1 つ

とめたとき,

$$\begin{aligned} \Delta_i: & \left| \frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0, \tau_0)}{\partial \tau} (\tau - \sigma_0) + \frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0, \tau_0)}{\partial \tau} (\tau - \tau_0) \right| \\ & \geq \theta \left(\left| \frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0, \tau_0)}{\partial \tau} \right|^2 + \left| \frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0, \tau_0)}{\partial \tau} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times d \\ & \left(d = \text{dis} \{ (\tau, \tau), (\sigma_0, \tau_0) \} \right) \end{aligned}$$

とある。また,

$$\begin{aligned} \Delta_{i\delta} &= \{ d < \delta, \text{Im} \tau < 0 \} \cap \Delta_i & (m_i \geq 2 \text{ のとき}) \\ &= \{ d < \delta, \text{Im} \tau < 0 \} & (m_i = 1 \text{ " }), \end{aligned}$$

また, $\Delta_{i\delta}$ の部分で

$$\frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0, \tau_0)}{\partial \tau} (\text{Re} \tau - \sigma_0) + \frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0, \tau_0)}{\partial \tau} (\tau - \tau_0) \geq 0 \quad (\leq 0)$$

の部分で $\Delta_{i\delta}^+ (\Delta_{i\delta}^-)$ とかく。さらに,

$$\Delta_\delta = \cap \Delta_{i\delta}, \quad \Delta_\delta^* = \cap \Delta_{i\delta}^\pm, \quad \Delta_\delta = \bigcup_* \Delta_\delta^*$$

補題 1.1 $\delta > 0$ が存在して, $\Delta_{i\delta}$ では $H_i(\tau, \tau; \xi) = 0$ の根

$\{\xi_{ij}^\pm(\tau, \tau)\}_{j=1,2,\dots,m_i^\pm} (\text{Im} \xi_{ij}^\pm \geq 0)$ は,

$$(\xi - \xi_i)^{m_i} + \frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0, \tau_0)}{\partial \tau} (\tau - \sigma_0) + \frac{\partial a_{im_i}(\sigma_0, \tau_0)}{\partial \tau} (\tau - \tau_0) = 0$$

の根を主部とし, 誤差は $O(d^{\frac{1}{m_i}})$ である。

系 i) $c_1 d^{\frac{1}{m_i}} < |\xi_{ij}^\pm(\tau, \tau) - \xi_i|, |\xi_{ij}^\pm(\tau, \tau) - \xi_{ik}^\pm(\tau, \tau)| < c_2 d^{\frac{1}{m_i}}$
 $\Delta_{i\delta}$ では,

ii) m_i : 偶数のとき, Δ_{is} において $\text{Im} \tau \rightarrow 0$ とすると, $\text{Im} \xi_{i1}^+$, $\text{Im} \xi_{i1}^- \rightarrow 0$. m_i : 奇数のときは, Δ_{is} において $\text{Im} \tau \rightarrow 0$ とすると, $\frac{\partial a_i m_i}{\partial \tau}(\delta_0 \eta_0) > 0$ なら $\text{Im} \xi_{i1}^+ \rightarrow 0$, $\frac{\partial a_i m_i}{\partial \tau}(\delta_0 \eta_0) < 0$ なら $\text{Im} \xi_{i1}^- \rightarrow 0$. そこで, Δ_s^* において, $\text{Im} \tau \rightarrow 0$ とすれば実となる根を $\xi_{ij}^{(\pm)}$, そうでないものを $\xi_{ij}^{(\pm)}$ と区別してかくと,

$$C_1 \frac{\gamma}{d^{1-\frac{1}{m_i}}} < |\text{Im} \xi_{ij}^{(\pm)}(\tau, \eta)| < C_2 \frac{\gamma}{d^{1-\frac{1}{m_i}}} \quad (\gamma = -\text{Im} \tau)$$

$$C_1 d^{\frac{1}{m_i}} < |\text{Im} \xi_{ij}^{(\pm)}(\tau, \eta)| < C_2 d^{\frac{1}{m_i}}$$

で表わす。

iii) Δ_s において,

$$\textcircled{R} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m_i^+} C_{ij}^{\pm}(\tau, \eta) \begin{pmatrix} B_1(\xi_{ij}^{\pm}(\tau, \eta)) \\ \vdots \\ B_n(\xi_{ij}^{\pm}(\tau, \eta)) \end{pmatrix}$$

$$+ \sum_{j=1}^M C_{0j}^{\pm}(\tau, \eta) \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_1(z) z^{j-1}}{E_{\pm}(z)} dz \\ \vdots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_n(z) z^{j-1}}{E_{\pm}(z)} dz \end{pmatrix}$$

とかき表せて, $\{C_{ij}^{\pm}(\tau, \eta) d^{1-\frac{1}{m_i}}, C_{0j}^{\pm}(\tau, \eta)\}$ は Δ_s で基底である。ただし, $E(z) = E_+(z)E_-(z)$, $E_{\pm}(z) = 0$ の根は $\frac{1}{\sqrt{d}}$ 半平面にあり, その次数はともに M .

1.2. Green 関数の Δ_s における表現.

$${}^t E_+(x) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ixz}}{z - \xi_{11}^+} dz, \dots, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ixz}}{z - \xi_{1m_1^+}} dz, \dots, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ixz}}{E_+(z)} dz, \dots, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ixz} z^{M-1}}{E_+(z)} dz \right),$$

$${}^t E_-(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-i\theta z}}{z - \xi_{11}} d\xi, \dots, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-i\theta z}}{z - \xi_{1m_1}} d\xi, \dots, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-i\theta z}}{E_-(z)} d\xi, \dots, \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-i\theta z} \xi^{M-1}}{E_-(z)} d\xi \right),$$

$$B_{\pm} = \begin{pmatrix} B_1(\xi_{11}^{\pm}) \cdots B_1(\xi_{1m_1}^{\pm}) & \cdots & \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_1(z)}{E_{\pm}(z)} d\xi & \cdots & \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_1(z) \xi^{M-1}}{E_{\pm}(z)} d\xi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_n(\xi_{n1}^{\pm}) \cdots B_n(\xi_{nm_1}^{\pm}) & \cdots & \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_n(z)}{E_{\pm}(z)} d\xi & \cdots & \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{B_n(z) \xi^{M-1}}{E_{\pm}(z)} d\xi \end{pmatrix},$$

$$Q_- = \left(\frac{1}{2\pi i} \oint \tilde{E}_-(z) {}^t \tilde{E}_-(z) A(z) dz \right)^{-1} \left(E_-(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint e^{-i\theta z} \tilde{E}_-(z) dz \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{i A'_z(\xi_{11})} & \frac{1}{i A'_z(\xi_{12})} & \cdots & \left(\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{E_+(z) H(z)}{E_-(z)} dz, \dots, \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{E_+(z) H(z) \xi^{M-1}}{E_-(z)} dz \right)^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{E_+(z) H(z) \xi^{M-1}}{E_-(z)} dz & \cdots & \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{E_+(z) H(z) \xi^{2M-2}}{E_-(z)} dz \end{pmatrix},$$

$$B = (B_+)^{-1} B_- Q_- = B Q_-$$

とあると,

補題 1.2. Δ_S において,

$$\begin{aligned} G_c(x, y) &= {}^t E_+(x) B E_-(y) \\ &= {}^t E_+(x) B Q_- E_-(y). \end{aligned}$$

1.3. Δ_S における Green 関数の評価について.

一般に,

$$\|G_c\|_{\infty(L^2 \times L^2, C^1)} \leq \|G_c\|_{\infty(L^2, L^2)} \leq \|G_c(x, y)\|_{x, y}$$

であるが, Δ_δ ではこれらが同等になることを見てみよう。

いま,

$$N_\pm = \begin{pmatrix} |I_m \xi_{11}^\pm|^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & |I_m \xi_{1m}^\pm|^{-\frac{1}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \dots 1 \end{pmatrix},$$

$$F_\pm(x) = N_\pm^{-1} E_\pm(x)$$

とおくと, $F_\pm(x)$ の L^2 ノルムは有界となるから,

$$\left| \int \overline{F_+}(x) G_c(x, y)^t \overline{F_-}(y) dx dy \right| \leq C \|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2 \times L^2, C^1)}$$

(左辺の $|\cdot|$ は行列のノルムを表す). また,

$$S_+ = \int_0^\infty \overline{F_+}(x)^t F_+(x) dx,$$

$$S_- = \int_0^\infty \overline{F_-}(y)^t F_-(y) dy$$

とおく。

$$\int \overline{F_+}(x) G_c(x, y)^t \overline{F_-}(y) dx dy = S_+ N_+ B N_- S_-$$

となる。ところで,

補題 1.3 Δ_δ で $S_\pm$ は正値エルミート行列で,

$$c_1 I_d < S_\pm < c_2 I_d. \quad (I_d = \text{単位行列})$$

であるから,

$$c_1 |N_+ B N_-| < \left| \int \overline{F}_+(x) G_c(x, y) \overline{F}_-(y) dy \right| < c_2 |N_+ B N_-|$$

が成り立つ。また他方, Δ_δ においては

$$\begin{aligned} \|G_c(x, y)\|_{x, y} &= \|\tau E_+(x) B E_-(y)\|_{x, y} \\ &\leq C |N_+ B N_-| \end{aligned}$$

が成り立っている。また同様に, Δ_δ において $\|(\frac{\partial}{\partial x})^k G_c(x, y)\|_{x, y} \leq C_k |N_+ B N_-|$ が成り立つから

補題 1.4 Δ_δ において,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \|(\frac{\partial}{\partial x})^k G_c(x, y)\|_{x, y} \leq C |N_+ B N_-| \leq C' \|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2, C^1)}.$$

さて, Δ_δ^* において $N_\pm$ の各要素を,

$$\operatorname{Im} \xi_{ij}^{(\pm)} \longrightarrow \frac{\gamma}{d^{1-m_i}}$$

$$\operatorname{Im} \xi_{ij}^{(\pm)} \longrightarrow d^{\frac{1}{m_i}}$$

とおき直して得られる行列を $D_\pm^*$ とすると,

命題 1 Δ_δ^* において,

$$\|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \sim |D_+^* B D_-^*|$$

i.e.

$$c_1 |D_+^* B D_-^*| \leq \|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \leq c_2 |D_+^* B D_-^*|$$

また,

$$D_- = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \overbrace{d^{-1+\frac{1}{m_1}}}^{m_1} \\ \vdots \\ d^{-1+\frac{1}{m_1}} \end{array} & \\ & \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \end{pmatrix}$$

とあけは,

命題 1' Δ_δ^* において,

$$\|G_c\|_{\infty}(L, L) \sim |D_+^* B D_-^*|.$$

したがって,

定理 I (P) が L^2 -well posed であるならば, 任意

の実数 (σ, τ_0) に対し, Δ_δ^* において, ε_2 では

$$|D_+^* B D_-^*| < \frac{C}{\delta}$$

i.e.

$$|D_+^* B D_-^*| < \frac{C}{\delta}$$

が成り立つ.

すなわち,

$$B = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} \beta_{11,11} & \dots & \beta_{11,1m_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{1m_1,11} & \dots & \beta_{1m_1,1m_1} \end{array} & \vdots \\ \vdots & \begin{array}{cc} \beta_{01,01} & \dots & \beta_{01,0m_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{0m_1,01} & \dots & \beta_{0m_1,0m_1} \end{array} \end{pmatrix},$$

$$(B_+)^{-1} = \begin{pmatrix} r_{11,1} & \cdots & r_{11,\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{1m_+^*,1} & \cdots & r_{1m_+^*,\mu} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

とかくと,

定理Iの系 (P) が L^2 -well posed であるならば, 任意の実数 (σ_0, τ_0) に対し, Δ_δ がとれて, $\frac{1}{2}$ 以下では

$$(a) \begin{cases} |\beta_{ij, \ell h}| d^{-\frac{1}{2m_\ell} + \frac{1}{2m_\ell}} < C \frac{d}{8} & \begin{pmatrix} i=1, \dots, N, & \ell=1, \dots, N \\ j=1, \dots, m_\ell^+, & h=1, \dots, m_\ell^- \end{pmatrix}, \\ |\beta_{0j, \ell h}| d^{\frac{1}{2m_\ell}} < C \frac{d}{8} & \begin{pmatrix} j=1, \dots, M, & \ell=1, \dots, N \\ h=1, \dots, m_\ell^- \end{pmatrix}, \\ |\beta_{ij, 0h}| d^{-\frac{1}{2m_\ell}} < C \frac{1}{8} & \begin{pmatrix} i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, m_\ell^+, & h=1, \dots, M \end{pmatrix}, \\ |\beta_{0j, 0h}| < C \frac{1}{8} & (j=1, \dots, M, h=1, \dots, M) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} |r_{ij, \ell}| d^{-\frac{1}{2m_\ell}} < C \frac{1}{8} & \begin{pmatrix} i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, m_\ell^+ \end{pmatrix}, \\ |r_{0j, \ell}| < C \frac{1}{8} & (j=1, \dots, M) \end{cases}$$

が成り立つ。

§2. 十分条件について,

実数 (σ, τ) が正則実数であるとは, その実数において $A=0$ の実根 $\xi = \xi_i$ が m_i 重根であるとすれば, その近傍でそれらは m_i 重根かまたは単根としてしか現れないときをいうことにしよう。 (σ, τ) が正則実数であるとき, その実数の分解 $A = \prod_{i=1}^n H_i \cdot E$ において, $m_i \geq 2$ に対応する i については, (σ, τ) を通る実解析的曲面 $S_i: \sigma = \varphi_i(\tau)$ があって, $H_i=0$ の m_i 重根は T 度 S_i 上にのっていることがわかる。

補題 2.1. 正則実数 (σ, τ) の近傍 U において, $U \cap S_i$ の任意の実数 (σ_1, τ_1) に一様な $\Delta_\delta(\sigma_2, \tau_2)$ を与えて, $\Delta_\delta^*(\sigma_1, \tau_1)$ において,

$$c_1 \frac{\delta}{\text{dis}((\tau, \tau), (\sigma_1, \tau_1))^{1-\frac{1}{m_i}}} < |\text{Im } \xi_{ij}^{(\pm)}| < c_2 \frac{\delta}{\text{dis}((\tau, \tau), (\sigma_1, \tau_1))^{1-\frac{1}{m_i}}},$$

$$c_1 \text{dis}((\tau, \tau), (\sigma_2, \tau_2))^{\frac{1}{m_i}} < |\text{Im } \xi_{ij}^{(\pm)}| < c_2 \text{dis}((\tau, \tau), (\sigma_1, \tau_1))^{\frac{1}{m_i}}$$

が成り立つ (c_1, c_2 は (σ_2, τ_2) に無関係)。

そこで, $m_i \geq 2$ のとき,

$$d_i = \text{dis}((\sigma, \tau), S_i)$$

とおけば,

系 正則実数 (σ, τ) の近傍 U ($\delta > 0$ の側) において,

$$c_1 \frac{\delta}{d_i^{1-\frac{1}{m_i}}} < |\text{Im } \xi_{ij}^{(\pm)}| < c_2 \frac{\delta}{d_i^{1-\frac{1}{m_i}}},$$

$$c_1 d_i^{\frac{1}{m_i}} < | \operatorname{Im} \xi_{ij}^{(\pm)}(\tau, z) | < c_2 d_i^{\frac{1}{m_i}}$$

$$\left(\text{ただし, } m_i = 1 \text{ なる } i \text{ については} \right. \\ \left. c_1 \gamma < | \operatorname{Im} \xi_{i1}^{(\pm)}(\tau, z) | < c_2 \gamma \right).$$

また, §1 の考察を詳しく見なおせば,

補題 2.2. 正則点の近傍 ($\gamma > 0$ の側) において,

$$\sum_{k=0}^{m-1} \| (\frac{\partial}{\partial x})^k G_c(x, y) \|_{x, y} \leq C |N_+ B N_-| \leq C' \|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)}.$$

そこで, $N_{\pm}$ において,

$$\operatorname{Im} \xi_{ij}^{(\pm)} \longrightarrow \frac{\gamma}{d_i^{1-\frac{1}{m_i}}}$$

$$\operatorname{Im} \xi_{ij}^{(\pm)} \longrightarrow d_i^{\frac{1}{m_i}}$$

とおきかえたものを $D_{\pm}^*$, また,

$$\tilde{D}_- = \begin{pmatrix} d_1^{-i+\frac{1}{m_1}} & & \\ & d_1^{-i+\frac{1}{m_1}} & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とあけは,

命題 2. 正則点の近傍 ($\gamma > 0$ の側) において,

$$\|G_c\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} \sim | \tilde{D}_+^* B \tilde{D}_-^* | \sim | \tilde{D}_+^* \circ \tilde{D}_- \tilde{D}_-^* |.$$

定理II 実真がすべて正則点であるような場合には, (P) が L^2 -well posed になるための必要十分条件は, 各実真の近傍 ($\delta > 0$) で,

$$|\tilde{D}_+^* B \tilde{D}_-^*| < \frac{C}{\delta},$$

すなわち,

$$|\tilde{D}_+^* \delta \tilde{\alpha} \tilde{\alpha} \tilde{D}_-^*| < \frac{C}{\delta}$$

が成り立つことである。

定理IIの系 実真がすべて正則点である場合には, 各実真の近傍 ($\delta > 0$) で,

$$(a) \begin{cases} |\beta_{ij, eh}| d_i^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m_i})} d_e^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m_e})} < C \\ |\beta_{0j, eh}| d_e^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m_e})} < C \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \\ |\beta_{ij, oh}| d_i^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{m_i})} < C \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \\ |\beta_{0j, oh}| < \frac{1}{\delta} \end{cases}$$

がみたされていれば, (P) は L^2 -well posed になる。