

$\pi_4(MSpinTOP)$ と $\pi_4(MSTOP)$ について

京大理 松本寛生

§ 序

Kirby - Siebenman [1] の Topological Transversality 定理 により Ω_n^{TOP} , $\Omega_n^{SpinTOP}$ が各々 $\pi_n(MSTOP)$, $\pi_n(MSpinTOP)$ に埋め込まれ, $n=4$ を除いては同型であることが分る。 $n=4$ についても $\pi_3(TOP/PL) \cong \mathbb{Z}_2$ から容易に

$$(1) \quad 0 \rightarrow \pi_4(MSpinPL) \rightarrow \pi_4(MSpinTOP) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

$$(2) \quad 0 \rightarrow \pi_4(MSPL) \rightarrow \pi_4(MSTOP) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

が分る。

一方 Schafer [3] の Topological rational Pontrjagin 類の定義の仕方によると, 同境界群の元に対してばかりでなく $\pi_n(MSpinTOP)$, $\pi_n(MSTOP)$ 上にも rational Pontrjagin 数が定義されることが分る。

この報告は $\pi_4(MSpinTOP)$ の中に p_1 -数が 24 の元が存在することを示すことを主題とする。この

結果と $\pi_4(\text{MSpinPL})$ の元の p_1 -数が 48 で割り切れる (Rohlin の定理) に注意すると, 完全列 (1) は

$$(1)' \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

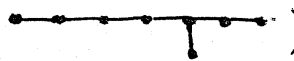
の形であることが分る。同様に $\pi_4(\text{MSTOP})$ の

$\pi_4(\text{MSPL})$ の像の外の元で p_1 -数が 0 であるものの存在が分るから, 完全列 (2) は

$$(2)' \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

の形であることが分る。

§ p_1 -数が 24 である $\pi_4(\text{MSpinTOP})$ の元の構成

図式 E_8 () に付随した plumbing P^4 をとり, $X^4 = P^4 \cup C \partial P^4$ を考える。すると X は

$\omega_1 = \omega_2 = 0$, $\pi_1 = \{1\}$, $\text{Sign} = 8$ の integral homology manifold である。更に Siebenman [4] により $X^4 \times S^1$ と homotopy type の等しい

位相多様体 V^5 が存在する。 $H_4(V^5) = H_4(X^4 \times S^1)$

の元 $\alpha = [X^4]$ を V^5 の中で位相部分多様体で

実現したか, この元を Kirby - Siebenman

の Transv. 定理が使えないかの点, V を充分高い次元

の球面 S^{5+k} に埋め込んど、その位相法 bundle $\nu(V)$ を考える。 $\nu(V) \rightarrow V \xrightarrow{\cong} X^4 \times S^1 \rightarrow S^1$ の結合写像 $\nu(V) \rightarrow S^1$ を S^1 の一稜 $*$ で transversal にしたものを f とし $N = (f)^{-1}(*)$ をとると、 N は $\nu(V)$ の位相部分多様体であって、しかも duality によつてその一稜 compactification N^+ は $\phi \times \in H_{4+k}(T\nu(V))$ を実現してゐる。

分類写像 $\nu(V) \rightarrow \gamma_{SpinTOP_k}$ を N に制限して $N \rightarrow \gamma_{SpinTOP_k}$ を得るが、又方に $R = \mathbb{R}^1$ をかけて $N \times R \rightarrow \gamma_{SpinTOP_k} \times R \rightarrow \gamma_{SpinTOP_{k+1}}$ を得る。 N の法 bundle は 1 次元で $N \times R$ と同型であるから、それにより

$S^{5+k} \rightarrow (N \times R)^+ \rightarrow MSpinTOP_{k+1}$ を得る。これは $\pi_4(MSpinTOP)$ の元を表わしてあり次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 S^{5+k} & \xrightarrow{\quad} & MSpinTOP_{k+1} \\
 \searrow & \nearrow & \uparrow \\
 & (N \times R)^+ & \\
 \Sigma ("N^+) & \xrightarrow{\Sigma} & \Sigma MSpinTOP_k \\
 & & \uparrow \\
 N^+ & \longrightarrow & MSpinTOP_k \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 T\nu(V) & &
 \end{array}$$

-方 $\pi_4(\text{MSpinTOP})$ の元の p_1 -数とは
 $\phi p_1 \in H^{4+l}(\text{MSpinTOP}_l; \mathbb{Q})$ を代表元たる写像
 $: S^{4+l} \rightarrow \text{MSpinTOP}_l$ によつて引き戻して, S^{4+l} の
 基本類によつて評価した値のことである。

従つて上に構成した元に対しては, 上の可換図式
 を用いると, その p_1 -数は

$$\langle \Sigma(\phi_* p_1(V)|_{N^+}), \Sigma[N^+] \rangle = \langle \phi_* p_1(V), [N^+] \rangle$$

に等しいことが分る。 $[N^+] = \phi_* \alpha$ に注意すると
 右辺 = $\langle \phi p_1(V), \phi \alpha \rangle = \langle p_1(V), \alpha \rangle$ である。

そこで Novikov の補題 $\langle l(V), \alpha \rangle = \tau(\hat{x})$
 を用いると $\langle p_1(V), \alpha \rangle = \langle 3l(V), \alpha \rangle = 3 \cdot \tau(\hat{x})$
 $= 3 \times 8 = 24$ を得る。よつて Novikov の補題
 を証明すれば我々の目的は達せられることになる。

§ Novikov の補題の証明

補題 (Novikov) M^{4k+1} を $(4k+1)$ 次元単位相
 多様体, $l(M) \in H^{4*}(M; \mathbb{Q})$ をその Thom-Hirzebruch
 類とする。 $\alpha \in H_{4k}(M; \mathbb{Z})$ の元に対し $\tau(\hat{x})$ を
 $H^{2k}(\hat{M}; \mathbb{Z})$ 上の 2 次形式 $(a, b) = \langle a \cup b, \hat{x} \rangle$
 の非退化部分の Signature とする。このとき

$$\langle l(M), \alpha \rangle = \tau(\hat{x})$$

か成り立つ。

略証: $k \geq 2$ のときは 余次元 1 の homology 類を位相部分多様体で実現してやれば, 位相多様体 M' とその k -類に対しては Hirzebruch の式

$$\langle l(M'), [M'] \rangle = \tau(M') \text{ か成り立つから,}$$

Novikov の Doklady TOM 162 NO. 6 (1965)

の証明方法がそのまま使える。 $k = 1$ のときは

$$N^4 = P^2(\mathbb{C}) \text{ を かけと考えると, } \langle l(N), [N] \rangle = \tau(N) = 1 \text{ だから, } k = 2 \text{ の場合を用いて}$$

$$\langle l(M \times N), \alpha \times [N] \rangle = \tau(\hat{\alpha} \times [N])$$

であるが 各辺は各々 $\langle l(M) \cdot l(N), \alpha \times [N] \rangle$

$$= \langle l(M), \alpha \rangle \cdot \langle l(N), [N] \rangle = \langle l(M), \alpha \rangle,$$

$$\tau(\hat{\alpha}) \cdot \tau(N) = \tau(\hat{\alpha}) \text{ に 等しくなり}$$

$$\langle l(M), \alpha \rangle = \tau(\hat{\alpha}) \text{ を 得る。} \quad \text{q.e.d.}$$

- [1] Kirby-Siebenman: Some theorems on topological manifolds
(Amsterdam Conference 1970)
- [2] Novikov: Homotopic and topological invariance of certain
rational Pontrjagin classes, Doklady 162 (1965) no. 6
- [3] Schafer: Topological Pontrjagin classes, Comment. Math. Helv.
Vol. 45 (1970) pp 315 ~ 332
- [4] Siebenman: Disruption of low-dimensional handlebody
theory to Rohlin's Theorem, Topology of Manifolds, Markham Publ. Comp.
1970

補足

本文では V と $[X^4]$ の組 $(V, [X^4])$ を $\pi_4(\text{MSpin-Top})$ の元とみることにし、2 p_1 -数か24の元の存在を示したわけであるが、ここでは同様に2一般の5次元位相多様体 M とその4次元整係数ホモロジ-類 α の組 (M, α) を $\pi_4(\text{MSTOP})$ の元とみることにより次の補題を証明する。

補題: $k(M, \alpha) = \langle k(M), \alpha \bmod 2 \rangle \in \mathbb{Z}_2$

但し $k(M, \alpha)$ は $(M, \alpha) \in \pi_4(\text{MSTOP})$ の k -数、 $k(M) \in H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ は Kirby-Siebenman 類。

略証: k -数は $k \in H^4(\text{BSTOP}; \mathbb{Z}_2)$ から Pontryagin-数と同様に2で定義される。従って、23頁の可換図から明らか。

系1. $k(M, \alpha) = 0 \iff (M, \alpha) \in \text{Im}(\pi_4(\text{MSPL}) \rightarrow \pi_4(\text{MSTOP}))$

系2. M スピン多様体のとき $k(M, \alpha) = \frac{\tau(\hat{\alpha})}{8} \bmod 2$

利用として次の定理を得る。

定理. M を5次元有向スピン位相多様体であって、 $H^4(M; \mathbb{Z})$ が2-torsionを持たないものとせよ。このとき M が三角分割可能であることと任意の4次元整係数ホモロジ-類 $\alpha \in H_4(M; \mathbb{Z})$ に対し $\tau(\hat{\alpha}) \equiv 0 \bmod 16$ であることは同値である。とくに上の条件の下に三角分割可能性はホモトピー-不変である。

略証: $\tau(\hat{\alpha}) \equiv 0 \bmod 16 (\forall \alpha) \iff k(M, \alpha) = 0 (\forall \alpha)$

補題 6.3 $\iff \langle k(M), x \bmod 2 \rangle = 0 \quad (\forall x)$

$k=3$ の場合 $H^4(M; \mathbb{Z})$ は 2-torsion である หมายความว่า 換えて

$H_3(M; \mathbb{Z})$ は 2-torsion である, つまり $H_4(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\bmod 2} H_4(M; \mathbb{Z}_2)$ は

onto, 従って $x \bmod 2 \in H_4(M; \mathbb{Z}_2)$ の元は $\neq 0$ である

$k(M) = 0 \in H^4(M; \mathbb{Z}_2)$ と $\tau(\hat{x}) \equiv 0 \bmod 16 \quad (\forall x)$ は

同値になる。