

第二種積分方程式に対する Sinc 法とその理論解析 Sinc methods for integral equations of the second kind and their theoretical analysis

岡山 友昭*, 松尾 宇泰, 杉原 正顯

Tomoaki Okayama, Takayasu Matsuo, Masaaki Sugihara

東京大学大学院情報理工学系研究科

Graduate School of Information Science and Technology, The University of Tokyo

1 はじめに

本論文では, 第二種 Fredholm 積分方程式と呼ばれる

$$u(t) = g(t) + \int_a^b k(t, s)u(s) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (1.1)$$

の形の方程式と, 第二種 Volterra 積分方程式と呼ばれる

$$u(t) = g(t) + \int_a^t k(t, s)u(s) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (1.2)$$

という形の方程式を取り扱う. ここで $g(t)$ と $k(t, s)$ はなめらかな既知関数で, $u(t)$ が求めるべき未知関数である. これらの方程式は物理・化学・生物の分野でしばしば現れるが, 解析的に解 u を求めることは一般的に難しく, 数値計算によって近似解を求める方法が数多く研究されている. これらの応用や計算法などについては, いくつかの成書にまとめられている [1-3, 5, 6].

近年, これらの方程式に対し, Sinc 法に基づく数値解法 (Sinc スキーム) が提案されてきた [9, 16-18]. Sinc 法は, 「Sinc 関数近似」と呼ばれる近似法より導出される一連の近似法の総称であり, 適切な変数変換と組み合わせることで高い性能を持つことが知られている. 例えば, サンプリング数 N に対する典型的な収束次数は, 一重指数関数型の変換 (SE 変換) を用いる Sinc 法では $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ [19, 20], また二重指数関数型変換 (DE 変換) と組み合わせる Sinc 法では $O(\exp(-c_2N/\log N))$ [7, 21] である. いずれも収束次数は指数オーダーであり, $O(N^{-p})$ のような多項式オーダーの収束に比べて非常に収束が速い. 実際, 方程式 (1.1) や (1.2) に対して提案された上述の Sinc スキームにおいても, 数値実験により $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ の収束性が観察されており, その有効性が主張されている [9, 16-18].

* Tomoaki_Okayama@mist.i.u-tokyo.ac.jp

ただし、これらの既存の Sinc スキームには、以下で述べるような二つの難点があった。一つ目は、スキームが方程式の解 u に依存して設計されていることである。Sinc スキームでは、チューニングのためのパラメータを定める必要があるが、これは未知関数である解 u に依るパラメータであるため、その値をどのように求めればよいのかという問題がある。二つ目の難点は、仮にそのパラメータが既知であるとしても、 $N \rightarrow \infty$ においてスキームが可解である保証や、近似解が収束する保証が、理論的に与えられていないことである。先行研究では、一定の誤差解析を与えているものもあるが、スキームの可解性は暗黙に仮定されており、さらに誤差の評価式の中に、 N に対する挙動が未評価の項が残されていた。そのため、Sinc スキームの可解性や収束性は、実際にスキームを実行してみるまでは不明であり、またスキームを実行したとしても、有限の N までしか確かめることができない。先行研究における $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ といった収束次数の主張も、あくまで数値実験の観察に基づくものであった。

最近、我々はこれらの問題に対し理論解析により成果を挙げており、Sinc スキームの難点の克服に成功している [10–14]。難点の一つ目に対しては、既知関数 $g(t)$ と $k(t, s)$ を調べることでチューニングパラメータが求まることを示し、また難点の二つ目に対しては、 $N \rightarrow \infty$ での挙動を解析し、スキームが一意可解となること、かつ収束次数が $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ となることを厳密に示した。上述した各研究の一覧を表 1 にまとめておく。

本論文では、これらの成果について概説する。構成は次の通りである。まず第 2 章で、Sinc スキームの基盤となる近似法とその誤差解析についてまとめる。第 3 章と第 4 章は Fredholm 積分方程式 (1.1) に関する章で、第 3 章では Sinc-Nyström 法による離散化、第 4 章では Sinc 選点法による離散化を用いた研究について述べる。第 5 章と第 6 章は Volterra 積分方程式 (1.2) に関する章で、第 5 章では Sinc-Nyström 法による離散化、第 6 章では Sinc 選点法による離散化を用いた研究について述べる。表 1 に該当する章を示しておく。第 3 章から第 6 章までの内容は、離散化手法や変数変換などの違いはあるものの、抱えていた問題とその解決の流れはおおよそ各章で共通している。そのため第 3 章では、既存研究との比較や具体的な適用例などを含めて詳しく述べ、その共通した流れをつかむことができるように配慮し、第 4 章以降はなるべく簡略化して記述する。最後に第 7 章で本論文のまとめを述べる。

表 1 第二種積分方程式に対する Sinc スキームの提案と、その難点を克服する理論解析の研究の一覧。

方程式	離散化手法	変数変換	スキーム提案・数値的検証	理論解析	該当章
Fredholm 積分方程式	Sinc-Nyström 法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [17]	岡山ら [12]	第 3 章
		DE 変換	Muhammad et al. [9]	岡山ら [12]	
	Sinc 選点法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [16]	岡山ら [10, 14]	第 4 章
		DE 変換	岡山ら [10, 14]	岡山ら [10, 14]	
Volterra 積分方程式	Sinc-Nyström 法	SE 変換	Muhammad et al. [9]	岡山ら [13]	第 5 章
		DE 変換	Muhammad et al. [9]	岡山ら [13]	
	Sinc 選点法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [18]	岡山ら [10, 11]	第 6 章
		DE 変換	岡山ら [10, 11]	岡山ら [10, 11]	

2 Sinc スキームの基礎となる近似公式とその誤差解析

2.1 Sinc 関数近似より導出される近似公式

Sinc 法の基盤となる Sinc 関数近似は、いわゆる「Sinc 関数」と呼ばれる

$$S(j, h)(x) = \frac{\sin \pi(x/h - j)}{\pi(x/h - j)} \quad (2.1)$$

を基底関数として、実軸上で定義された関数 F を

$$F(x) \approx \sum_{j=-N}^N F(jh) S(j, h)(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

のように近似する方法である。また、後の定理で述べられるように、刻み幅 h は N に対して適切に定める必要がある。この Sinc 関数近似 (2.2) の両辺を実軸上で積分することで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \approx \sum_{j=-N}^N F(jh) \int_{-\infty}^{\infty} S(j, h)(x) dx = h \sum_{j=-N}^N F(jh) \quad (2.3)$$

と定積分の近似公式が導ける。また同様にして、不定積分の近似公式も

$$\int_{-\infty}^x F(\sigma) d\sigma \approx \sum_{j=-N}^N F(jh) \int_{-\infty}^x S(j, h)(\sigma) d\sigma = \sum_{j=-N}^N F(jh) J(j, h)(x) \quad (2.4)$$

と導かれる。ただし関数 $J(j, h)(x)$ は、正弦関数 $\text{Si}(x) = \int_0^x \{\sin(\sigma)/\sigma\} d\sigma$ を用いて次のように定義される：

$$J(j, h)(x) = h \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\pi(x/h - j)] \right\}. \quad (2.5)$$

以上は無限区間 $x \in \mathbb{R}$ における近似であったが、これらを方程式 (1.1) や (1.2) のような有限区間 $t \in (a, b)$ において適用するために、通常は変数変換が用いられる。最もよく用いられるのは、

$$t = \psi^{\text{SE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{b+a}{2}, \quad (2.6)$$

$$x = \{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t) = \log\left(\frac{t-a}{b-t}\right) \quad (2.7)$$

で定義される SE 変換である。SE 変換と Sinc 関数近似 (2.2) を組み合わせると、区間 (a, b) 上で定義された関数 f を

$$f(t) \approx \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{SE}}(jh)) S(j, h)(\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)), \quad t \in (a, b) \quad (2.8)$$

と近似することができる。本論文ではこれを SE-Sinc 近似と呼ぶ。また、定積分に対しても、

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi^{\text{SE}}(x)) \{\psi^{\text{SE}}\}'(x) dx \approx h \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{SE}}(jh)) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (2.9)$$

のように近似でき、これを本論文では SE-Sinc 積分と呼ぶ。同様に不定積分に対しても、

$$\begin{aligned} \int_a^t f(s) ds &= \int_{-\infty}^{\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)} f(\psi^{\text{SE}}(\sigma)) \{\psi^{\text{SE}}\}'(\sigma) d\sigma \\ &\approx \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{SE}}(jh)) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

のように近似でき、これを本論文では SE-Sinc 不定積分と呼ぶ。

また近年では、収束を速めるために、上で用いていた SE 変換に代えて、DE 変換と呼ばれる

$$t = \psi^{\text{DE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x)\right) + \frac{b+a}{2}, \quad (2.11)$$

$$x = \{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t) = \log \left[\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{t-a}{b-t} \right) + \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{t-a}{b-t} \right) \right\}^2} \right] \quad (2.12)$$

という変換を用いる研究が進められている。DE 変換の場合は、次のような近似公式が得られる：

$$\text{DE-Sinc 近似:} \quad f(t) \approx \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)), \quad (2.13)$$

$$\text{DE-Sinc 積分:} \quad \int_a^b f(t) dt \approx h \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{DE}}(jh)) \{\psi^{\text{DE}}\}'(jh), \quad (2.14)$$

$$\text{DE-Sinc 不定積分:} \quad \int_a^t f(s) ds \approx \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{DE}}(jh)) \{\psi^{\text{DE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)). \quad (2.15)$$

ただし、SE-Sinc 近似 (2.8) と DE-Sinc 近似 (2.13) には、右辺が $t \rightarrow a$ や $t \rightarrow b$ で 0 となるため、被近似関数 f が $f(a) = f(b) = 0$ を満たさない場合は、そもそも高精度な近似は望めないという欠点がある。そのため、関数 f から一次関数を差し引いて、端点で 0 となる関数 $\mathcal{T}f$ を

$$\mathcal{T}[f](t) = f(t) - \{f(a)w_a(t) + f(b)w_b(t)\}, \quad (2.16)$$

$$w_a(t) = \frac{b-t}{b-a}, \quad w_b(t) = \frac{t-a}{b-a} \quad (2.17)$$

のように構成し、この関数 $\mathcal{T}f$ に対して SE-Sinc 近似や DE-Sinc 近似を適用することが考えられる。これらを、元の関数 f に対する近似として具体的にかければ、

$$f(t) \approx \mathcal{P}_N^{\text{SE}}[f](t) := f(a)w_a(t) + \sum_{j=-N}^N \mathcal{T}[f](\psi^{\text{SE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + f(b)w_b(t), \quad (2.18)$$

$$f(t) \approx \mathcal{P}_N^{\text{DE}}[f](t) := f(a)w_a(t) + \sum_{j=-N}^N \mathcal{T}[f](\psi^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) + f(b)w_b(t) \quad (2.19)$$

と表せる。本論文では前者を一般化 SE-Sinc 近似、後者を一般化 DE-Sinc 近似と呼ぶ。

2.2 Sinc 法に即した関数空間

無限区間における近似公式 (2.2)–(2.4) が高精度であるためには，帯状領域

$$\mathcal{D}_d = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \zeta| < d\} \quad (2.20)$$

における関数 F の正則性や有界性等が重要となる（ただし d は正の定数）．有限区間における近似では，SE 変換や DE 変換を用いているため，これらの条件はそれぞれの変数変換で $\mathcal{D}_d$ が写された

$$\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(\frac{z-a}{b-z} \right) \right| < d \right\}, \quad (2.21)$$

$$\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left[\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{z-a}{b-z} \right) + \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{z-a}{b-z} \right) \right\}^2} \right] \right| < d \right\} \quad (2.22)$$

といった領域で関数 f に課せられることになる．この領域 $\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ や $\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ を一般に $\mathcal{D}$ とし，次の三つの関数空間を導入する．

定義 2.1 複素平面上（もしくは，Riemann 面上）の有界な単連結領域 $\mathcal{D}$ 上で正則で，かつ次で定めるノルムが有界であるような関数 f 全体を $\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D})$ と定義する：

$$\|f\|_{\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D})} = \sup_{z \in \mathcal{D}} |f(z)|. \quad (2.23)$$

定義 2.2 $\mathcal{D}$ は $(a, b) \subset \mathcal{D}$ をみたす複素平面上（もしくは，Riemann 面上）の有界な単連結領域とし，また α は正の実数とする．このとき， $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D})$ であって，かつある定数 C が存在して，

$$|f(z)| \leq C|Q(z)|^\alpha \quad (2.24)$$

が任意の $z \in \mathcal{D}$ に対し成り立つような関数 f 全体を $\mathbf{L}_\alpha(\mathcal{D})$ と定義する．ただし関数 $Q(z)$ は $Q(z) = (z-a)(b-z)$ で定める．

定義 2.3 $\mathcal{D}$ は定義 2.2 と同じ条件をみたすとし，また α は $0 < \alpha \leq 1$ をみたす実数とする．このとき， $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}})$ であって，かつある定数 C が存在して，

$$|f(z) - f(a)| \leq C|z-a|^\alpha, \quad (2.25)$$

$$|f(b) - f(z)| \leq C|b-z|^\alpha \quad (2.26)$$

が任意の $z \in \mathcal{D}$ に対し成り立つような関数 f 全体を $\mathbf{M}_\alpha(\mathcal{D})$ と定義する．

次の命題が成り立つことを注意しておく．

命題 2.4 関数 f が $\mathbf{M}_\alpha(\mathcal{D})$ に属するとき，式 (2.16) で定められる $\mathcal{T}f$ は $\mathbf{L}_\alpha(\mathcal{D})$ に属する．

2.3 Sinc 法の誤差解析

SE-Sinc 近似 (2.8) と DE-Sinc 近似 (2.13) の誤差解析は、次のように与えられている。

定理 2.5 (Stenger [19, Theorem 4.2.5]) d は $0 < d < \pi$ をみたす実数とし, $f \in \mathbf{L}_\alpha(\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, 自然数 N に対して刻み幅 h を

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha N}} \quad (2.27)$$

と定めると, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\max_{a \leq t \leq b} \left| f(t) - \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{SE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq C \sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \alpha N}}. \quad (2.28)$$

定理 2.6 (Tanaka et al. [22, Theorem 3.1]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす実数とし, $f \in \mathbf{L}_\alpha(\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, $N > \alpha/(2d)$ をみたす自然数 N に対して刻み幅 h を

$$h = \frac{\log(2dN/\alpha)}{N} \quad (2.29)$$

と定めると, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\max_{a \leq t \leq b} \left| f(t) - \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq C \exp \left\{ \frac{-\pi d N}{\log(2dN/\alpha)} \right\}. \quad (2.30)$$

また命題 2.4 より, 一般化 SE-Sinc 近似 (2.18) と一般化 DE-Sinc 近似 (2.19) に対しては, 次の収束定理が成り立つ。

定理 2.7 (岡山ら [10]) d は $0 < d < \pi$ をみたす実数とし, $f \in \mathbf{M}_\alpha(\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, 自然数 N に対して刻み幅 h を式 (2.27) で定めると, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - \mathcal{P}_N^{\text{SE}}[f](t)| \leq C \sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \alpha N}}. \quad (2.31)$$

定理 2.8 (岡山ら [10]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす実数とし, $f \in \mathbf{M}_\alpha(\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, $N > \alpha/(2d)$ をみたす自然数 N に対して刻み幅 h を式 (2.29) で定めると, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\max_{a \leq t \leq b} |f(t) - \mathcal{P}_N^{\text{DE}}[f](t)| \leq C \exp \left\{ \frac{-\pi d N}{\log(2dN/\alpha)} \right\}. \quad (2.32)$$

SE-Sinc 積分 (2.9) と DE-Sinc 積分 (2.14) の誤差解析は、次のように与えられている。

定理 2.9 (Stenger [19, Theorem 4.2.6]) d は $0 < d < \pi$ をみたす実数とし, $fQ \in L_\alpha(\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき, 自然数 N に対し刻み幅 $\tilde{h}$ を

$$\tilde{h} = \sqrt{\frac{2\pi d}{\alpha N}} \quad (2.33)$$

と定めると, N によらない定数 $\tilde{C}$ が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \tilde{h} \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{SE}}(j\tilde{h})) \{\psi^{\text{SE}}\}'(j\tilde{h}) \right| \leq \tilde{C} e^{-\sqrt{2\pi d \alpha} N}. \quad (2.34)$$

定理 2.10 (Tanaka et al. [23, Theorem 3.1]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす実数とし, $fQ \in L_\alpha(\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき, $N > \alpha/(4d)$ をみたす自然数 N に対して刻み幅 $\tilde{h}$ を

$$\tilde{h} = \frac{\log(4dN/\alpha)}{N} \quad (2.35)$$

と定めると, N によらない定数 $\tilde{C}$ が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \tilde{h} \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{DE}}(j\tilde{h})) \{\psi^{\text{DE}}\}'(j\tilde{h}) \right| \leq \tilde{C} \exp \left\{ \frac{-2\pi d N}{\log(4dN/\alpha)} \right\}. \quad (2.36)$$

式 (2.33) や式 (2.35) で定めた刻み幅 $\tilde{h}$ は, 式 (2.27) や式 (2.29) で定めた刻み幅 h と異なっているが, 後に述べる Sinc 選点法に基づくスキームでは, 定積分近似においても刻み幅は h に設定される。その場合の誤差は次のようになる。

定理 2.11 (岡山ら [10]) 関数 f は定理 2.9 の仮定をみたすとする。このとき, 自然数 N に対し刻み幅 h を式 (2.27) で定めると, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - h \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{SE}}(jh)) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) \right| \leq C e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}. \quad (2.37)$$

定理 2.12 (岡山ら [10]) 関数 f は定理 2.10 の仮定をみたすとする。このとき, $N > \alpha/(2d)$ をみたす自然数 N に対し刻み幅 h を式 (2.29) で定めると, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - h \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{DE}}(jh)) \{\psi^{\text{DE}}\}'(jh) \right| \leq C \exp \left\{ \frac{-2\pi d N}{\log(2dN/\alpha)} \right\}. \quad (2.38)$$

SE-Sinc 不定積分 (2.10) と DE-Sinc 不定積分 (2.15) に対しては, Haber [4] や Muhammad-Mori [8] によって収束性解析が行われているが, ここではより厳しく収束次数を評価した次の結果を引用する.

定理 2.13 (Okayama et al. [15, Theorem 2.7]) 関数 f は定理 2.9 の仮定をみたすとする. このとき, 自然数 N に対し刻み幅 h を式 (2.27) で定めると, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t f(s) ds - \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{SE}}(jh)) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq C e^{-\sqrt{\pi d \alpha N}}. \quad (2.39)$$

定理 2.14 (Okayama et al. [15, Theorem 2.13]) 関数 f は定理 2.10 の仮定をみたすとする. このとき, $N > \alpha/(2d)$ をみたす自然数 N に対して刻み幅 h を式 (2.29) で定めると, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t f(s) ds - \sum_{j=-N}^N f(\psi^{\text{DE}}(jh)) \{\psi^{\text{DE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \\ & \leq C \frac{\log(2dN/\alpha)}{N} \exp \left\{ \frac{-\pi d N}{\log(2dN/\alpha)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

注意 2.15 本章で述べた全ての誤差解析において, 刻み幅 h を N に対して定める際に, d や α というパラメータを用いていることに注目していただきたい. これは被近似関数 f に依るパラメータであり, f が既知の場合はこのパラメータの値を調べることができるが, 方程式の解のような未知関数の場合はそれは難しい. この問題については, 次章の第 3.2 節でより詳しく議論する.

3 Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法とその理論解析

3.1 スキームの導出: SE-Sinc-Nyström 法と DE-Sinc-Nyström 法

まず, SE 変換を用いた Sinc-Nyström 法 (SE-Sinc-Nyström 法) [17] について説明する. スキームの導出にあたり, 次の二つの条件を仮定する:

仮定 (SE1) $u \in H^\infty(\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))^{\ast 1}$.

仮定 (SE2) 任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot)Q(\cdot) \in L_\alpha(\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$.

このとき, 方程式 (1.1) における積分は, 定理 2.9 に基づいて次のように近似できる:

$$\int_a^b k(t, s)u(s) ds \approx \tilde{h} \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{SE}}(j\tilde{h}))u(\psi^{\text{SE}}(j\tilde{h}))\{\psi^{\text{SE}}\}'(j\tilde{h}) \quad (3.1)$$

^{*1} Rashidinia-Zarebnia の論文 [17] では記述されていないが, 定理 2.9 を用いるには必要な仮定である.

ただし刻み幅 $\tilde{h}$ は式 (2.33) で定める。この近似により、新たな方程式を得ることができる：

$$u_N^{\text{SE}}(t) = g(t) + \tilde{h} \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{SE}}(j\tilde{h})) u_N^{\text{SE}}(\psi^{\text{SE}}(j\tilde{h})) \{\psi^{\text{SE}}\}'(j\tilde{h}). \quad (3.2)$$

方程式 (1.2) の代わりに、近似したこの方程式 (3.2) の解 u_N^{SE} を求めることを考える。それには、右辺の未知係数 $\mathbf{u}_n^{\text{SE}} = [u_N^{\text{SE}}(\psi^{\text{SE}}(-N\tilde{h})), \dots, u_N^{\text{SE}}(\psi^{\text{SE}}(N\tilde{h}))]^T$ を求めればよい（ただし $n = 2N + 1$ ）。そのために、この方程式 (3.2) を

$$t = \psi^{\text{SE}}(i\tilde{h}), \quad i = -N, \dots, N \quad (3.3)$$

の n 点でサンプリングすることを考えると、目標の $\mathbf{u}_n^{\text{SE}}$ は次の連立 1 次方程式を解けば得られる：

$$(I_n - K_n^{\text{SE}}) \mathbf{u}_n^{\text{SE}} = \mathbf{g}_n^{\text{SE}}. \quad (3.4)$$

ただし I_n は $n \times n$ の単位行列であり、 K_n^{SE} は (i, j) 成分が

$$(K_n^{\text{SE}})_{ij} = \tilde{h} k(\psi^{\text{SE}}(i\tilde{h}), \psi^{\text{SE}}(j\tilde{h})) \{\psi^{\text{SE}}\}'(j\tilde{h}), \quad i, j = -N, \dots, N \quad (3.5)$$

であるような $n \times n$ 行列、また $\mathbf{g}_n^{\text{SE}} = [g(\psi^{\text{SE}}(-N\tilde{h})), \dots, g(\psi^{\text{SE}}(N\tilde{h}))]^T$ である。以上をまとめると、連立 1 次方程式 (3.4) を解いて係数 $\mathbf{u}_n^{\text{SE}}$ を求めれば、式 (3.2) によって近似解 u_N^{SE} が定まる。これが SE-Sinc-Nyström 法である。

DE 変換を用いた Sinc-Nyström 法 (DE-Sinc-Nyström 法) [9] においても、スキーム導出の流れは全く同様である。まず、次の条件を仮定する：

仮定 (DE1) $u \in \mathbf{H}^\infty(\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$.

仮定 (DE2) 任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_\alpha(\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$.

この仮定の下で、上述した SE-Sinc-Nyström 法において、変数や関数の右上の 'SE' を 'DE' に取り替えたもの考えることができ、連立 1 次方程式

$$(I_n - K_n^{\text{DE}}) \mathbf{u}_n^{\text{DE}} = \mathbf{g}_n^{\text{DE}} \quad (3.6)$$

を解いて得られた係数 $\mathbf{u}_n^{\text{DE}}$ を用いて、近似解

$$u_N^{\text{DE}}(t) = g(t) + \tilde{h} \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{DE}}(j\tilde{h})) u_N^{\text{DE}}(\psi^{\text{DE}}(j\tilde{h})) \{\psi^{\text{DE}}\}'(j\tilde{h}). \quad (3.7)$$

が決定する。ただし、全ての刻み幅 $\tilde{h}$ は式 (2.35) で定める。これが DE-Sinc-Nyström 法である。

3.2 一つ目の難点の克服：未知関数のパラメータの求め方

上述した Sinc-Nyström 法では、方程式の解 u に対し仮定 (SE1) や仮定 (DE1) を課し、そのパラメータ d を、刻み幅 $\tilde{h}$ の決定式 (2.33) や (2.35) で用いている。ただし、方程式の解はこれから

求めようとする関数であり、通常はその具体形は不明なため、パラメータ d はどのように求めればよいのか、という問題が生じる。これに対する解答は先行研究 [9, 17] では与えられていなかったが、我々は理論解析を行って次のような定理を示した。

定理 3.1 (岡山ら [12, 定理 2.1]) 関数 g は $g \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}})$ をみたし、また関数 k は任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し $k(\cdot, w)Q(w) \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}})$ かつ $k(z, \cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_\alpha(\mathcal{D})$ をみたすとする。さらに、 $g \equiv 0$ のときの方程式 (1.1) の解は $u \equiv 0$ のみであるとする。このとき、方程式 (1.1) には唯一解 $u \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}) \cap C(\overline{\mathcal{D}})$ が存在する。

この定理は仮定 (SE1) や仮定 (DE1) の十分条件を示しており、この条件は全て既知関数 g, k, Q のみで書かれているので、既知関数を調べれば、目標であった u のパラメータ d が求められる。

3.3 具体的な方程式に対する解析例と数値実験

一つ、解 u のパラメータ d を求める解析の具体例を挙げる。次の方程式

$$u(t) = \sqrt{\frac{t}{2}} \left\{ 1 + \operatorname{arcsinh}(1) - \sqrt{2 + 2(t-1)^2} \right\} + \int_0^2 \sqrt{\frac{ts}{2}} u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (3.8)$$

を考える。この方程式における関数 g と k は、SE 変換の場合は $\mathcal{D} = \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2})$, $\alpha = 1$ で定理 3.1 の条件をみたし、また DE 変換の場合は $\mathcal{D} = \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6})$, $\alpha = 1$ で定理 3.1 の条件をみたす。よって定理 3.1 より、解 u のパラメータ d は、SE 変換の場合は $d = \pi/2$ 、DE 変換の場合は $d = \pi/6$ であることがわかる。実際、方程式 (3.8) の解析解は $u(t) = \sqrt{t} \{ 1/\sqrt{2} - \sqrt{1 + (t-1)^2} \}$ であり、これは $u \in \mathbf{H}^\infty(\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2})) \cap C(\overline{\psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2})})$ かつ $u \in \mathbf{H}^\infty(\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6})) \cap C(\overline{\psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6})})$ をみたすので、定理 3.1 の主張が正しいことが確認できる。ここで重要なのは、解析解 u が不明でも、既知関数を調べることで適切な d の値が求まり、 $\tilde{h}$ を式 (2.33) や (2.35) で定めて計算を実行できるということである。

ところで、実は正しい d の値が不明の場合でも、この d の値を適当に定めれば計算は（一応は）実行可能なはずである。そこで方程式 (3.8) に対して、 d を正しく定めた場合と、適当に定めた場合で数値実験を行って比較する。第 2 章の誤差解析の定理によれば、 d の値の上限は、SE 変換の場合は $d = \pi$ 、DE 変換の場合は $d = \pi/2$ であるので、正しい d が不明の場合に、これらの値で代用するのは一つの方法である（これは被近似関数に対し、全複素平面で正則だと期待することに対応する）。計算結果を図 1 に示す。ただし、図中の最大誤差（maximum error）は、区間 $[0, 2]$ を等分割した 101 点上での絶対誤差のうち、最も大きな値である。誤差の減少の様子を観察すると、正しく d の値を設定した場合（実線；SE-Sinc with $d = \pi/2$, DE-Sinc with $d = \pi/6$ ）に比べ、適当に d の値を設定した場合（鎖線；SE-Sinc with $d = \pi$, DE-Sinc with $d = \pi/2$ ）は収束が遅い。真の Sinc-Nyström 法の収束性能を得るには、やはり d は正しく設定すべきであることがわかる。定理 3.1 はそれを可能にする結果である。

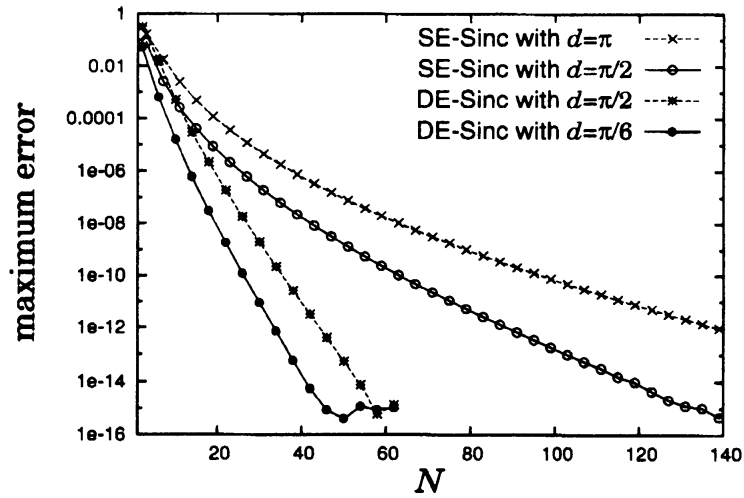


図 1 方程式 (3.8) に対する SE-Sinc-Nyström 法と DE-Sinc-Nyström 法の d の値を変えた計算結果.

3.4 二つ目の難点の克服：スキームの可解性と収束性の証明

上述した SE-Sinc-Nyström 法と DE-Sinc-Nyström 法に対して、それぞれ次のような誤差解析が与えられている。

定理 3.2 (Rashidinia–Zarebnia [17, Theorem 2]) 仮定 (SE1) と仮定 (SE2) が成り立つとする。このとき、 N に依存しない定数 C が存在して、

$$\sup_{t \in (a, b)} |u(t) - u_N^{\text{SE}}(t)| \leq C \mu_N^{\text{SE}} \sqrt{N} e^{-\sqrt{2\pi d \alpha} N} \quad (3.9)$$

が成り立つ。ただし $\mu_N^{\text{SE}} = \|(I_n - K_n^{\text{SE}})^{-1}\|_2$ である。

定理 3.3 (Muhammad et al. [9, Theorem 3.4]) 仮定 (DE1) と仮定 (DE2) が成り立つとする。このとき、 N に依存しない定数 C が存在して、

$$\sup_{t \in (a, b)} |u(t) - u_N^{\text{DE}}(t)| \leq C \mu_N^{\text{DE}} \sqrt{N} \exp \left\{ \frac{-2\pi d N}{\log(4dN/\alpha)} \right\} \quad (3.10)$$

が成り立つ。ただし $\mu_N^{\text{DE}} = \|(I_n - K_n^{\text{DE}})^{-1}\|_2$ である。

これらの定理の誤差項には、 N に対する挙動が未評価の項 (μ_N^{SE} や μ_N^{DE}) が残されており、そのため Sinc-Nyström 法の理論収束性は不明であった。また暗黙のうちに、 μ_N^{SE} や μ_N^{DE} が有界であること、すなわち連立 1 次方程式 (3.4) や (3.6) の係数行列が逆行列を持つことを仮定しているが、これはスキームの可解性として別途示すべきことである。我々はさらなる詳細な理論解析によって、これらのスキームの可解性と収束次数を厳密に示す次の結果を得た。

定理 3.4 (岡山ら [12, 定理 4.1]) 定理 3.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、ある自然数 N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (3.4) は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t) - u_N^{\text{SE}}(t)| \leq C e^{-\sqrt{2\pi d \alpha} N}. \quad (3.11)$$

定理 3.5 (岡山ら [12, 定理 4.2]) 定理 3.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、ある自然数 N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (3.6) は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t) - u_N^{\text{DE}}(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{-2\pi d N}{\log(4dN/\alpha)} \right\}. \quad (3.12)$$

4 Fredholm 積分方程式に対する Sinc 選点法とその理論解析

スキーム導出の前に、前章の定理 3.1 にあたる、パラメータ設定に必要な定理を述べておく。

定理 4.1 (岡山ら [14]) 関数 g は $g \in \mathbf{M}_\alpha(\mathcal{D})$ をみだし、また関数 k は任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し $k(\cdot, w)Q(w) \in \mathbf{M}_\alpha(\mathcal{D})$ かつ $k(z, \cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_\alpha(\mathcal{D})$ をみたすとする。さらに、 $g \equiv 0$ のときの方程式 (1.1) の解は $u \equiv 0$ のみであるとする。このとき、方程式 (1.1) は唯一解 $u \in \mathbf{M}_\alpha(\mathcal{D})$ を持つ。

まず、SE 変換を用いた Sinc 選点法 (SE-Sinc 選点法) について説明する。元々は Rashidinia-Zarebnia [16] によって提案されたが、ここでは著者 [10, 14] によって改善されたスキームを述べる。定理 4.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみだされているとする。このとき、定理 2.7 に基づき、解 u を式 (2.18) のように近似することを考え、近似解 u_N^{SE} を次のように設定する：

$$u_N^{\text{SE}}(t) = v_{-N-1}w_a(t) + \sum_{j=-N}^N v_j S(j, h)(\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + v_{N+1}w_b(t). \quad (4.1)$$

ただし刻み幅 h は式 (2.27) で定める。この右辺の未知係数 $\mathbf{v}_n = [v_{-N-1}, v_{-N}, \dots, v_N, v_{N+1}]^T$ を求めるために (ただし $n = 2N + 3$)、 u_N^{SE} を方程式 (1.1) に代入し、選点

$$t_i^{\text{SE}} = \begin{cases} a & (i = -N - 1) \\ \psi^{\text{SE}}(ih) & (i = -N, \dots, N) \\ b & (i = N + 1) \end{cases} \quad (4.2)$$

上で離散化する。ただしこの方程式中の積分は、定理 2.11 に基づいて次のように近似する：

$$\int_a^b k(t_i^{\text{SE}}, s) u_N^{\text{SE}}(s) ds \approx h \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) u_N^{\text{SE}}(t_j^{\text{SE}}) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh). \quad (4.3)$$

ただし刻み幅 h は式 (2.27) で定める (上記と同一). このとき, n 次元ベクトル $\mathbf{b}_n^{\text{SE}}$ と $\mathbf{d}_n^{\text{SE}}$ の第 i 成分 ($i = -N-1, -N, \dots, N, N+1$) をそれぞれ

$$(\mathbf{b}_n^{\text{SE}})_i = w_a(t_i^{\text{SE}}) - h \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) w_a(t_j^{\text{SE}}) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh), \quad (4.4)$$

$$(\mathbf{d}_n^{\text{SE}})_i = w_b(t_i^{\text{SE}}) - h \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) w_b(t_j^{\text{SE}}) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (4.5)$$

で定め, また $\delta_{ij}^{(0)}$ を Kronecker のデルタとして, $n \times (n-2)$ 行列 C_n^{SE} の (i, j) 成分を

$$(C_n^{\text{SE}})_{ij} = \delta_{ij}^{(0)} - hk(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh), \quad (4.6)$$

$$i = -N-1, -N, \dots, N, N+1, \quad j = -N, \dots, N$$

で定めて, $\Phi_n^{\text{SE}} = [\mathbf{b}_n^{\text{SE}} \mid C_n^{\text{SE}} \mid \mathbf{d}_n^{\text{SE}}]$ とおくと, 解くべき連立 1 次方程式は

$$\Phi_n^{\text{SE}} \mathbf{v}_n = \mathbf{g}_n^{\text{SE}} \quad (4.7)$$

と表せる. ただし $\mathbf{g}_n^{\text{SE}} = [g(t_{-N-1}^{\text{SE}}), g(t_{-N}^{\text{SE}}), \dots, g(t_N^{\text{SE}}), g(t_{N+1}^{\text{SE}})]^T$ である. この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{v}_n$ を求めれば, 式 (4.1) で近似解 u_N^{SE} が定まる. これが SE-Sinc 選点法である.

DE 変換を用いた Sinc 選点法 (DE-Sinc 選点法) [10, 14] においても, スキーム導出の流れは全く同様である. ここでは, 定理 4.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. この仮定の下で, 上述した SE-Sinc 選点法において, 変数や関数の右上の 'SE' を 'DE' に取り替えたものを考えることができ, 連立 1 次方程式

$$\Phi_n^{\text{DE}} \mathbf{v}_n = \mathbf{g}_n^{\text{DE}} \quad (4.8)$$

を解いて得られた係数 $\mathbf{v}_n$ を用いて, 近似解

$$u_N^{\text{DE}}(t) = v_{-N-1} w_a(t) + \sum_{j=-N}^N v_j S(j, h) (\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) + v_{N+1} w_b(t) \quad (4.9)$$

が決定する. ただし, 全ての刻み幅 h は式 (2.29) で定める. これが DE-Sinc 選点法である.

注意 4.2 Sinc 選点法の近似解 (4.1) や (4.9) の基底関数は, Sinc 関数や線形関数 w_a, w_b である一方, Sinc-Nyström 法の近似解 (3.2) や (3.7) の基底関数は, 関数 g や k である. 双方とも Sinc 法に基づくスキームであるが, このように基底関数に大きな違いがあることに注意.

以上のスキームに対し, 我々は次のような誤差解析結果を得た.

定理 4.3 (岡山ら [10, 14]) 定理 4.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする. このとき, ある自然数 N_0 が存在して, 任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (4.7) は一意可解で, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t) - u_N^{\text{SE}}(t)| \leq C \sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}. \quad (4.10)$$

定理 4.4 (岡山ら [10, 14]) 定理 4.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、ある自然数 N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (4.8) は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t) - u_N^{\text{DE}}(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{-\pi d N}{\log(2dN/\alpha)} \right\}. \quad (4.11)$$

5 Volterra 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法とその理論解析

スキーム (Muhammad et al. [9] が提案) 導出の前に、パラメータ設定に必要な定理を述べておく。

定理 5.1 (岡山ら [13, 定理 4.1]) 関数 g は $g \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D})$ をみたし、また関数 k は任意の $z, w \in \mathcal{D}$ に対し $k(\cdot, w)Q(w) \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D})$ かつ $k(z, \cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_\alpha(\mathcal{D})$ をみたすとする。このとき、方程式 (1.2) には唯一解 $u \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D})$ が存在する。

まず、SE-Sinc-Nyström 法について説明する。定理 5.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、方程式 (1.2) における積分は、定理 2.13 に基づいて次のように近似できる：

$$\int_a^t k(t, s)u(s) ds \approx \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{SE}}(jh))u(\psi^{\text{SE}}(jh))\{\psi^{\text{SE}}\}'(jh)J(j, h)(\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)). \quad (5.1)$$

ただし刻み幅 h は式 (2.27) で定める。この近似により、新たな方程式を得ることができる：

$$u_N^{\text{SE}}(t) = g(t) + \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{SE}}(jh))u_N^{\text{SE}}(\psi^{\text{SE}}(jh))\{\psi^{\text{SE}}\}'(jh)J(j, h)(\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t)). \quad (5.2)$$

方程式 (1.2) の代わりに、近似したこの方程式 (5.2) の解 u_N^{SE} を求めることを考える。それには、式 (5.2) の右辺の未知係数 $\mathbf{u}_n^{\text{SE}} = [u_N^{\text{SE}}(\psi^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, u_N^{\text{SE}}(\psi^{\text{SE}}(Nh))]^T$ を求めればよい (ただし $n = 2N + 1$)。そこで、この方程式 (5.2) を

$$t = \psi^{\text{SE}}(ih), \quad i = -N, \dots, N \quad (5.3)$$

の n 点でサンプリングして、連立 1 次方程式をたてることを考える。ここで $\delta_{ij}^{(-1)}$ を

$$\delta_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{2} + \int_0^{i-j} \frac{\sin \pi s}{\pi s} ds \quad (5.4)$$

で定め、 $n \times n$ の行列 K_n^{SE} を

$$(K_n^{\text{SE}})_{ij} = h k(\psi^{\text{SE}}(ih), \psi^{\text{SE}}(jh))\{\psi^{\text{SE}}\}'(jh)\delta_{ij}^{(-1)}, \quad i, j = -N, \dots, N \quad (5.5)$$

とおき、さらに $\mathbf{g}_n^{\text{SE}} = [g(\psi^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, g(\psi^{\text{SE}}(Nh))]^T$ とおけば、解くべき連立 1 次方程式は

$$(I_n - K_n^{\text{SE}})\mathbf{u}_n^{\text{SE}} = \mathbf{g}_n^{\text{SE}} \quad (5.6)$$

と表せる. 連立 1 次方程式 (5.6) を解いて係数 u_n^{SE} を求めれば, 式 (5.2) によって近似解 u_N^{SE} が定まる. これが SE-Sinc-Nyström 法である.

DE 変換を用いた Sinc-Nyström 法 (DE-Sinc-Nyström 法) においても, スキーム導出の流れは全く同様である. ここでは, 定理 5.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする. この仮定の下で, 上述した SE-Sinc-Nyström 法において, 変数や関数の右上の 'SE' を 'DE' に取り替えたものを考えることができ, 連立 1 次方程式

$$(I_n - K_n^{\text{DE}})u_n^{\text{DE}} = g_n^{\text{DE}} \quad (5.7)$$

を解いて得られた係数 u_n^{DE} を用いて, 近似解

$$u_N^{\text{DE}}(t) = g(t) + \sum_{j=-N}^N k(t, \psi^{\text{DE}}(jh))u_N^{\text{DE}}(\psi^{\text{DE}}(jh))\{\psi^{\text{DE}}\}'(jh)J(j, h)(\{\psi^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \quad (5.8)$$

が求まる. ただし刻み幅 h は式 (2.29) で定める. これが DE-Sinc-Nyström 法である.

以上のスキームに対し, 我々は次のような誤差解析結果を得た.

定理 5.2 (岡山ら [13, 定理 5.3]) 定理 5.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする. このとき, ある自然数 N_0 が存在して, 任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (5.6) は一意可解で, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t) - u_N^{\text{SE}}(t)| \leq C e^{-\sqrt{\pi d \alpha N}}. \quad (5.9)$$

定理 5.3 (岡山ら [13, 定理 5.2]) 定理 5.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする. このとき, ある自然数 N_0 が存在して, 任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (5.7) は一意可解で, N によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t) - u_N^{\text{DE}}(t)| \leq C \frac{\log(2dN/\alpha)}{N} \exp \left\{ \frac{-\pi d N}{\log(2dN/\alpha)} \right\}. \quad (5.10)$$

6 Volterra 積分方程式に対する Sinc 選点法とその理論解析

スキーム導出の前に, パラメータ設定に必要な定理を述べておく. 著者の結果 [10, 11] から関数 k に関する仮定を多少緩めてある.

定理 6.1 関数 g は $g \in M_\alpha(\mathcal{D})$ をみたし, また関数 k は任意の $z, w \in \mathcal{D}$ に対し $k(\cdot, w)Q(w) \in M_\alpha(\mathcal{D})$ かつ $k(z, \cdot)Q(\cdot) \in L_\alpha(\mathcal{D})$ をみたすとする. このとき, 方程式 (1.2) には唯一解 $u \in M_\alpha(\mathcal{D})$ が存在する.

まず, SE 変換を用いた Sinc 選点法 (SE-Sinc 選点法) について説明する. 元々は Rashidinia-Zarebnia [18] によって提案されたが, ここでは著者 [10] が改善したスキームを述べる. 定理 6.1

の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、定理 2.7 に基づき、解 u を式 (2.18) のように近似することを考え、近似解 u_N^{SE} を式 (4.1) で設定する。ただし刻み幅 h は式 (2.27) で定める。式 (4.1) の右辺の未知係数 $\mathbf{v}_n = [v_{-N-1}, v_{-N}, \dots, v_N, v_{N+1}]^T$ を求めるために (ただし $n = 2N + 3$)、 u_N^{SE} を方程式 (1.2) に代入し、式 (4.2) で定められる選点 $t = t_i^{\text{SE}}$ 上で離散化する。ただしこの方程式中の積分は、定理 2.13 に基づいて次のように近似する：

$$\int_a^{t_i^{\text{SE}}} k(t_i^{\text{SE}}, s) u_N^{\text{SE}}(s) ds \approx \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) u_N^{\text{SE}}(t_j^{\text{SE}}) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t_i^{\text{SE}})). \quad (6.1)$$

また刻み幅 h は式 (2.27) で定める (上記と同一)。ただし $J(j, h) (\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t_i^{\text{SE}}))$ は、式 (5.4) の $\delta_{ij}^{(-1)}$ を用いて、

$$\tilde{\delta}_{ij}^{(-1)} = \begin{cases} 0 & (i = -N - 1) \\ \delta_{ij}^{(-1)} & (i = -N, \dots, N) \\ 1 & (i = N + 1) \end{cases} \quad (6.2)$$

と定めると、 $J(j, h) (\{\psi^{\text{SE}}\}^{-1}(t_i^{\text{SE}})) = h \tilde{\delta}_{ij}^{(-1)}$ と表せる。これを用いて、 n 次元ベクトル $\mathbf{p}_n^{\text{SE}}$ と $\mathbf{r}_n^{\text{SE}}$ の第 i 成分 ($i = -N - 1, -N, \dots, N, N + 1$) をそれぞれ

$$(\mathbf{p}_n^{\text{SE}})_i = w_a(t_i^{\text{SE}}) - h \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) w_a(t_j^{\text{SE}}) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) \tilde{\delta}_{ij}^{(-1)}, \quad (6.3)$$

$$(\mathbf{r}_n^{\text{SE}})_i = w_b(t_i^{\text{SE}}) - h \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) w_b(t_j^{\text{SE}}) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) \tilde{\delta}_{ij}^{(-1)} \quad (6.4)$$

で定め、 $n \times (n - 2)$ 行列 Q_n^{SE} の (i, j) 成分を

$$(Q_n^{\text{SE}})_{ij} = \delta_{ij}^{(0)} - h k(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) \{\psi^{\text{SE}}\}'(jh) \tilde{\delta}_{ij}^{(-1)}, \quad (6.5)$$

$$i = -N - 1, -N, \dots, N, N + 1, \quad j = -N, \dots, N$$

で定めて、 $\Omega_n^{\text{SE}} = [\mathbf{p}_n^{\text{SE}} \mid Q_n^{\text{SE}} \mid \mathbf{r}_n^{\text{SE}}]$ とおくと、解くべき連立 1 次方程式は

$$\Omega_n^{\text{SE}} \mathbf{v}_n = \mathbf{g}_n^{\text{SE}} \quad (6.6)$$

と表せる。ただし $\mathbf{g}_n^{\text{SE}} = [g(t_{-N-1}^{\text{SE}}), g(t_{-N}^{\text{SE}}), \dots, g(t_N^{\text{SE}}), g(t_{N+1}^{\text{SE}})]^T$ である。この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{v}_n$ を求めれば、式 (4.1) で近似解 u_N^{SE} が定まる。これが SE-Sinc 選点法である。

DE 変換を用いた Sinc 選点法 (DE-Sinc 選点法) においても、スキーム導出の流れは全く同様である。ここでは、定理 6.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。この仮定の下で、上述した SE-Sinc 選点法において、変数や関数の右上の 'SE' を 'DE' に取り替えたものを考えることができ、連立 1 次方程式

$$\Omega_n^{\text{DE}} \mathbf{v}_n = \mathbf{g}_n^{\text{DE}} \quad (6.7)$$

を解いて得られた係数 $\mathbf{v}_n$ を用いて、式 (4.9) で近似解 u_N^{DE} が求まる。ただし、全ての刻み幅 h は式 (2.29) で定める。これが DE-Sinc 選点法である。

以上のスキームに対し、我々は次のような誤差解析結果を得た。

定理 6.2 (岡山ら [10,11]) 定理 6.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、ある自然数 N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (6.6) は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t) - u_N^{\text{SE}}(t)| \leq C\sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \alpha} N}. \quad (6.8)$$

定理 6.3 (岡山ら [10,11]) 定理 6.1 の仮定が $\mathcal{D} = \psi^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、ある自然数 N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (6.7) は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\max_{a \leq t \leq b} |u(t) - u_N^{\text{DE}}(t)| \leq C \exp \left\{ \frac{-\pi d N}{\log(2dN/\alpha)} \right\}. \quad (6.9)$$

7 おわりに

第二種 Fredholm 積分方程式 (1.1) と第二種 Volterra 積分方程式 (1.2) に対し提案されていた Sinc スキームには、共通して二つの難点があった。一つ目は、スキームの実行に、未知関数である解 u のパラメータを必要としていたことである。二つ目は、Sinc スキームの可解性や収束性が理論的に明らかにされていなかったことである。これらの問題に対し我々は理論解析により解決を与えており、本論文ではそれらの概説を行った。基本的に解決策は一貫しており、難点の一つ目に対しては、既知関数 $g(t)$ と $k(t, s)$ を調べることで解 u のパラメータが求まることを示した。また難点の二つ目に対しては、 $N \rightarrow \infty$ での挙動を解析し、スキームの一意可解性と収束性を厳密に示した。特に収束次数は、 $O(\exp(-c_1 \sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2 N / \log N))$ であることが明らかとなり、先行研究における数値実験での観察が理論的に裏付けられた。

以上の結果を踏まえ、Sinc スキームに基づく精度保証つき数値計算法の開発や、無限区間の積分方程式に対する理論解析などの研究を進めている。これらについてはまた別の機会に報告したい。

謝辞

本研究は文部科学省グローバル COE プログラム「数学新展開の研究教育拠点」の助成を受けている。

参考文献

- [1] ATKINSON, K. E.: *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [2] BRUNNER, H.: *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [3] GOLBERG, M. A. and CHEN, C. S.: *Discrete Projection Methods for Integral Equations*, Computational Mechanics, Southampton, 1996.

- [4] HABER, S.: Two formulas for numerical indefinite integration, *Mathematics of Computation*, **60** (1993), 279–296.
- [5] HACKBUSCH, W.: *Integral Equations : Theory and Numerical Treatment*, Birkhäuser Verlag, Boston, 1995.
- [6] KYTHE, P. K. and PURI, P.: *Computational Methods for Linear Integral Equations*, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [7] MORI, M. and SUGIHARA, M.: The double-exponential transformation in numerical analysis, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **127** (2001), 287–296.
- [8] MUHAMMAD, M. and MORI, M.: Double exponential formulas for numerical indefinite integration, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **161** (2003), 431–448.
- [9] MUHAMMAD, M., NURMUHAMMAD, A., MORI, M. and SUGIHARA, M.: Numerical solution of integral equations by means of the Sinc collocation method based on the double exponential transformation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **177** (2005), 269–286.
- [10] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顯: 第二種積分方程式に対する Sinc 選点法の改良とその理論解析, 投稿準備中.
- [11] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顯: Sinc 選点法による第二種積分方程式の数値解法に対する理論解析, 応用数学合同研究集会, 瀬田 (2007), 250–253.
- [12] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顯: 第二種 Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の理論解析, 日本応用数理学会 2008 年度年会, 柏 (2008), 397–398.
- [13] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顯: 第二種 Volterra 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の理論解析, 応用数学合同研究集会, 瀬田 (2008), 193–196.
- [14] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顯: 第二種積分方程式に対する Sinc 選点法の理論解析と DE 変換の応用, 日本応用数理学会 2008 年研究部会連合発表会, 八王子 (2008).
- [15] OKAYAMA, T., MATSUO, T. and SUGIHARA, M.: Error estimates with explicit constants for Sinc approximation, Sinc quadrature and Sinc indefinite integration, Mathematical Engineering Technical Reports, METR2009-01, The University of Tokyo (2009).
- [16] RASHIDINIA, J. and ZAREBNIA, M.: Numerical solution of linear integral equations by using sinc-collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, **168** (2005), 806–822.
- [17] RASHIDINIA, J. and ZAREBNIA, M.: Convergence of approximate solution of system of Fredholm integral equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **333** (2007), 1216–1227.
- [18] RASHIDINIA, J. and ZAREBNIA, M.: Solution of a Volterra integral equation by the sinc-collocation method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **206** (2007), 801–813.
- [19] STENGER, F.: *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [20] STENGER, F.: Summary of Sinc numerical methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **121** (2000), 379–420.
- [21] SUGIHARA, M. and MATSUO, T.: Recent developments of the Sinc numerical methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **164–165** (2004), 673–689.
- [22] TANAKA, K., SUGIHARA, M. and MUROTA, K.: Classes of functions for successful DE-Sinc approximations, Mathematical Engineering Technical Reports, METR2007-08, The University of Tokyo (2007), to appear in *Mathematics of Computation*.
- [23] TANAKA, K., SUGIHARA, M., MUROTA, K. and MORI, M.: Function classes for double exponential integration formulas, Mathematical Engineering Technical Reports, METR2007-07, The University of Tokyo (2007), to appear in *Numerische Mathematik*.