

Kink of XXZ models

松井 卓
(東京都立大学)

§1. 以下では, Ferromagnetic XXZ model で,
非並進不変基底状態 について最近得られた結果を述べる。

$\mathcal{A}$ を $\mathbb{Z}^d$ 上の量子スピン系 ($S = \frac{1}{2}$) の 物理的
観測可能量 をあらわす C^* -代数 とする。

$$\mathcal{A} = \overline{\bigotimes_{\mathbb{Z}^d} M_2(\mathbb{C})}^{C^*}$$

$M_2(\mathbb{C})$ は 2×2 行列 — C^* は C^* -代数 になる
ような完備化 を表わし, 各テンソル積成分は, $\mathbb{Z}^d$ の
格子に対応する とする。

XXZ model の (形式的 体積無限大での) ハミルトニ
アン は

$$H = \sum_{\substack{j, j' \in \mathbb{Z}^d \\ |j-j'|=1}} \left(\frac{1}{2} (\sigma_x^{(j)} \sigma_x^{(j')} + \sigma_y^{(j)} \sigma_y^{(j')}) - \frac{1}{\Delta} \sigma_z^{(j)} \sigma_z^{(j')} \right)$$

ここで $\sigma_j^{(\alpha)}$ ($\alpha=x, y, z$) $j \in \mathbb{Z}^d$ は 格子点 j 上の
パウリ スピン 行列 である。

$\Delta \geq 1$ の 時 が Ferromagnetic と呼ばれる。ここでは

$\Delta > 1$ と仮定する。

$\mathcal{O}$ の 状態 φ が H の 基底状態 であるとは,

$$\varphi(Q^*[H, Q]) \geq 0 \quad (1.1)$$

が $\forall Q \in \mathcal{O}_{loc} = \{ \sigma_j^{(\alpha)} \text{ で生成される多項式} \}$

について成立することとする。

一般に 量子スピンの系 のハミルトニアンが与えられた時
全ての (上述の意味での) 基底状態を決定するのは 必ず
しも簡単でない。しかし 1次元 XXZ model の場合は
完全な答が 最近得れた。多次元の場合の研究は進行中
である。1次元 XXZ model では, スピンが 全て上
(又は下) を向いた 並進不変基底状態の他に 非並進不
変で スピンが おじまてゆく ように見える 基底状態が
ある。これを kink とよぶ。以下 kink についての
厳密な結果を解説する。

§2 1次元基底状態の分類 と Kink

(1.1) をみたす基底状態全体は, 弱位相でコンパクトな凸集合である。この端点は純粋状態なので以下で純粋基底状態のみを扱う。(§1 で述べたように $\Delta > 1$ は仮定する。) $\tau_j(\cdot)$ ($j \in \mathbb{Z}$) を格子の土のシフトとする。この時

命題 1. φ を 1次元 $\times \times \mathbb{Z}$ model の純粋基底状態とする。この時 次の成立する。

$$C_{\infty} \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(\sigma_z^{(j)}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi \circ \tau_j(\sigma_z^{(0)}) = \pm 1$$

$$C_{-\infty} \equiv \lim_{j \rightarrow -\infty} \varphi(\sigma_z^{(j)}) = \lim_{j \rightarrow -\infty} \varphi \circ \tau_j(\sigma_z^{(0)}) = \pm 1$$

$$0 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(1 - \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)}) < \infty \quad (2.1)$$

$$C_{\infty} = C_{-\infty} = 1 \quad \text{又は} \quad C_{\infty} = C_{-\infty} = -1 \quad \text{は標準的}$$

な並進不変基底状態である。(φ が基底状態で並進不変なら $\varphi = \lambda \varphi_+ + (1-\lambda) \varphi_-$ $0 < \lambda < 1$ $\varphi_{\pm}$ は

スピンの全上又は下をわいた並進不変基底状態である。))

基底状態で $C_{\infty} = 1$ $C_{-\infty} = -1$ (又は $C_{\infty} = -1$ $C_{-\infty} = 1$) となるものがあるかどうかは比較的最近まで分っていないかった。物理学者 S. R. Alcaraz - R. S. Salinas - R. S. Wreszinski, C. T. Gottstein - Werner の研究によってこのような基底状態の存在が明らかになった。例として次のような product state がある。 $k \in \mathbb{Z}$ に対し $M_2(\mathbb{C})$ の状態 $\varphi^{(k)}$ を次で定める。 ($\Delta = \frac{1}{2}(q + q^{-1})$ $0 < q < 1$ とする。)

$$\varphi^{(k)}(\sigma_x) = \frac{2q^k}{(1+q^{2k})} \quad \varphi^{(k)}(\sigma_y) = 0$$

$$\varphi^{(k)}(\sigma_z) = \frac{1}{(1+q^{2k})} (1 - q^{2k})$$

ψ_{link} を

$$\psi_{\text{link}} = \bigotimes_{k=-\infty}^{\infty} \varphi^{(k)} \quad (2.2)$$

で定める。 $\Lambda = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ に対し

$$H_{\Lambda}^{(\pm)} = \sum_{k=-n}^{n-1} \left\{ 1 - \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)} - \frac{1}{\Delta} (\sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(k+1)} + \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(k+1)}) \right\} \\ \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\Delta^2}} (\sigma_z^{(-n)} - \sigma_z^{(n)}) \quad (2.3)$$

と置く $H_{\Lambda}^{(\pm)} \geq 0$ となる。さらに

$$\psi_{\text{kinh}}(H_{\Lambda}^{(\pm)}) = 0 \quad (2.4)$$

が全ての $\Lambda = [-n, n] \cap \mathbb{Z}$ について成立する。 $H_{\Lambda}^{(\pm)}$ のスペクトルが正であることと (2.4) から ψ_{kinh} は (1.1) の意味で基底状態であり $C_{\infty} = 1$ $C_{-\infty} = -1$ である。

$$\psi_0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \psi_{\text{kinh}} = \bigotimes_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}^{(k)}$$

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma_x) = \tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma_y) = 0 \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$$

$$\tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma_z) = 1 \quad (k \geq 0) \quad \tilde{\varphi}^{(k)}(\sigma_z) = -1 \quad (k < 0)$$

とすると次が成立する。

命題 2. ψ は Ω の状態であり次をみたすとする。

$$C_{\infty} \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} \psi(\sigma_z^{(j)}) = 1$$

$$C_{-\infty} \equiv \lim_{j \rightarrow -\infty} \psi(\sigma_z^{(j)}) = -1$$

$$0 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(1 - \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(k+1)}) < \infty$$

この時 ψ は ψ_0 と ± 1 の値をとり同値つまり ψ は,

ψ_0 の GNS 表現空間内のベクトル状態である。

命題 2 より XXZ model の Kink 状態は ψ_0 の GNS 表現空間のベクトルで表わされる。(命題 2 では ψ_0 は基底状態であることを仮定しない。)

以下 ψ_0 の GNS 表現のヒルベルト空間を $\mathcal{H}$ とする。

$\Omega \in \mathcal{H}$ は $(\Omega, Q\Omega) = \psi_0(Q)$ ($Q \in \mathcal{O}$) をみたすベクトルとする。

この時 次が (ヒルベルト空間の強収束の意味で) 収束する。

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mathbb{Z}} H_{\lambda}^{(+)} = H^{(+)} \geq 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mathbb{Z}} \sum_{k \in \lambda} \sigma_z^{(k)} = S_z$$

さらに $H^{(+)}$ と S_z は可換 $[e^{itH^{(+)}} , e^{isS_z}] = 0$

($\forall t, s \in \mathbb{R}$) . S_z のスペクトルは $\text{Spec}(S_z) = \mathbb{Z}$ である。

命題 3.

単位ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ のベクトル状態 $(\xi, Q\xi) = \psi_0(Q)$ が XXZ model の基底状態とする。この時

$$H^{(+)}\xi = 0$$

命題 4. $n \in \mathbb{Z}$ とする.

$$\dim \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid H^{(1)} \psi = 0 \quad S_z \psi = n \psi \right\} \\ = 1$$

命題 3, 4 から 1次元 XXZ model の kink は完全に特長付けられたことになる。

§3 多次元 XXZ model の Kink

1次元の場合と同様のやり方で 多次元 XXZ model の非並進不変基底状態を作ることができる。 $d=2$ の場合を例にあげる。 Λ_n を原点を中心として 45° 回転した正方形とする。

$$\Lambda_n = \left\{ j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid |j_1| + |j_2| \leq n \right\} \subset \mathbb{Z}^2$$

$\mathcal{H}_{\Lambda_n}$ を Λ_n 上の自由境界条件の XXZ model のヒルベルト空間とする。

$$H_{\Lambda_n}^{(1)} = H_{\Lambda_n} + \sqrt{1 - \frac{1}{\Delta^2}} \left(- \sum_{\substack{j_1 + j_2 = 1 \\ j_1 \geq 0, j_2 \geq 0}} \sigma_z^{(j)} + \sum_{\substack{j_1 + j_2 = -1 \\ j_1 \leq 0, j_2 \leq 0}} \sigma_z^{(j)} \right)$$

すると $H_{\Lambda_m}^{(+)} \cong 0$ となる。

$$j = (j_1, j_2) \in \mathbb{Z}^2$$

に対し $S(j) = j_1 + j_2$ と置く。

$$\psi_{\text{link}} = \bigotimes_{j \in \mathbb{Z}^2} \varphi^{S(j)} \quad \left(\varphi^{(k)} \text{ は } (2,2) \text{ の } \pm \text{ で定義されている。} \right)$$

すると

$$\psi_{\text{link}} (H_{\Lambda_m}^{(+)}) = 0 \quad (\forall m \in \mathbb{N}) \quad (3.1)$$

となる。よって ψ_{link} は基底状態である。

多次元の場合，基底全体が上のようなタイプになるかどうかは今の段階（1996年2月）で不明である。

しかし (3.1) の条件をみたす基底状態全体は容易に記述できる

$$\Sigma = \left\{ \psi : \psi = \bigotimes_{j \in \mathbb{Z}^2} M_2(\mathbb{C})^{C_j} \text{ の状態 } \psi(H_{\Lambda_m}^{(+)}) = 0 \quad \forall m \right\}$$

Σ は凸コンパクト集合で端点は純粋状態である。

命題 5.

$\psi \in \Sigma$ かつ純粋状態とする。この時 ψ は積状態である。

命題5 は $d \geq 2$ 次元でも同様に成立する。積状態
で Σ に属するのは次のとおりである。

$$\mathcal{Y}_{\pm} \quad (\text{スピンが全て } \pm \text{ 又は } \mp)$$

$$\psi_{\text{kind}} \circ T_j \circ \beta_\theta \quad (j \in \mathbb{Z}^2, \theta \in \mathbb{R})$$

$$= \circ T_j \quad j \in \mathbb{Z}^2 \quad T_j \quad 2 \text{ 次元シフト}$$

$$(T_j(\sigma_\alpha^{(h)})) = \sigma_\alpha^{(j+h)} \quad j, h \in \mathbb{Z}^2 \quad \alpha = x, y, z)$$

$$\beta_\theta(Q) = e^{i\theta S_z} Q e^{-i\theta S_z}$$

$$S_z = \sum_{h \in \mathbb{Z}^2} \sigma_z^{(h)}$$

命題5の系として次がある。

$\mathcal{H}$ を $\mathcal{Y}_{\text{kind}}$ の GNS 表現空間とする。前と同じく

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\wedge n}^{(+)} = H^{(+)}$$

が resolvent 収束の意味で存在する。この $H^{(+)}$

について

$$\text{系} \quad \dim \{ \xi \in \mathcal{H} \mid H^{(+)} \xi = 0 \} = 1$$

1次元と多次元で $H^{(+)}$ のスペクトルの性質が異なることを、上の系は表わす。実はギャップについてで著しい異なりがある。次は Koma-Nachtergaele の結果である。

定理 (Koma-Nachtergaele)

(1) 1次元 ψ_{kink} の GNS 表現で、 $\delta > 0$ があり

$$\text{Spec } H^{(+)} \cap (0, \delta) = \emptyset$$

(2) 2次元 ψ_{kink} の GNS 表現で、どのような $\delta > 0$ に対しても

$$\text{Spec } H^{(+)} \cap (0, \delta) \neq \emptyset$$

§4 終りに

以上で XXZ model の kink についての最近の結果を解説してきた。Kink 自体は量子群 $SU_q(2)$ 対称性に関連して発見された。しかし上で述べた結果では

量子群自体は重要な意味は持たない。1次元の場合
 Kink の GNS 表現空間上 $SU_q(2)$ の (解析的に意味の
 ある) 表現は存在しないように見える。しかし $SU_q(2)$
 をくり込んで得られる 2次元ユークリッド空間
 の運動群 $E(2)$ の表現が定義できる。1次元で H^1
 のスペクトル分解に $E(2)$ の表現がどのように現わ
 れるかは、スペクトルの準粒子的な描象をとらえ
 るために興味深い重要な問題である。

参考文献

Alcaraz, S.R. Salinas R.S. Wreszinski W.F.

Anisotropic ferromagnetic quantum domain, *Phy Rev. Lett.*
 75 (1995)

Gottstein, C.T. Werner R. Zero-energy states of
 the ferromagnetic XXZ chain Preprint, Osnabrück

Matsui, T. On ground states of the one-dimensional
 Ferromagnetic XXZ model. to appear in *Lett. Math. Phys.*

Koma, T. Nachtergaele B. preprint

to appear in *Lett. Math. Phys.*