

非アーベル GIT 商の量子コホモロジーとフーリエ変換

厚東裕紀*

本稿は、城崎代数幾何学シンポジウム 2025 における筆者の講演の報告である。本稿の一部は Ionuț Ciocan-Fontanine との共同研究に基づく。準備中の論文に基づいているため、完成後の論文と比べて定式化が変化しうることに注意されたい。

1 概要

X を滑らかな複素射影多様体とする。 X の量子コホモロジー (quantum cohomology) とは、 X 上の有理曲線の仮想的数え上げ (種数 0 の Gromov-Witten 不変量) を用いて定義される特異コホモロジー $H^*(X)$ の変形であり、 $QH^*(X)$ と表記される。量子コホモロジー $QH^*(X)$ は自然に D 加群を定めており、その D 加群を量子 D 加群 (quantum D -module) と呼んで $QDM(X)$ と書く。

例 1.1. 複素射影直線 $\mathbb{P}^n$ の特異コホモロジーおよび (小) 量子コホモロジーは次のように記述できる。

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{P}^n) &\cong \mathbb{C}[p]/(p^{n+1}) \\ QH^*(\mathbb{P}^n) &\cong \mathbb{C}[p, Q]/(p^{n+1} - Q) \end{aligned}$$

ここで $p := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ であり、 Q は Novikov 変数と呼ばれる変形パラメータである。 $QH^*(\mathbb{P}^n)$ の積構造を量子積とよび $\star^{\mathbb{P}^n} := \star$ と書く。量子積は $Q \rightarrow 0$ の極限でカップ積を復元している。(小) 量子 D 加群は自由 $\mathbb{C}[z, Q]$ 加群

$$QDM(\mathbb{P}^n) := H^*(\mathbb{P}^n)[z, Q]$$

に量子接続と呼ばれる微分作用素 $\nabla_{zQ\partial_Q} := zQ\partial_Q + p\star -$ (およびその他の付加構造) を考えたものである。

本稿では「滑らかな準射影多様体 V の連結な複素簡約群 $\mathbb{G}$ による GIT 商」の量子コホモロジー $QH^*(V//\mathbb{G})$ を扱う。より正確には、次の仮定のもと $QH^*(V//\mathbb{G})$ を調べる。 $(\mathbb{T} \subset \mathbb{G}$ は極大トーラスである。)

仮定 1.2. ふたつの GIT 商 $V//\mathbb{G}$, $V//\mathbb{T}$ がそれぞれ射影的で滑らかな GIT 商となる $\mathbb{G}$ 線形化が存在する。

V の $\mathbb{T}$ による GIT 商 $X_{\text{ab}} := V//\mathbb{T}$ をアーベル商 (abelian quotient) と呼び、 $X := V//\mathbb{G}$ を非アーベル商 (nonabelian quotient) と呼ぶ。構成から Weyl 群 $\mathbb{W} := N(\mathbb{T})/\mathbb{T}$ はアーベル商に自然に作用する。

例 1.3. $V = \text{Hom}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^4) \cong \mathbb{C}^8$ とする。 V には $\mathbb{G} := \text{GL}_2(\mathbb{C})$ が自然に作用しており、対角行列全体のなす部分群 $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^\times)^2$ は $\mathbb{G}$ の極大トーラスである。このとき、非アーベル商はグラスマン多様体 $\text{Gr}(2, 4)$ 、対応するアーベル商は射影空間の積 $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ となる。Weyl 群 $\mathbb{W} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ はアーベル商の 2 つの成分を入れ替えるように作用している。

Brion [3] と Martin [17] の結果を用いると、 $\mathbb{W}$ は V の $\mathbb{T}$ 同変コホモロジーに自然に作用しており、アーベル商・非アーベル商のコホモロジーと次のように関係していることが分かる：

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathbb{T}}^*(V)^{\mathbb{W}} & \xrightarrow{\kappa_{\mathbb{G}}} & H^*(X) \\ \kappa_{\mathbb{T}} \downarrow & \nearrow \phi & \\ H^*(X_{\text{ab}})^{\mathbb{W}} & & \end{array} \quad (1.1)$$

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathbb{T}}^*(V)^{-\mathbb{W}} & \xrightarrow{\kappa_{\mathbb{G}} \circ \omega(\lambda)^{-1}} & H^*(X) \\ \kappa_{\mathbb{T}} \downarrow & \nearrow \psi := \phi \circ \omega^{-1} & \\ H^*(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}} & & \end{array} \quad (1.2)$$

ここで、図式 (1.1) は環の可換図式であり、図式 (1.2) は $H_{\mathbb{T}}^*(V)^{\mathbb{W}}$ 加群の可換図式であり、 $\kappa_{\mathbb{T}}$ および $\kappa_{\mathbb{G}}$ はアーベル商および非アーベル商に付随する Kirwan 写像、添え字 $-\mathbb{W}$ は反 Weyl 不変部分空間を表しており、 ϕ は全射 $\mathbb{C}$ 代数準同型、 $\omega(\lambda) \in H_{\mathbb{T}}^*(V)^{-\mathbb{W}}$ は零でない一番次数の低い反 Weyl 不変なコホモロジー類 (λ は $\mathbb{T}$ 同変パラメータ)、 $\omega := \kappa_{\mathbb{T}}(\omega(\lambda))$ である。さらに、 $\psi := \phi \circ \omega^{-1}$ は $H^*(X_{\text{ab}})^{\mathbb{W}}$ 加群の同型射になっている。図式 (1.1), (1.2) により、特に非アーベル商のコホモロジー環はアーベル商のコホモロジー環およびその上の Weyl 群作用から計算できることが分かる。

本稿の目標は次の 2 つである。

- (1) 図式 (1.1), (1.2) の量子 (コホモロジー) D 加群における類似物を予想として与える。(予想 3.1)
- (2) ベクトル束から誘導される部分旗束に対して予想 3.1 が成り立つこと (定理 4.1), またその応用として得られる部分旗束の量子コホモロジーの分解 (系 4.2) を説明する。

予想 3.1 は GIT 商の量子コホモロジーに関する予想である **アーベル・非アーベル対応** (Abelian/Nonabelian Correspondence, 予想 2.2) [2, 5, 7] と **還元予想** (Reduction Conjecture, 予想 2.4) [21, 12] の一般化を与えている。大雑把に言えば、([5] の意味での) アーベル・非アーベル対応は全射 $H^*(X_{\text{ab}})^{\mathbb{W}} \rightarrow H^*(X)$ および同型 $H^*(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}} \xrightarrow{\sim} H^*(X)$ の、還元予想はトーラスに対する Kirwan 写像 $\kappa_{\mathbb{T}}: H_{\mathbb{T}}^*(V) \rightarrow H^*(X_{\text{ab}})$ の量子 D 加群における類似物の存在を主張している。特に、後者は $\text{QDM}_{\mathbb{T}}(V)$ と $\text{QDM}(X_{\text{ab}})$ を Fourier 変換によって結びつける。予想 3.1 は非アーベル商に対して期待すべき Fourier 変換を定式化しており、さらにアーベル商・非アーベル商の Fourier 変換を介してアーベル・非アーベル対応を説明する。

注意 1.4. 部分旗多様体の量子コホモロジーは約 20 年前に調べられている [1, 2]。部分旗束の特別な場合である射影束の量子コホモロジーは入谷と筆者によって調べられている [13]。直線束の直和から誘導される部分旗束の量子コホモロジーは擬写像理論 (quasimap theory) を用いて Oh [18] によって調べられている。この手法ではベクトル束が分裂するという条件を (現時点では) 外せないの、非分裂型の部分旗束の量子コホモロジーはこれまで知られていなかった。

2 GIT 商の量子コホモロジー

本節では GIT 商の量子コホモロジーについての予想であるアーベル・非アーベル対応と還元予想を説明する。これらを導入する前に、Gromov-Witten 理論について必要最小限の解説をする。

2.1 Gromov-Witten 理論

まずはじめにトーラス作用が無い場合の Gromov-Witten 理論を説明する。その後、トーラス同変の状況における Gromov-Witten 理論を説明する。

2.1.1 非同変 Gromov-Witten 理論

X を滑らかな複素射影多様体とする。 X の Novikov 環 Λ_X を「有効曲線のホモロジー類たちが生成する $H_2(X, \mathbb{Z})$ の部分モノイド $\text{NE}_{\mathbb{N}}(X)$ に付随するモノイド環 $\mathbb{C}[Q_X]$ の次数付き完備化 $\mathbb{C}[[Q_X]]$ 」と定める。 $\beta \in \text{NE}_{\mathbb{N}}(X)$ に対応する $\mathbb{C}[[Q_X]]$ の複素ベクトル空間としての生成元を Q_X^β (Novikov 変数と呼ばれる) とし、その次数を $\int_\beta c_1(X)$ と定める。混乱が生じない場合は添え字の X を省略する。コホモロジー環 $H^*(X, \mathbb{C})$ の複素ベクトル空間としての斉次基底 $\{\phi_i\}_{i=0}^n$ を選び座標系 $\tau = (\tau^0, \dots, \tau^n)$ を定める。

X の量子コホモロジーは

$$\text{QH}^*(X) := H^*(X, \mathbb{C})[[Q, \tau]]$$

に、次で定義される $\mathbb{C}[[Q, \tau]]$ 線形な超可換積 $\star^X$ (量子積と呼ばれる) を入れたものである：任意の $\alpha, \beta, \gamma \in H^*(X)$ に対し

$$\langle \alpha \star^X \beta, \gamma \rangle^X := \sum_{d \in \text{NE}_{\mathbb{N}}(X)} \sum_{n \geq 0} \frac{Q^d}{n!} \langle \alpha, \beta, \gamma, \tau, \dots, \tau \rangle_{0, n+3, d}^X$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle^X$ は $H^*(X)$ 上の Poincaré 双線形形式 (を $\mathbb{C}[[Q, \tau]]$ 線形に拡張したもの),

$$\langle \dots \rangle_{0, n, d}^X : H^*(X)^n \rightarrow \mathbb{C}$$

は種数 0 の Gromov-Witten 不変量であり、安定写像のモジュライスタック上の交叉理論を用いて定義される。大雑把に言えば、 $\langle \dots \rangle_{0, n, d}^X$ は「 n 個の条件を課した上で X 上の次数 d の有理曲線の数え上げ」に対応する不変量である。量子積は $Q \rightarrow 0$ の極限で通常のカップ積を復元する。 $\text{QH}^*(X)$ は $\mathbb{C}[[Q, \tau]]$ 線形なので、 $\text{Spec } \mathbb{C}[[Q, \tau]] =: H^*(X, \Lambda_X)$ 上の特異コホモロジー環 $H^*(X, \mathbb{C})$ の変形族とみなすことができる。

量子 D 加群とは、自由 $\mathbb{C}[z][[Q, \tau]]$ 加群

$$\text{QDM}(X) := H^*(X)[z][[Q, \tau]]$$

に以下の量子接続を用いて D 加群構造を与えたものである^{*1}：

$$\begin{aligned} \nabla_{z^2 \partial_z} &:= z^2 \frac{\partial}{\partial z} - (E \star^X -) + z \cdot \mu \\ \nabla_{z \xi Q \partial_Q} &:= z \xi Q \frac{\partial}{\partial Q} + \xi \star^X - \quad (\xi \text{ は任意の } H^2(X) \text{ の元}) \\ \nabla_{z \partial_{\tau^i}} &:= z \frac{\partial}{\partial \tau^i} + \phi_i \star^X - \end{aligned} \tag{2.1}$$

^{*1} $\text{QDM}(X)$ は $H^*(X)$ 上のペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle^X$ を用いて定義されるペアリングを備えているが、本稿では省略する。各種の QDM 間の写像はこのペアリングを保つことが期待される。

ここで,

$$E := c_1(X) + \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{\deg \phi_i}{2}\right) \tau^i \phi_i$$

は Euler ベクトル場, $\mu \in \text{End}(H^*(X))$ は任意の p に対して $\mu|_{H^p(X)} = \frac{p - \dim_{\mathbb{C}} X}{2} \cdot \text{id}_{H^p(X)}$ を満たす線形写像, $\xi Q \frac{\partial}{\partial Q}$ は $\mathbb{C}[z][\tau]$ 線形な微分作用素

$$\xi Q \frac{\partial}{\partial Q} (Q^d) := \left(\int_d \xi \right) \cdot Q^d$$

である. すなわち, (2.1) は (超代数の枠組みにおける) $\mathbb{C}[z][Q, \tau]$ 上の自由層としての $\text{QDM}(X)$ の平坦接続を与えている. $\text{QH}^*(X)$ と $\text{QDM}(X)$ は一方から他方を復元できるので情報は等価である. 一見すると量子 D 加群は量子コホモロジーと比べて定式化が煩雑に見えるが, 結果的に量子 D 加群でみるほうが見通しが良くなることがしばしばある.

最後に, **基本解 (fundamental solution)** と **Givental 錘 (Givental cone)** を導入し, $\text{QDM}(X)$ とこれらの関係を説明する. 基本解 $M_X(\tau) \in \text{End}(H^*(X))[z^{-1}][Q, \tau]$ は次で定義される線形写像である: 任意の $\alpha, \beta \in H^*(X)$ に対し

$$\langle M_X(\tau) \alpha, \beta \rangle^X := \langle \alpha, \beta \rangle^X + \sum_{\substack{n \geq 0, d \in \text{NE}_{\mathbb{N}}(X) \\ (n, d) \neq (0, 0)}} \frac{Q^d}{n!} \left\langle \alpha, \tau, \dots, \tau, \frac{\beta}{z - \psi} \right\rangle_{0, n+2, d}^X$$

ここで, $\beta/(z - \psi)$ は $z = \infty$ で展開した形式的冪級数 $\sum_{i \geq 0} \beta \psi^i z^{-i-1}$ と解釈し, $\langle \dots \rangle_{0, n+2, d}^X$ の中に現れる ψ は子孫 Gromov-Witten 不変量を与えると解釈する. 基本解 $M_X(\tau)$ は次を満たす:

$$\begin{aligned} M_X(\tau) \circ \nabla_{z^2 \partial_z} &= \left(z^2 \frac{\partial}{\partial z} - (c_1(X) \cup -) + z \cdot \mu_X \right) \circ M_X(\tau) \\ M_X(\tau) \circ \nabla_{z \xi Q \frac{\partial}{\partial Q}} &= \left(z \xi Q \frac{\partial}{\partial Q} + \xi \cup - \right) \circ M_X(\tau) \\ M_X(\tau) \circ \nabla_{z \partial_{\tau^i}} &= z \frac{\partial}{\partial \tau^i} \circ M_X(\tau) \end{aligned} \tag{2.2}$$

実は, $M_X(\tau)$ は $\text{QDM}(X)$ から Givental 錘 $\mathcal{L}_X$ の $z J_X(\tau) := z M_X(\tau) 1$ における接空間

$$T_\tau \mathcal{L}_X := T_{z J_X(\tau)} \mathcal{L}_X \subset H^*(X)[z^\pm][Q, \tau]$$

への同型を与える. ここで, $\mathcal{L}_X$ は $\mathbb{C}[[Q]]$ 上の無限次元シンプレクティックベクトル空間 $H^*(X) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[z^\pm][Q]$ (**Givental 空間**と呼ばれる) のラグランジュ部分多様体であり, 種数 0 子孫 Gromov-Witten ポテンシャルの微分のグラフとして定義される. 詳細は [9] を参照されたい. Gromov-Witten 不変量の公理系から, 微分作用素 $z^2 \frac{\partial}{\partial z} - (c_1(X) \cup -) + z \cdot \mu_X$, $z \xi Q \frac{\partial}{\partial Q} + \xi \cup -$, $z \frac{\partial}{\partial \tau^i}$ は接空間 $T_\tau \mathcal{L}_X$ を保つことが分かる. 特に, $T_\tau \mathcal{L}_X$ は D 加群の構造をもっており, **基本解 $M_X(\tau)$ は D 加群としての同型 $\text{QDM}(X) \xrightarrow{\sim} T_\tau \mathcal{L}_X$ を与えている.**

2.1.2 トーラス同変 Gromov-Witten 理論

V を滑らかな半射影複素多様体, $\mathbb{T}$ を V に作用する代数トーラスであり, $\mathbb{T}$ 不変部分空間 $V^{\mathbb{T}}$ が射影的かつ一般の点に対する安定化群は自明であると仮定する. ここでは技術的詳細は省略して $\text{QH}_{\mathbb{T}}^*(V)$ および $\text{QDM}_{\mathbb{T}}(V)$ を導入する.

$H_{\mathbb{T}}^*(V)$ の複素ベクトル空間としての斉次基底 $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ を選び、対応する座標系を $\sigma = (\sigma^0, \sigma^1, \dots)$ と書く。 $H_{\mathbb{T}}^*(V)$ は複素ベクトル空間として加算無限次元なので、座標系は加算無限個のパラメータからなることに注意されたい。 $\mathbb{T}$ 同変量子コホモロジーとは、自由 $H_{\mathbb{T}}^*(\text{pt})[[Q, \sigma]]$ 加群

$$\text{QH}_{\mathbb{T}}^*(V) := H_{\mathbb{T}}^*(V)[[Q, \sigma]]$$

に $H_{\mathbb{T}}^*(\text{pt})[[Q, \sigma]]$ 線形な超可換積 $\star^{V, \mathbb{T}}$ を入れたものである。ここで、 $\mathbb{T}$ 同変量子積 $\star^{V, \mathbb{T}}$ は $\mathbb{T}$ 同変 Gromov-Witten 不変量を用いて非同変の場合と同様の式によって定義される。

$\mathbb{T}$ 同変量子 D 加群は、自由 $H_{\mathbb{T}}^*(\text{pt})[z][[Q, \sigma]]$ 加群

$$\text{QDM}_{\mathbb{T}}(V) := H_{\mathbb{T}}^*(V)[z][[Q, \sigma]]$$

であり、 $\mathbb{T}$ 同変量子積から定まる量子接続 $\nabla_{z^2 \partial_z}, \nabla_{z \xi Q \partial_Q}, \nabla_{z \partial_{\sigma^i}}$ を備えている。 $\mathbb{T}$ 同変量子 D 加群はこれらの微分作用素に加えて同変パラメータに関する差分作用素 (**拡張されたシフト作用素 (extended shift operator)** [19, 11, 12]) を備えている。 $(\text{NE}_{\mathbb{N}}(V) \subset) \text{NE}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{T}}(V) \subset H_2^{\mathbb{T}}(V, \mathbb{Z})$ を有効曲線のモノイド $\text{NE}_{\mathbb{N}}(V)$ の $\mathbb{T}$ 同変類似とする。(詳細は [12] を見よ。) このとき、 $\text{QDM}_{\mathbb{T}}(V)$ は $\text{NE}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{T}}(V)$ 加群の構造をもっており、 $d \in \text{NE}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{T}}(V)$ が定めるシフト作用素 $\mathcal{S}^d: \text{QDM}_{\mathbb{T}}(V) \rightarrow \text{QDM}_{\mathbb{T}}(V)$ は次を満たす：

- $[\lambda, \mathcal{S}^d] = (\lambda, d) \cdot z \mathcal{S}^d \quad (\lambda \in H_{\mathbb{T}}^2(\text{pt}))$
- $d \in \text{NE}_{\mathbb{N}}(V)$ のとき、 $\mathcal{S}^d$ は「 Q^d を掛け算する」という作用である。

注意 2.1. シフト作用素は Okounkov-Pandharipande [19] により導入されており、Seidel 表現 [20] の量子 D 加群類似とみなせる。拡張されたシフト作用素は入谷 [12] によって導入された。

最後に、基本解と Givental 錐の $\mathbb{T}$ 同変類似を説明する。 $\mathbb{T}$ 同変基本解 $M_{V, \mathbb{T}}(\sigma)$ は非同変における基本解の定義式内の Gromov-Witten 不変量を $\mathbb{T}$ 同変 Gromov-Witten 不変量に置き換えた式により定義される $\text{End}_{H_{\mathbb{T}}^*(\text{pt})}(H_{\mathbb{T}}^*(V))[[z^{-1}, Q, \sigma]]$ の元である。 $M_{V, \mathbb{T}}(\sigma)$ は (2.2) と同様の式を満たしている。 $\mathbb{T}$ 同変 Givental 錐の接空間 $T_{\sigma} \mathcal{L}_{V, \mathbb{T}}$ 上に適切なシフト作用素 $\mathcal{S}^d$ ($d \in \text{NE}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{T}}(V)$) を定めることにより、 $\mathbb{T}$ 同変基本解は微分・差分加群としての同型 $\text{QDM}_{\mathbb{T}}(V) \rightarrow T_{\sigma} \mathcal{L}_{V, \mathbb{T}}$ を与えていると見做せる。(詳細については [12] を参照されたい。)

2.2 アーベル・非アーベル対応

アーベル・非アーベル対応は複数の定式化 [2, 5, 7] が存在するが、いずれもアーベル商と非アーベル商の Gromov-Witten 理論の関係性を予想している。ここでは [5, Conjecture 3.7.1] を改良した次の予想を紹介する。(未定義の記号は後ほど説明する。)

予想 2.2 (アーベル・非アーベル対応). 写像 $\Phi: H^*(X_{\text{ab}}, \Lambda_X)^{\mathbb{W}} \rightarrow H^*(X, \Lambda_X)$ を次の式で定める：

$$\omega \cup \Phi(-) = p_{\Lambda}(\omega \star^{X_{\text{ab}}} -)$$

このとき、次の $\mathbb{C}[z][[Q_X, t^{\mathbb{W}}]]$ 加群としての可換図式が存在する：

$$\begin{array}{ccc} \text{QDM}(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}} & \xrightarrow{\Psi} & \Phi^* \text{QDM}(X) \\ M_{X_{\text{ab}}}(t^{\mathbb{W}}) \downarrow & & \downarrow M_X(\Phi(t^{\mathbb{W}})) \\ T_{t^{\mathbb{W}}} \mathcal{L}_{X_{\text{ab}}}^{-\mathbb{W}} & \xrightarrow{\psi} & T_{\Phi(t^{\mathbb{W}})} \mathcal{L}_X \end{array} \quad (2.3)$$

ここで、4つの写像はいずれも D 加群構造を保つ同型写像であり、写像 $\psi: T_{t^{\mathbb{W}}} \mathcal{L}_{X_{\text{ab}}}^{-\mathbb{W}} \rightarrow T_{\Phi(t^{\mathbb{W}})} \mathcal{L}_X$ は同型 $\psi: H^*(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}} \rightarrow H^*(X)$ から誘導される写像である。

ミラー写像 Φ の定義式に使われている $p_{\Lambda}: \Lambda_{X_{\text{ab}}} \rightarrow \Lambda_X$ は [5, (3.2.1)] で導入されている Novikov 変数の特殊化である。仮に図式 (2.3) が存在する場合、 $\Phi|_{Q_X=0} = \phi$ および $\Psi|_{z=Q_X=t^{\mathbb{W}}=0} = \psi$ であり、 Φ と Ψ はそれぞれ $\phi: H^*(X_{\text{ab}})^{\mathbb{W}} \rightarrow H^*(X)$ と $\psi: H^*(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}} \rightarrow H^*(X)$ の量子化とみなせる。特に、予想 2.2 は $\text{QH}^*(X_{\text{ab}})$ とその上の $\mathbb{W}$ 作用から $\text{QH}^*(X)$ が計算可能であることを主張している。

ここで、予想 2.2 内の未定義の記号について説明する。 $t^{\mathbb{W}}$ は $H^*(X_{\text{ab}}, \Lambda_X)^{\mathbb{W}}$ の斉次座標系^{*2}であり、 $\text{QDM}(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}}$ は自由 $\mathbb{C}[z][[Q_X, t^{\mathbb{W}}]]$ 加群

$$\text{QDM}(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}} := H^*(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}}[z][[Q_X, t^{\mathbb{W}}]]$$

であって、 $\text{QDM}(X_{\text{ab}})$ の量子接続の制限からくる接続を備えているものである^{*3}。同じことではあるが、 $\text{QDM}(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}}$ とは「 $\text{QDM}(X_{\text{ab}})$ の Novikov 変数を $\Lambda_{X_{\text{ab}}} \rightarrow \Lambda_X$ によって特殊化して、加群の底空間 $H^*(X_{\text{ab}}, \Lambda_X)$ をその $\mathbb{W}$ 不変部分空間 $H^*(X_{\text{ab}}, \Lambda_X)^{\mathbb{W}}$ に制限して、ファイバーを $H^*(X_{\text{ab}})$ からその反 $\mathbb{W}$ 不変部分空間 $H^*(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}}$ に制限して得られる D 加群」である。

部分旗多様体 (partial flag variety) は予想 2.2 を満たすことが知られている [5, Theorem 4.1.1]。

注意 2.3. [5, Conjecture 3.7.1] はアーベル・非アーベル対応を Frobenius 多様体のレベルで定式化しており、本稿の言葉を用いると特に次を主張している：持ち上げ $H^*(X) \rightarrow H^*(X_{\text{ab}})^{\mathbb{W}}$ を固定すると、その量子化 $H^*(X, \Lambda_X) \rightarrow H^*(X_{\text{ab}}, \Lambda_X)^{\mathbb{W}}$ が存在して、この写像による $\text{QDM}(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}}$ の引き戻しは $\text{QDM}(X)$ と同型である。予想 2.2 の立場から見ると、[5, Conjecture 3.7.1] では Frobenius 多様体を得るために $\text{QDM}(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}}$ の引き戻しをしているのだと理解できる。

2.3 還元予想

本節では $\mathbb{G} = \mathbb{T}$ と仮定する。還元予想は V の $\mathbb{T}$ 同変量子 D 加群とそのアーベル商の量子 D 加群を Fourier 変換を介して結びつける予想であり、GIT 商の量子コホモロジーについての Teleman の予想 [21] を量子 D 加群のレベルで考えることにより入谷 [12] によって定式化された。還元予想は $\mathbb{T}$ が 1 次元で V が射影的である場合にのみ定式化されているが、仮定 1.2 の状況に容易に拡張できる。

還元予想の主張を述べる前に記号の準備をする。 $C_{\mathbb{N}}^{\vee} \subset H_2^{\mathbb{T}}(V, \mathbb{Z})$ をアーベル商 X_{ab} に対応する $\mathbb{T}$ 豊富錐の中の GIT チャンバーの双対錐として定義されるモノイドとする。 $\text{QDM}_{\mathbb{T}}(V)^{\wedge}$ および $T_{\sigma} \mathcal{L}_{V, \mathbb{T}}^{\wedge}$ を $\mathbb{C}[z, \text{NE}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{T}}(V)][[\sigma]]$ 加群 $\text{QDM}_{\mathbb{T}}(V)$ および $T_{\sigma} \mathcal{L}_{V, \mathbb{T}}$ を適切に完備化して得られる $\mathbb{C}[z][[C_{\mathbb{N}}^{\vee}, \sigma]]$ 加群とし、 $\text{QDM}(X_{\text{ab}})^{\text{ext}}$ および $T_{\sigma} \mathcal{L}_{X_{\text{ab}}}^{\text{ext}}$ を双対 Kirwan 写像から誘導される写像 $\mathbb{C}[z][[Q_V, \sigma]] \rightarrow \mathbb{C}[z][[C_{\mathbb{N}}^{\vee}, \sigma]]$ による $\text{QDM}(X_{\text{ab}})^{\text{ext}}$ および $T_{\sigma} \mathcal{L}_{X_{\text{ab}}}^{\text{ext}}$ の基底変換として得られる $\mathbb{C}[z][[C_{\mathbb{N}}^{\vee}, \sigma]]$ 加群とする。

^{*2} $H^*(X_{\text{ab}}, \Lambda_{X_{\text{ab}}})^{\mathbb{W}}$ ではないことに注意されたい。 $\Lambda_{X_{\text{ab}}}$ を Λ_X に置き換えることは、Novikov 変数の特殊化に対応している。

^{*3} $\phi \in H^*(X_{\text{ab}})^{\mathbb{W}}$ に対し Novikov 変数を特殊化した量子積 $\phi \star^{X_{\text{ab}}} -$ は $\text{QDM}(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}}$ を保つので、この接続は well-defined である。

予想 2.4 (還元予想 [12]). 写像 $K_{\mathbb{T}}: H_{\mathbb{T}}^*(V, \Lambda_V) \rightarrow H^*(X_{\text{ab}}, \Lambda_{X_{\text{ab}}})$ と次の図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \text{QDM}_{\mathbb{T}}(V)^{\wedge} & \xrightarrow{\text{FT}_{\mathbb{T}}} & K_{\mathbb{T}}^* \text{QDM}(X_{\text{ab}})^{\text{ext}} \\ M_{V, \mathbb{T}}(\sigma) \downarrow & & \downarrow M_{X_{\text{ab}}}(K_{\mathbb{T}}(\sigma)) \\ T_{\sigma} \mathcal{L}_{V, \mathbb{T}}^{\wedge} & \xrightarrow{(\cdot)_{\mathbb{T}}^{\wedge}} & T_{K_{\mathbb{T}}(\sigma)} \mathcal{L}_{X_{\text{ab}}}^{\text{ext}} \end{array}$$

ここで, 写像 $(\cdot)_{\mathbb{T}}^{\wedge}$ は次で定義される写像である: 任意の $I \in T_{\sigma} \mathcal{L}_{V, \mathbb{T}}^{\wedge}$ に対し

$$\hat{I}_{\mathbb{T}} := \sum_{d \in C_{\mathbb{N}}^{\vee}} \kappa_{\mathbb{T}}(S^{-d} I) q^d \quad (2.4)$$

と定める. ($d \in C_{\mathbb{N}}^{\vee}$ に対し $q^d \in \mathbb{C}[C_{\mathbb{N}}^{\vee}]$ は $d \in C_{\mathbb{N}}^{\vee}$ に対応する元である.)

写像 $(\cdot)_{\mathbb{T}}^{\wedge}$ が Givental 錐の間の well-defined な写像を与えるかは非自明であるが, 仮に存在すれば, Fourier 変換 $\text{FT}_{\mathbb{T}}$ は基本解と $(\cdot)_{\mathbb{T}}^{\wedge}$ を用いて記述できるので, $\text{FT}_{\mathbb{T}}$ も存在することが分かる. 暫定的に所望の写像 $(\cdot)_{\mathbb{T}}^{\wedge}$ が存在すると仮定する. 定義 (2.4) から, 任意の $d \in \text{NE}_{\mathbb{N}}^{\mathbb{T}}(V)$, $\lambda \in H_{\mathbb{T}}^2(\text{pt}, \mathbb{Z})$ に対して次を満たすことが分かる:

$$\begin{aligned} (S^d I)_{\mathbb{T}}^{\wedge} &= q^d \hat{I}_{\mathbb{T}} \\ (\lambda I)_{\mathbb{T}}^{\wedge} &= (z \lambda q \partial_q + \kappa_{\mathbb{T}}(\lambda)) \hat{I}_{\mathbb{T}} \end{aligned}$$

ここで $\lambda q \partial_q$ は q^d を $(\lambda, d) q^d$ に送る微分作用素である. 換言すると, $\text{FT}_{\mathbb{T}}$ および $(\cdot)_{\mathbb{T}}^{\wedge}$ は次の同型

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[z, z q \partial_q][[q]] &:= \mathbb{C}[z, \langle z \lambda q \partial_q : \lambda \in H_{\mathbb{T}}^2(\text{pt}, \mathbb{Z}) \rangle][[q^d : d \in C_{\mathbb{N}}^{\vee}]] \\ &\cong H_{\mathbb{T}}^*(\text{pt})[z][[S^d : d \in C_{\mathbb{N}}^{\vee}]], \quad q^d \mapsto S^d, \quad z \lambda q \partial_q \mapsto \lambda \end{aligned}$$

を介して, $\mathbb{C}[z, z q \partial_q][[q]]$ 加群の準同型でもあることが分かる. $\text{FT}_{\mathbb{T}}$ が Fourier 変換と言及される理由は「変数 (q^d, λ) と作用素 $(S^d, \nabla_{z \lambda q \partial_q})$ を入れ替える」という性質をもっているからである.

3 非アーベル還元予想と新しいアーベル・非アーベル対応

本節では, $X = V//G$ の量子コホモロジーについての新しい予想を説明する. この予想はアーベル・非アーベル対応と還元予想をどちらも含む形で拡張しており, 現在準備中の論文 [15] にて導入される予定である.

予想 3.1 ([15]). 次の図式

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathbb{T}}^*(V, \Lambda_V)^{\mathbb{W}} & \xrightarrow{K_G} & H^*(X, \Lambda_X) \\ K_{\mathbb{T}} \downarrow & \nearrow \Phi & \\ H^*(X_{\text{ab}}, \Lambda_X)^{\mathbb{W}} & & \end{array} \quad (3.1)$$

が存在して、次の $\mathbb{C}[z][[Q_X, \sigma]]$ 加群としての図式が存在する：

$$\begin{array}{ccc}
 \text{QDM}_{\mathbb{T}}(V)^{-\mathbb{W}, \wedge} & \xrightarrow{\text{FT}_{\mathbb{G}}} & K_{\mathbb{G}}^* \text{QDM}(X)^{\text{ext}} \\
 \downarrow \text{FT}_{\mathbb{T}} & \nearrow \Psi & \downarrow M_X(K_{\mathbb{G}}(\sigma)) \\
 M_{V, \mathbb{T}}(\sigma) \left(K_{\mathbb{T}}^* \text{QDM}(X_{\text{ab}})^{-\mathbb{W}, \text{ext}} \right) & & \\
 \downarrow M_{X_{\text{ab}}}(K_{\mathbb{T}}(\sigma)) & \xrightarrow{(\cdot)_{\mathbb{G}}^{\wedge}} & T_{K_{\mathbb{G}}(\sigma)} \mathcal{L}_X^{\text{ext}} \\
 T_{\sigma} \mathcal{L}_{V, \mathbb{T}}^{-\mathbb{W}, \wedge} & \xrightarrow{(\cdot)_{\mathbb{G}}^{\wedge}} & T_{K_{\mathbb{G}}(\sigma)} \mathcal{L}_X^{\text{ext}} \\
 \downarrow (\cdot)_{\mathbb{T}}^{\wedge} & \nearrow \psi & \\
 T_{K_{\mathbb{T}}(\sigma)} \mathcal{L}_{X_{\text{ab}}}^{-\mathbb{W}, \text{ext}} & &
 \end{array} \tag{3.2}$$

ここで ψ は予想 2.2 で、 $(\cdot)_{\mathbb{T}}^{\wedge}$ は予想 2.4 で導入された写像であり、 $(\cdot)_{\mathbb{G}}^{\wedge}$ はそれらの合成として定義される写像である。

図式 (3.1), (3.2) はそれぞれ特異コホモロジーにおける図式 (1.1), (1.2) の量子化と思える。図式 (3.2) は量子 D 加群からなる「上の段」と Givental 錐からなる「下の段」があり、これらは基本解 $M_{V, \mathbb{T}}, M_X, M_{X_{\text{ab}}}$ により関係している。基本解は D 加群としての同型であるので、上の段と下の段は等価である。量子 D 加群に対する Fourier 変換を具体的に書き下すことは困難であるが、下の段では Fourier 変換が非常に簡単な式で記述されていることに注意されたい。

注意 3.2. 近年の研究で特に関係するものを紹介する。

- (1) 2023 年, Gonzalez-Mak-Pomerleano [10] は (シンプレクティック幾何の文脈で) Fano 多様体に対する非アーベル群に付随するシフト作用素を構成している。2025 年, Chan-Chin-Lam [4] はクーロン枝と同変量子コホモロジーの関係を調べる中で、非アーベルシフト作用素を構成している。本稿では極大トーラス $\mathbb{T}$ に付随するシフト作用素を用いて予想 3.1 を定式化した。予想 3.1 と非アーベルシフト作用素の関係を調べることは興味深いであろう。
- (2) 城崎代数幾何学シンポジウムのあとに投稿された Zhang-Zhou による論文 [22] では、 V が複素ベクトル空間である場合の GIT 商 $V//\mathbb{G}$ の擬写像量子コホモロジー (quasimap quantum cohomology) を調べている。特に、GIT 商の擬写像量子コホモロジーを V の $\mathbb{G}$ 同変擬写像量子コホモロジーを用いた具体的記述を与えている。

4 具体例と応用

B を滑らかな複素射影多様体、 W を B 上のベクトル束とする。本節では $W \rightarrow B$ から誘導される部分旗束 $\text{Fl}(r_{\bullet}; W) := \text{Fl}(r_1, r_2, \dots, r_m; W) \rightarrow B$ に対し予想 3.1 が成り立つこと、またその応用として $\text{Fl}(r_{\bullet}; W)$ の量子コホモロジーの分解定理を説明する。

B は任意の滑らかな複素射影多様体であり、 $1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_m < \text{rank}(W)$ は増加整数列とする。 V

と $\mathbb{G}$ を次のように定める：

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m-1} \text{Hom}(\mathcal{O}_B^{\oplus r_i}, \mathcal{O}_B^{\oplus r_{i+1}}) \oplus \text{Hom}(\mathcal{O}_B^{\oplus r_m}, W)$$

$$\mathbb{G} = \prod_{i=1}^m \text{GL}_{r_i}(\mathbb{C})$$

ここで $\mathcal{O}_B^{\oplus r}$ は B 上の階数 r の自由ベクトル束である． $\mathbb{G}$ の V への作用を適切に定めると，非アーベル商 $V//\mathbb{G}$ は B 上の部分旗束 $\text{Fl}(r_\bullet; W)$ に，アーベル商 $V//\mathbb{T}$ は B 上のトーリック束になる． W を適当な直線束で捻っても部分旗束は変化しないので， W を適切な反豊富直線束で捻ったものに取り換えて， W の双対が大域的に生成されると仮定する．このとき， V と $\mathbb{G}$ が仮定 1.2 を満たすことは簡単に確認できる．

次の定理は現在準備中の論文 [15] で証明する予定である．

定理 4.1. 上記の V および $\mathbb{G}$ に対して予想 3.1 は成立する．

アーベル商 $V//\mathbb{T}$ についての還元予想は， $V//\mathbb{T}$ に対するある種のミラー定理^{*4}を示すことに帰着されるが，トーリック束に対するミラー定理はすでに示されている [14]．非アーベル商 $V//\mathbb{G}$ についての還元予想も同様に $V//\mathbb{G}$ のある種のミラー定理を示すことに帰着される．部分旗束に対するミラー定理は Ciocan-Fontanine 氏と準備中の論文 [6] で示される予定である．これらの結果から，定理 4.1 が従うことが導かれる．

定理 4.1 の系として量子 D 加群および量子コホモロジーが分解されることが分かる．

系 4.2 ([14])．写像 $\tau: H^*(\text{Fl}(r_\bullet, W), \Lambda_{\text{Fl}(r_\bullet, W)}) \rightarrow H^*(B, \Lambda_B)^{\oplus N}$ が存在して，次の同型が成り立つ．

$$\text{QDM}(\text{Fl}(r_\bullet, W)) \cong \tau^* \text{QDM}(B)^{\oplus N}$$

$$\text{QH}^*(\text{Fl}(r_\bullet, W)) \cong \tau^* \text{QH}^*(B)^{\oplus N}$$

ここで N は $\text{Fl}(r_\bullet, W) \rightarrow B$ のファイバーである部分旗多様体のコホモロジーの複素ベクトル空間としての階数である．

この分解は部分旗多様体に対するミラー対称性に着想を得て構成される．証明のアイデアは射影束の量子コホモロジーの分解の構成 [13] と同様であり，その一般化を与えている．

参考文献

- [1] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine and B. Kim, Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa, *Duke Math. J.* **126** (2005), no. 1, 101–136
- [2] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine and B. Kim, Gromov-Witten invariants for abelian and nonabelian quotients, *J. Algebraic Geom.* **17** (2008), no. 2, 275–294
- [3] M. Brion, Equivariant cohomology and equivariant intersection theory, in *Representation theories and algebraic geometry (Montreal, PQ, 1997)*, 1–37, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 514, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht

^{*4} X のミラー定理とは X の Givental 錐上の点を表す公式を指す．この名称は Givental [8], Lian-Liu-Yau [16] がミラー対称性を用いて射影空間やその完全交叉の J 関数を記述したことに起因するが，必ずしもミラー対称性の文脈で説明できるとは限らないことに注意されたい．

- [4] Ki Fung Chan, Kwokwai Chan, Chin Hang Eddie Lam, Quantum cohomology, shift operators, and Coulomb branches, arXiv:2505.23340 [math.AG]
- [5] I. Ciocan-Fontanine, B. Kim and C. Sabbah, The abelian/nonabelian correspondence and Frobenius manifolds, *Invent. Math.* **171** (2008), no. 2, 301–343
- [6] I. Ciocan-Fontanine and Y. Koto, A mirror theorem for partial flag bundles, in preparation.
- [7] T. Coates, W. Lutz and Q. Shafi, The abelian/nonabelian correspondence and Gromov-Witten invariants of blow-ups, *Forum Math. Sigma* **10** (2022), Paper No. e67, 33 pp.
- [8] A. B. Givental, Equivariant Gromov-Witten invariants, *Internat. Math. Res. Notices* **1996**, no. 13, 613–663
- [9] A. B. Givental, Symplectic geometry of Frobenius structures, in *Frobenius manifolds*, 91–112, *Aspects Math.*, E36, Friedr. Vieweg, Wiesbaden.
- [10] E. A. Gonzalez, C. Y. Mak and D. M. Pomerleano, Affine nil-Hecke algebras and quantum cohomology, *Adv. Math.* **415** (2023), Paper No. 108867, 47 pp.
- [11] H. Iritani, Shift operators and toric mirror theorem, *Geom. Topol.* **21** (2017), no. 1, 315–343
- [12] H. Iritani, Quantum cohomology of blowups, arXiv:2307.13555 [math.AG]
- [13] H. Iritani and Y. Koto, Quantum cohomology of projective bundles, arXiv:2307.03696 [math.AG]
- [14] Y. Koto, A mirror theorem for non-split toric bundles, *Math. Ann.* (2025)
- [15] Y. Koto, Quantum cohomology of nonabelian GIT quotients and Fourier transforms, in preparation.
- [16] B. H. Lian, K. Liu and S.-T. Yau, Mirror principle. I, *Asian J. Math.* **1** (1997), no. 4, 729–763
- [17] S. Martin, Symplectic quotients by a nonabelian group and by its maximal torus, arXiv:0001002 [math.SG]
- [18] J. Oh, Quasimaps to GIT fibre bundles and applications, *Forum Math. Sigma* **9** (2021), Paper No. e56, 39 pp.
- [19] A. Okounkov and R. V. Pandharipande, The quantum differential equation of the Hilbert scheme of points in the plane, *Transform. Groups* **15** (2010), no. 4, 965–982
- [20] P. Seidel, π_1 of symplectic automorphism groups and invertibles in quantum homology rings, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 6, 1046–1095
- [21] C. Teleman, Gauge theory and mirror symmetry, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II*, 1309–1332, Kyung Moon Sa, Seoul.
- [22] Y. Zhang, Z. Zhou, Cluster algebra and quasimap quantum cohomology, arXiv:2511.09875 [math.AG]