

有限 Coxeter 群の岩堀-Hecke algebra の 既約射影加群の分類

阪大理 山根宏之 (Hiroyuki Yamane)

Introduction

W を有限 Coxeter 群とする. $H(W, q)$ ($q \in \mathbb{C}$) を W の岩堀-Hecke algebra とする. 即ち $H(W, q)$ は単位元をもつ $\mathbb{C}$ -algebra で

$$H(W, q) = \bigoplus_{w \in W} \mathbb{C} T(w)$$

関係式

$$T(s)T(w) = \begin{cases} T(sw) & , \ell(sw) > \ell(w) \\ (q-1)T(w) + qT(sw) & , \ell(sw) < \ell(w) \end{cases}$$

で定義される. 従って $H(W, q)$ は W の群環 $\mathbb{C}W$ の q -analogue になる. q が 1 の中根又は 0 でないときは $\mathbb{C}$ -algebra として $H(W, q) \simeq \mathbb{C}W$ である事が分かってゐる. 又 $q=0$ のとき $H(W, q)$ は半単純であつて $H(W, q)$ の表現について良く分かってゐる.

(i) W が既約で古典型の場合は, "seminormal form" と呼ばれる Young 図型を使, た既約な行列表現が $H(W, q)$ に対して q -analogue される. (Hoeftsmitt [6])

iii) 一般の W に対しては Kazhdan-Lusztig [3] が " W -graph" という概念を Kazhdan-Lusztig 予想の中で導入し、行者 [5] が全ての W の $\mathbb{C}$ 上の既約表現はある W -graph を使って実現出来る事を示した。

ところが最近の各方面の研究で g が 1 の中根のときの $H(W, g)$ の表現が色々出現し、その表現論を調べる必要が生じてきた。その各方面とは、

- i) 可解格子模型 (三輪, 神保, 尾角 etc.)
- ii) Conformal field theory (土屋 蟹江 etc.)
- iii) 結び目理論 (Jones 河野 村土 etc.)
- iv) C^* -algebra (Wenzl, Jones etc.)

等である。

$g = p^r$ (p は素数), $G = G(\mathbb{F}_q)$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ の (non-twisted な) 有限 Chevalley 群とする。(例えば $G(\mathbb{F}_q) = SL_N(\mathbb{F}_q), SO_N(\mathbb{F}_q), Sp_N(\mathbb{F}_q)$ etc.) W を G のワイル群, $B = B(\mathbb{F}_q)$ をボレル部分群とする。 $H(W, g)$ は元々、岩堀先生によって誘導表現 $1_{\mathbb{C}B}^{\mathbb{C}G}$ に表れる既約表現を調べる為に導入された。

さらに g が 1 の中根のとき についても $H(W, g)$ の表現が最近研究されてきている。その結果、特に $g = p^r$ のとき $H(W, g)$ の ($\mathbb{C}$ 上) の表現論が $\overline{\mathbb{F}_p}W$ 及び $\overline{\mathbb{F}_p}G(\mathbb{F}_p)$ ($x \in p$ は関係ない) の表現論と似ているらしい事が分かって来た。私の結果も含めてそれら

を書き下してみる.

(i) Dipper - James [8] [9]. S_n を n 次の対称群とする

◦ $\overline{\mathbb{F}}_p S_n$ の既約表現の分類・構成 $\leftrightarrow H(S_n, \overline{\mathbb{F}}_p)$ の _____

◦ $\overline{\mathbb{F}}_p S_n$ の中山予想 $\leftrightarrow H(S_n, \overline{\mathbb{F}}_p)$ の _____

(ii) 行者 - 宇野 [4]

◦ $\overline{\mathbb{F}}_p W$ の半単純性の判定法 (マッシュケの定理) $\leftrightarrow H(W, \overline{\mathbb{F}}_p)$ の _____

$\overline{\mathbb{F}}_p G(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の " " $\leftarrow$

(iii) Y — [11]

◦ $\overline{\mathbb{F}}_p W$ の既約射影加群の分類 $\leftrightarrow H(W, \overline{\mathbb{F}}_p)$ の _____
(不足数 0 の既約指標)

$\overline{\mathbb{F}}_p G(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の " " $\leftarrow$

(iv) ニニはニニでは関係なく余談であるが Drinfeld, 神保によつて導入された量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ に対しても q が 1 の巾根のときの $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論と $U_q(\mathfrak{g})$ に対応する $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の代数群 $G(\overline{\mathbb{F}}_p)$ の表現論が似ているらしい事が分つてきている (Lusztig [12])

ニニでは(iii)について解説し その系としてただちに(ii)が出てくるのを見る.

§1. 有限群のモジュラ - 表現論 (標数正の体上の表現論)

G を有限群. $m = |G|$ とする. K を離散付値 $v: K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ を持, v なる標数 0 の付値体とする. さらに次の事を仮定する.

iii) K は V に関して完備. iv) K は 1 の m 乗根を全て含む.

$R = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$ (付値環), $(\pi) = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ (付値イデアル)

$F = R/(\pi)$ (剰余体) とおく. $\therefore \text{char}(F) = p > 0$ と仮定す

る. 二のとき次の事が知られている.

Lemma 1.1.

任意の KG -加群 V に対して次を満たす行列表現

$X: KG \rightarrow M_n(K)$ ($n = \dim V$) が存在する.

i) X と V は表現として同値

ii) $\forall g \in G$ に対して $X(g) \in M_n(R) (\subset M_n(K))$. □

Def. 1.2.

KG -加群 V に対して FG -加群 V_F を F 上の行列表現

$X(g) \bmod M_n((\pi)) (\subset M_n(R))$ ($g \in G$) で与えられるものとする. □

Def 1.3. (既約射影加群の定義)

A を単位元をもつ環とする. $A_L (A_R)$ を左(右)正則 A 加群とする. A -左(右)加群 V が左(右)既約射影加群であるとは

i) V は既約

ii) $\exists U: A$ -左(右)加群 s.t. $A_L (A_R) \simeq V \oplus U$

and Lemma
Def 1.4. (対称的な環)

- k を体. A を単位元をもつ k -algebra とする. このとき k -双線形写像 $f: A \times A \rightarrow k$ があつてしかも f が非退化で結合的かつ対称的なとき A を対称的な環と呼ぶ
- A が対称的な環であるならば (Cartan 行列が対称であるので) A -左既約射影加群であることと A -右既約射影加群であることは同値.

□

Lemma 1.5.

k を体とする. このとき A が群環 $A = kG$ 又は Hecke 環 $A = H(W, q)$ ($q \in \mathbb{C}^\times$) のとき A は対称的な環である.

証明

まず $A = kG$ のときを考える. k -linear map $\delta: kG \rightarrow k$ を $\delta(e) = 1$, $\delta(g) = 0$ ($e \neq g$) で定義する. そして $f: A \times A \rightarrow k$ を $f(g, h) = \delta(gh)$ ($g, h \in G$) で定義すればよい. $A = H(W, q)$ のときは $\delta^q: H(W, q) \rightarrow \mathbb{C}$ を $\delta^q(T(w)) = \begin{cases} 1 & (w=e) \\ 0 & (w \neq e) \end{cases}$ で定義すれば $\delta^q(T(w)T(v)) = \begin{cases} q^{l(w)} & (w=v) \\ 0 & (w \neq v) \end{cases}$ が成り立つ. 従つて同様に f を定義すればよい.

□

以後 $\text{Irr}(A)$ を既約 A -加群全体. $\text{PIrr}(A)$ を既約射影 A -加群全体とおく. V, W を A -加群とし $V \simeq W$ が同値であ

れば $V \sim W$ なければ $V \not\sim W$ である.

Theorem 1.6. (不足数 0 の既約指標)

$$\text{PIrr}(FG)$$

$$= \{ V_F \mid V \in \text{Irr}(KG) \text{ s.t. } \nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{|G|}{\dim V} \notin p\mathbb{Z} \}$$

$\Rightarrow$ $V \sim W \in \text{Irr}(KG)$, $\nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) = \nu\left(\frac{|G|}{\dim W}\right) = 0$ であるならば $V_F \sim W_F \in \text{PIrr}(FG)$. □

• $\nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) = 0$ である $V \in \text{Irr}(KG)$ の指標を "不足数 0 の既約指標" とする.

この定理の系としてつぎのマシユケの定理がただちに出てくる.

Corollary 1.7. (マシユケの定理)

$$FG \text{ が半単純} \Leftrightarrow \nu(|G|) = 0 \Leftrightarrow |G| \notin p\mathbb{Z}$$

証明

$$(\Leftarrow) \dim_F FG = |G| = \dim_K KG = \sum_{V \in \text{Irr}(KG)/\sim} (\dim V)^2 = \sum_{\substack{V \in \text{Irr}(KG)/\sim \\ \nu(|G|)=0 \text{ と Th 1.6.}}} (\dim V_F)^2$$

従, マシユケの表現論より FG の左正則加群 $(FG)_L$ は FG -加群

$$\text{として } (FG)_L \cong \bigoplus_{V \in \text{Irr}(KG)/\sim} (V_F)^{\dim V} \quad \text{従, } FG \text{ は半単純.}$$

($\Rightarrow$) Th 1.6. と 44 元環の表現論より $\nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) \neq 0$ であり
 $V \in \text{Irr}(KG)$ が存在すれば FG は半単純だが. ゆえに
 $\nu\left(\frac{|G|}{\dim V}\right) = 0$ ($\forall V \in \text{Irr}(KG)$) とく $V_0 = K, g \cdot 1 = 1$ ($\forall g \in G$)
 をと, とくると $\nu(|G|) = \nu\left(\frac{|G|}{\dim V_0}\right) = 0$ □

§ 2. 岩堀-Hecke algebra の定義 と W -graph

(W, S) を有限 Coxeter 系とする. 即ち S は有限集合で $s \neq r \in S$
 に対して $n_{sr} = n_{rs} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ が与えられていて W は,

$W = \langle s \in S \mid \overset{\text{関係式}}{s^2 = e} (s \in S) \quad (sr)^{n_{sr}} = e (s \neq r \in S) \rangle$ で定義され
 る有限群である. $w \in W$ に対して $l(w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $l(w) = \min \{m \mid$

$w = s_{i_1} \cdots s_{i_m} (s_{i_1}, \dots, s_{i_m} \in S)\}$ で定義し. これを w の "length" と
 書く.

可換環 A ($\neq 0$) と $a \in A$ に対して. A -algebra $H_A(W, a)$ を

- (i) 自由 A -加群として $H_A(W, a) = \bigoplus_{w \in W} AT(w)$
 (ii) $T(s)T(w) = \begin{cases} T(sw) & , \text{ if } l(sw) > l(w), \\ (a-1)T(w) + aT(sw) & , \text{ if } l(sw) < l(w). \end{cases}$

で定義する.

Lemma 2.1.

$H_A(W, a)$ は A -algebra として

$H_A(W, a) = \langle T(s) (s \in S) \mid \begin{array}{l} (T(s) - a)(T(s) + 1) = 0 \\ \underbrace{T(s)T(r) \cdots}_{n_{sr} \text{ 回}} = \underbrace{T(r)T(s) \cdots}_{n_{sr} \text{ 回}} \end{array} \rangle$
 で特徴づけられる. □

t を不定元とし $\mathbb{C}(t)$ を有理式体, $\mathbb{C}[t]$ を多項式環とする.

$\mathcal{H}(W) = H_{\mathbb{C}(t)}(W, t^2)$ とおく. このとき $\mathcal{H}(W)$ は semisimple かつ分解型 (分解型 である事は Th 2.3 より分かる). $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $H(W, \lambda) = H_{\mathbb{C}}(W, \lambda)$ とおく. 特に $H(W, 1) \cong \mathbb{C}W$.

== で一応 W -graph の定義が付け加えておく.

Def. 2.2 (W -graph の定義)

(W, S) は既約で W はワイル群であるとする. そして次のような三つ組 (T, I, μ) を考える.

$T = (T^0, T^1)$ はグラフ P^0 : 頂点, T^1 辺.

$I: P^0 \rightarrow \mathcal{P}(S) = \{S \text{ の subset} \}$

$\mu: (P^0 \times P^0) \setminus D \rightarrow \mathbb{Z}$ (== で $D = \{(x, x) \mid x \in T^0\}$)

さらにこの (T, I, μ) に対し, P^0 を basis とする free $\mathbb{C}[t]$ -加群を E とする. また各 $s \in S$ に対し $\tau_s \in \text{End}_{\mathbb{C}[t]}(E)$ を

$$\tau_s(x) = \begin{cases} -x & , \text{ if } s \in I(x) \\ t^2 x + t \sum_{\substack{y \in T^0 \\ s \in I(y)}} \mu(y, x) y & , \text{ if } s \notin I(x) \end{cases}$$

で定める. このとき $R_t: \mathcal{H}(W) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}[t]}(E)$, $R(T(s)) = \tau_s$ が $\mathcal{H}(W)$ の表現を定めるとき, (T, I, μ) を (W, S) の W -graph と呼ぶ. □

(== で W がワイル群でないときは W の分解体の整数環を $\mathbb{Z}$ のかわりにおく)

Theorem 2.3. (行者 [5] 1981)

$\mathcal{H}(W)$ の任意の絶対既約表現は、ある W -graph によって実現出来る。

□

W -graph についてこれは成瀬 [7] に詳しい説明がある。

次の定義は、Def 1.2 の analogy である

Def. 2.4.

$\lambda \in \mathbb{C}$, λ を fix する. $V_\lambda \in \text{In}(\mathcal{H}(W))$ に対して $H(W, \lambda)$ -加群 V_λ を行列表現 $R_t(T(s))|_{t \rightarrow \lambda}$ ($s \in S$) で与えられるものとする. (== R_t は Def 2.2 のもの)

□

§3. 岩端 - Hecke algebra と有限 Chevalley 群.

$q = p^r$ (素数中) $G = G(\mathbb{F}_q)$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の non-twisted な有限 Chevalley 群とする. $B = B(\mathbb{F}_q)$ を G の Borel 部分群 $W \subseteq G$ のワイル群とする.

(例. $G(\mathbb{F}_q) = SL_n(\mathbb{F}_q)$ のとき $B = \left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \in G \right\} = \{ \text{上三角行列} \} \cap G$
 $W = S_n$: n 次対称群)

$1_B^G (= 1_{CB}^{CG}) = \mathbb{C} G(\mathbb{F}_q) \otimes_{\mathbb{C} B} 1_B$ (誘導加群) とおく

Theorem 3.1. (岩堀 1964 [1]).

$g = p^r$ (素数 p) とする. このとき,

$$H(w, g) \cong e(\mathbb{C}G(\mathbb{F}_q))e \quad (\cong \text{Hom}_{\mathbb{C}G}(1_B^G, 1_B^G))$$

$$\overset{\vee}{T}(w) \mapsto \frac{1}{|B|} \sum_{y \in B \cap B} y = z \cdot e = \frac{1}{|B|} \sum_{x \in B} x \in \mathbb{C}G$$

($= z^n$ $G = \bigcup_{w \in W} B_w B$ は Bruhat 分割)

Proposition 3.2.

次の1対1対応がある

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Irr}(\mathbb{C}W) & \xleftarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(W)) & \xrightarrow{\sim} & \chi_{\mathrm{irr}}^{B(\mathbb{F}_q)} \\ \cup & & \cup & & \cup \\ V_1 & \longleftarrow & V_t & \longrightarrow & \chi_{V_t}^q \end{array}$$

$= z^q \chi_{V_t}^q$ は $\chi_{V_t}^q |_{e \in G_e}$ が $H(W, q)$ の $V/\sqrt{q}$ の指標となることを示す.

$$P_W(q) = \sum_{w \in W} q^{l(w)} \left(= \prod_{1 \leq i \leq |S|} \frac{q^{m_i} - 1}{q - 1} \quad m_i: \text{中指標} \right) \text{ は Poincaré 多項式}$$

とす。 則ち $P_W(1) = |W|$ 。

Lemma 3.3.

$$|G(\mathbb{F}_q)| = \frac{1}{d} (q-1)^{|S|} P_W(q)$$

$n = 2$ の d は適当な自然数. G が universal f.i. $d = 1$

Def. and Lemma 3.4. (指標の直交関係の q -analogue と generic degree)

$V_t, V'_t \in \text{Irr}(\mathcal{H}(W))$ に対して $P_t = \text{trace } R_t, P'_t = \text{trace } R'_t$

とする. (R_t, R'_t は Def. 2.2 のもの) 二のとき $q = t^2$ とおくと

$$\frac{\sum_{w \in W} P_t(T(w)) P'_t(q^{-l(w)} T(w^{-1}))}{P_W(q)} = \begin{cases} \frac{\dim V_t}{d_{V_t}(q)} & , \text{ if } V_t \sim V'_t, \\ 0 & , \text{ if } V_t \not\sim V'_t. \end{cases}$$

が成り立つ.

二で $d_{V_t}(q) \in \mathbb{C}[q]$ であ, $\dim_{V_t}(1) = \dim V_1 = \dim V_t$ が成り立つ. 二の d_{V_t} を V_t の generic degree と呼ぶ. □

Theorem 3.5. (Curtis - 岩堀 - Killmeyer [97] [2])

$V_t \in \text{Irr}(\mathcal{H}(W))$, $q = p^r$ (素数中) とする. 二のとき

$$\deg \chi_{V_t}^q = d_{V_t}(q)$$

が成り立つ □

§4. J が 1 の中根のときの $H(W, J)$ の表現について.

$V_t \in \text{Irr}(\mathcal{H}(W))$ に対して $\varphi_{V_t}^{(q)} \in \mathbb{C}[q]$ を $\varphi_{V_t}(q) = (q^{l(w_0)} P_W(q)) / d_{V_t}(q)$

で定義する. 二で $w_0 \in W$ は最長元. 二のとき Th 1.6 の

analogy として次の事が成り立つ.

Theorem 4.1. (Y— 1987 [1])

i) $\lambda \in \mathbb{C}^*$ とし $\bar{\lambda}$ を fix する. このとき

$$PI_{\bar{\lambda}}(H(W, \lambda)) = \{V_{\bar{\lambda}} \mid V_{\bar{\lambda}} \in \text{In}(\mathcal{H}(W)) \text{ s.t. } \varphi_{V_{\bar{\lambda}}}(\lambda) \neq 0\}$$

であ, λ $V_{\bar{\lambda}}, W_{\bar{\lambda}} \in \text{In}(\mathcal{H}(W)), \varphi_{V_{\bar{\lambda}}}(\lambda) \neq 0 \neq \varphi_{W_{\bar{\lambda}}}(\lambda)$ であるならば

$$\text{は } V_{\bar{\lambda}} \times W_{\bar{\lambda}} \in PI_{\bar{\lambda}}(\mathcal{H}(W))$$

□

iii) (W, S) が既約ならば

$$PI_{\bar{\lambda}}(H(W, 0)) = \{\text{ind}, \text{sign}\}$$

ここで ind, sign は $\text{ind}(T(W)) = 0$ $\text{ind}(T(W)) = (-1)^{\ell(W)}$ で定義される 1 次元表現である.

□

注: この定理の主張は、行者失生によ, て示唆されたものである. Th 1.6 の analogy として $\varphi_{V_{\bar{\lambda}}}(\lambda) \neq 0 (\lambda \neq 0)$ とする $V_{\bar{\lambda}} \in \text{In}(\mathcal{H}(W))$ に対する $\text{trace } R_{\bar{\lambda}}$ もすにおける不足数 0 の既約指標と呼ぶ事にする. これも行者失生の提案である.

この定理の系として次の Th 4.2 がただちにでてくる. 証明は Cor 1.7 と全く同じであ, て V_0 のかわりに 1 次元表現 $\text{ind}: T(W) \mapsto \mathfrak{g}^{\ell(W)}$ をつかう

Theorem 4.2. (行者-宇野 [4])

i) $\lambda \in \mathbb{C}^*$ とする $H(W, \lambda)$ が半単純 $\Leftrightarrow P_W(\lambda) \neq 0$

ii) (W, S) は既約であるとする. このとき

$H(W, 0)$ が半単純 $\Leftrightarrow W$ が A_1 型 すなわち $W = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

□

Example (A_{N-1} 型 について)

$$D_N = \{N \text{ の分割}\} = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mid \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_k = N\}$$

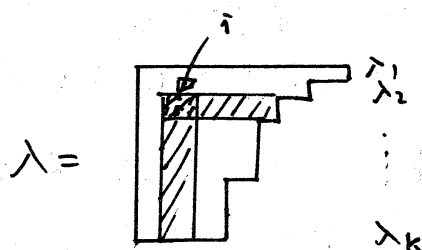
とおく このとき 1対1対応

$$D_N \xrightarrow{\sim} \text{Irr}(\mathbb{C}S_N) \quad (\xrightarrow{\sim} \text{Irr}(\mathcal{H}(S_N)))$$

$$\lambda \longmapsto V^\lambda \longmapsto \check{V}^\lambda$$

が存在するのはよく知られている. $\lambda \in D_N$ に対して Young

図形



をつくる 各 i に対して 図の斜線の部分の列の数を hook length と呼び $h_i(\lambda)$ ($1 \leq i \leq N$) で表す.

(例 $N=6$ $\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$ のとき $\{h_i(\lambda) \mid 1 \leq i \leq 5\} = \{5, 4, 2, 1, 2, 1\}$)

のとき

$$d_{V^\lambda}(\mathfrak{g}) = (q^{i_0 \lambda_1 + 1 \cdot \lambda_2 + \dots + (k-1) \cdot \lambda_k}), \quad \prod_{i=1}^n \frac{q^i - 1}{q^{h_i(\lambda)} - 1}$$

$$P_{S_N}(q) = \prod_{i=1}^n \frac{q^i - 1}{q - 1} \quad \text{で与えられる. 従って}$$

$$q_{V^\lambda}(\mathfrak{g}) = q^c \prod_{i=1}^n \frac{q^{h_i(\lambda)} - 1}{q - 1} \quad (c \text{ は適当な自然数})$$

ゆえに Th 4.1 は A_{n-1} 型については次の様に書き直せる.

Proposition 4.3.

$m \in \mathbb{Z} \geq 2$ とする. $n \neq \pm 1$

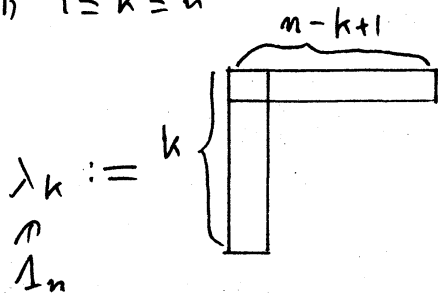
$$\text{PI}_{\text{rv}}(H(S_n, m\sqrt{1})) = \{ V^{\lambda_{2m\sqrt{1}}} \mid \lambda \in D_n, h_i(\lambda) \notin m\mathbb{Z} (1 \leq i \leq n) \}.$$

□

§5 $H(S_n, \sqrt{1})$ ($\sqrt{1} = n\sqrt{1}$ または $n-1\sqrt{1}$) について.

$H(S_n, q)$ の表現に関しては, Wenzl [10] でも論じてある. Hoefsmit [7] の場合は semisimple form の q -analogue であり, 一方 Wenzl の場合は, orthogonal form の q -analogue として q が 1 の中根でないときの $H(S_n, q)$ の既約表現を構成している. もちろん両者はほとんど同じである. 又, Wenzl は, q が 1 の中根のとき (k, l) -diagram という概念を使って $H(S_n, q)$ の既約表現を構成している. (全ての既約表現を構成しているわけではない). 以下 記号 $H_n(q) (= H(S_n, q))$, $\Lambda_n (= D_n)$, $\Lambda_n^{(k, l)} (= \{(k, l)\text{-diagrams}\} (\Lambda_n))$, π_λ , $\pi_\lambda^{(k, l)}$, $e_i (= T(s_i))$ 等は Wenzl [10] のものとする.

(i) $1 \leq k \leq n$



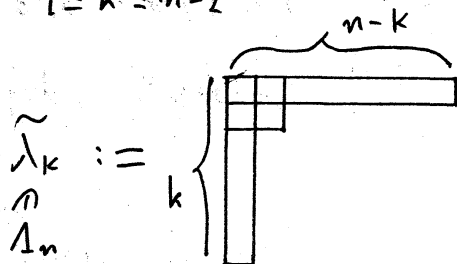
$$\rho_1 := \text{ind}$$

$$\rho_k := \pi_{\lambda_k}^{(k, n)} \quad (2 \leq k \leq n-2)$$

$$\rho_{n-1} := \text{sgn}$$

$$\Lambda_H := \{ \lambda_g \mid 2 \leq g \leq n-1 \}$$

ii) $1 \leq k \leq n-2$



$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_1 &:= \text{ind} \\ \tilde{\rho}_k &:= \pi_{\tilde{\lambda}_k}^{(k, n-1)} \quad (2 \leq k \leq n-2) \\ \tilde{\rho}_{n-2} &:= \text{sgn}\end{aligned}$$

Proposition 5.1.

i) $H_n(\sqrt{1})$ の既約表現の完全代表系は.

$\{\rho_k \mid 1 \leq k \leq n-1\}, \pi_\lambda \mid (\lambda \in \Lambda_n \setminus \Lambda_H)\}$ である. $(\pi_\lambda \sim V^{\lambda_{2n}})$

ii) $H_n(\sqrt{-1})$ の既約表現の完全代表系は.

$\{\tilde{\rho}_k \mid 1 \leq k \leq n-2\} \cup \{V^{\lambda_{2(n-1)\sqrt{-1}}} \mid \lambda \in \Lambda_n, \varphi_{V^{\lambda_{2(n-1)\sqrt{-1}}}}(\sqrt{-1}) \neq 0\}$ である.

□

Def. 5.2.

$(n_1, n_2, \dots, n_r)$ を正の整数列とする. 全行列環の直和

$\bigoplus_{k=1}^r M(2n_k + \sum_{|k-j| \leq 1} n_j, \mathbb{C})$ の subalgebra $A(n_1, \dots, n_r)$ を次で

定義する

$$A(n_1, \dots, n_r) = \left\{ \begin{array}{c} + \\ \left[\begin{array}{cccc|c} x_k & y_{k,k-1} & y_{k,k+1} & z_k & n_k \\ \hline & x_{k-1} & 0 & -y_{k-1,k} & n_{k-1} \\ \hline & & x_{k+1} & y_{k+1,k} & n_{k+1} \\ \hline 0 & & & x_k & n_k \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

同じ記号の x と y は同じ小行列.

□

$$P_k(e_{n-1}) := \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} & \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{c} V_{\lambda'_{k-1}}'' \\ V_{\lambda'_k}'' \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & 0 & \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} V_{\lambda'_{k-2}}'' \\ V_{\lambda'_{k-1}}'' \end{array} \\ \hline & & \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} V_{\lambda'_k}'' \\ V_{\lambda'_{k+1}}'' \end{array} \\ \hline 0 & & & \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} V_{\lambda'_{k-1}}'' \\ V_{\lambda'_k}'' \end{array} \end{array} \right\}$$

このとき Th 5.3 (i) の同型は.

$$\left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_n \setminus \Lambda_H} \pi_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq k \leq n-1} P_k \right)$$

で与えられる.

参考文献

[1] N. Iwahori, On the structure of the Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 10 (1964), 215-216

[2] C.W. Curtis, N. Iwahori and R. Kilmoyer, Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with BN-pairs, Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971), 81-116.

[3] D. Kazhdan and G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979), 165-184.

[4] A. Gyoja and K. Uno, On the semisimplicity of Hecke algebras

J. Math. Soc. Japan, Vol. 41, No. 1, (1989) 75-79

[5] A. Gyoja, On the existence of a W -graph for an irreducible representation of a Coxeter group, J. Algebra 86 (1984), 422-438.

[6] P. M. Hooftsmitt, Representations of Hecke algebras of finite groups with BN -pairs of classical type, Ph.D Thesis, University of British Columbia (1974)

[7] H. Naruse, Classical group の Weyl 群 と Hecke 環 の表現について 東京大学 修士論文 (1980)

[8] R. Dipper and G. D. James, Representations of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. (3) 52 (1986) 20-52

[9] R. Dipper and G. D. James, Blocks and idempotents of Hecke algebras of general linear groups, Proc. London Math. Soc. (3) 54 (1987) 57-82.

[10] H. Wenzl, Representation of Hecke algebras and subfactors Inv. Math. (1988)

[11] H. Yamane, Irreducible projective modules of the Hecke algebras of a finite Coxeter group, to appear in J. Algebra.

[12] G. Lusztig, Quantum groups at roots of 1, preprint.

最後にこの場をかりてこの研究集会の主筆者であり、著者が高知大学在学中から多大にお世話になり、この室政和先生に感謝の意を表しておきます。