

## 2次元写像における 安定多様体と不安定多様体のふるまい<sup>1</sup>

山口喜博（帝京技術科学大学），谷川清隆（国立天文台）

2次元写像で記述される力学系を考え、安定多様体と不安定多様体がホモクリニック交差、接触、または漸近的な接触をしているときの構造を調べた。特にこれらの場合に不安定多様体がフラクタル的な構造を持つことを示した。

### 1. 逆写像が存在する2次元写像 $T_\mu(X, Y)$

我々は逆写像が存在する2次元写像

$T_\mu(X, Y) : X_{n+1} = F_\mu(X_n, Y_n), Y_{n+1} = G_\mu(X_n, Y_n)$ ,  
を考える。ここで $\mu$ はパラメータのセットで、関数 $F, G$ は $X, Y$ について $C^1$ 級であるとする。変換のヤコビアン $J(X, Y) = \text{Det } DT_\mu(X, Y)$ である。ここで扱うシステムは散逸系( $0 < J(X, Y) < 1$ )であるとする。以下では $\mu = \mu_c$ で最初の直接的な接触、または最初の漸近的な接触が起るとする。つまり $\mu < \mu_c$ では交差、接触はなく、 $\mu > \mu_c$ では交差が存在する。 $\mu = \mu_c$ にあるとする。以下この添字は省略する。

### 2. 定理と証明

<定理> 2次元写像  $T(X, Y)$  に対して、不安多様体  $W^u(O)$  上の任意の点  $q$  の近傍  $U_\varepsilon(q)$  内に  $q$  を含む不安多様体の弧  $w^u(q)$  以外の不安多様体の弧が次の3つの場合に存在する。

1. ホモクリニック交差 (Palis の  $\lambda$ -lemma),
2. 最初の直接的なホモクリニック接触、
3. 最初の漸近的なホモクリニック接触。

<証明> 1のケースは参考文献(2)を見られたし。ここでは3のケースを証明する。2の場合も同様に証明できる。周期  $n$  のサドルの一つを  $u_1 = (0, 0)$  と記す。 $u_1$  の近傍  $V$  (オーダー  $\varepsilon_0$ ) 内では Hartman-Grobman の定理より適当な変換  $\Phi$  で対角化できる (図1参照)。その結果我々は、 $X$  軸を安定多様体に、 $Y$  軸を不安定多様体にとる。変換  $\Phi$  によって  $T^n(X, Y)$  は

$T^n(X, Y) = (\lambda_s X + \phi_s(X, Y), \lambda_u Y + \phi_u(X, Y))$ ,  
ただし  $1/\lambda_s > 1, \lambda_u > 1, \phi_s(0, 0) = \phi_u(0, 0) = 0$ ,

$$\partial \phi_{s,u}(0, 0) / \partial X = \partial \phi_{s,u}(0, 0) / \partial Y = 0$$

$$\partial \phi_s(X, Y) / \partial Y|_{x=0} = 0, \quad \partial \phi_u(X, Y) / \partial X|_{y=0} = 0.$$

$V$  内の  $X$  軸上の点  $Q$  において不安定多様体が漸近接触をしているとすると、不安定多様体上の点で  $Q$  に集積する点列  $Q_i$  をとれる (図1参照)。以後  $Q_i$  の運動に注目する。

初期値を  $X_0 = X(Q_i) - X(Q), Y_0 = Y(Q_i) - Y(Q)$  ( $X_0, Y_0 \ll 1$ ) とし、以下では  $n_j$  を  $j$  と、 $n_j + n$  を  $j+1$  と略す。 $V$  内での写像関数は

$$X_{j+1} = \lambda_s X_j + [\partial \phi_s(X_j(Q), 0) / \partial X] X_j \\ + [\partial \phi_s(X_j(Q), 0) / \partial Y] Y_j,$$

$$Y_{j+1} = \lambda_u Y_j + [\partial \phi_u(X_j(Q), 0) / \partial Y] Y_j.$$

ここで非線形項の中で最も大きな項のオーダーを  $k$  とする。 $V$  内の  $Y$  軸上に任意の点  $P$



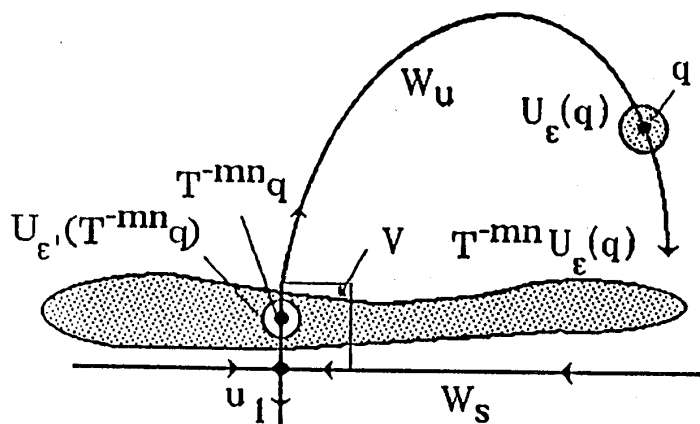


図2

$q$ の近傍 $U_\epsilon(q)$ を逆写像したものが $T^{-mn}U_\epsilon(q)$ で、一部が $V$ 内に入っている。

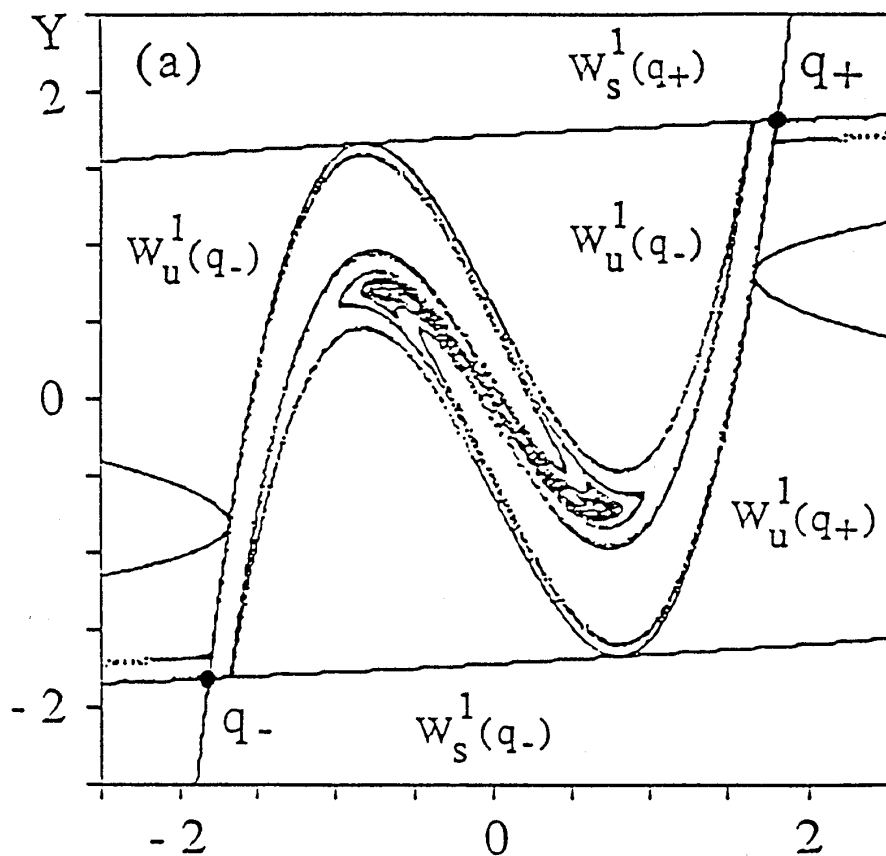


図3

用いた写像は  $X_{n+1} = Y_n$ 、 $Y_{n+1} = -aY_n + Y_n^3 - JX_n$  :  $J=0.4$ ,  $a=1.8863$ 。  $W_u^1(q_-)$  ( $W_u^1(q_+)$ ) が  $W_u^1(q_+)$  ( $W_u^1(q_-)$ ) に集積している。そして  $W_u^1(q_+)$  が  $W_s^1(q_-)$  に接触し、  $W_u^1(q_-)$  が  $W_s^1(q_+)$  に接触している。