

Genus と KP 方程式

お茶大・理 梶 利行 (Toshiyuki Katsura)

§1. 序

本稿は, [KSU] の genus と KP 方程式に関する部分の紹介である。Boson Fock space と complex cobordism ring とには, 類似した面が多々ある。例えば boson Fock space $\mathcal{H}_T(\mathbb{Q})$ には, Vertex operator, current operator が作用し complex cobordism ring $MU^*(pt)$ には Landweber-Novikov operator が作用しているが, この状況は大変よく似ている (cf. [KSU])。我々は, $MU^*(pt) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ と $\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q})$ ($\mathcal{H}_T(\mathbb{Q})$ の charge 0 の部分) との pairing を保つ同型をつくることによって genus と KP hierarchy が結びつくことを示す。ここで得られる KP hierarchy の解は trivial なものであり, 一般の KP hierarchy の解に対応する "genus" を調べるのは今後の課題となる。

§2. Boson Fock space と complex cobordism ring

2.1. Boson Fock space と pairing

$\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[t_1, t_2, t_3, \dots]$ を boson Fock space の charge 0 part という。ただし, t_i ($i=1, 2, 3, \dots$) は変数で, $\deg t_i = i$ とする。以下, $t = (t_1, t_2, \dots)$ とおく。 $\mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q})$ は次のような pairing を持つ。

$$(1) \quad \underbrace{\mathbb{Q}[t_1, t_2, \dots]}_v \times \underbrace{\mathbb{Q}[t_1, t_2, \dots]}_w \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Q}}_w$$

$$(f(t), g(t)) \longmapsto f\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_2}, \dots, \frac{1}{n}\frac{\partial}{\partial t_n}, \dots\right)g(t)\Big|_{t=0}$$

2.2. Complex cobordism ring

M を compact differentiable manifold, $\oplus_M$ をその tangent bundle とする。trivial bundle λ , complex vector bundle η および同型 $\rho: \eta \cong \oplus_M \oplus \lambda$ が存在するとき, M を weakly almost complex manifold という。その total Chern class を $C(M) = C(\eta)$ と定義する。この概念は boundary 付きの manifold にも拡張され, weakly almost complex manifolds M, N に対し, M, N がこのような manifold の boundary になるとき, M, N は cobordant であるといい, $M \sim N$ とかく。weakly almost complex manifolds 全体の集合を cobordant で分類したものの集合を $MU^*(pt)$ とかく。これには,

Addition = disjoint sum, Multiplication = direct product によって ring structure がはいる。Milnor によれば, compact almost complex manifold X_i ($i=1, 2, \dots$) があって,

$$MU^*(pt) = \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots]$$

とかけろ。さらに,

$$MU^*(pt) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[P^1, P^2, \dots]$$

となる。ここに, P^n は n 次元複素射影空間である。universal Chern class $\in C_i$ とかけば, pairing

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}[C_1, C_2, \dots] \times MU^*(pt) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (C_1, C_2, \dots, C_{i_2}, M) & \longmapsto & C_1 C_2 \dots C_{i_2}(M) \\ & & (\text{Chern number}) \end{array}$$

をうる。

2.3. 同型

Def. z を変数とし

$$\exp(t_1 z + t_2 z^2 + \dots) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) z^i$$

となるとき, $\{p_i(t)\} \in \text{elementary Schur functions}$ といふ。

Th. 2.4. ring homomorphisms

$$\begin{array}{ccc} K: MU^*(pt) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^n & \longrightarrow & p_n(n+1)t \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K^{\dagger}: \mathbb{Q}[C_1, C_2, \dots] & \longrightarrow & \mathcal{H}_{T,0}(\mathbb{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_n & \longrightarrow & (-1)^n p_n(-t) \end{array}$$

は同型であり, pairings (1), (2) を保つ。たゞし, $mt = (mt_1, mt_2, \dots)$ である。

注意. $K^{\dagger}$ は

$$(3) \quad 1 + \sum_{i \geq 1} C_i z^i = \exp\left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} t_i z^i\right)$$

からきまゝ ring homomorphism である。

Th 2.4 の証明のスケッチ

$u_i = \lambda t_{\lambda}$ とおく。

$$((k^+)^{-1}(u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_r}), p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s}) = (u_{j_1} u_{j_2} \cdots u_{j_r}, k(p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s}))$$

と $\sum_{k=1}^s \lambda_k = \sum_{\ell=1}^r j_{\ell} (=n \text{ とおく})$ のときに示せば十分。

$CH^*(\mathbb{P}^n)$ と $\mathbb{P}^n$ の Chow ring, $\xi_n \in \mathbb{P}^n$ の hyperplane class とする。 $\mathbb{P}^n$ の total Chern class は

$$C(\mathbb{P}^n) = 1 + \sum_{i \geq 1} c_i(\mathbb{P}^n) z^i = (1 + \xi_n)^{n+1}$$

である。(3) の log をとると

$$\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{u_i(\mathbb{P}^n)}{i} z^i = \log(1 + \xi_n z)^{n+1} = (n+1) \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{\xi_n^i}{i} z^i$$

とある。これから

$$u_i(\mathbb{P}^n) = (n+1) \xi_n^i.$$

また,

$$C(p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s}) = C(p^{\lambda_1}) C(p^{\lambda_2}) \cdots C(p^{\lambda_s}) = (1 + \xi_{\lambda_1} z)^{\lambda_1+1} \cdots (1 + \xi_{\lambda_s} z)^{\lambda_s+1}$$

$$1 + \sum_{i=1}^p c_i(p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s}) z^i = \exp\left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{u_i(p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s})}{i} z^i\right).$$

log をとると

$$u_j(p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s}) = \sum_{k=1}^s (\lambda_k + 1) \xi_{\lambda_k}^j.$$

故に

$$(4) ((k^+)^{-1}(u_{j_1} \cdots u_{j_r}), p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s}) = \prod_{\ell=1}^r u_{j_{\ell}}(p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s}) = \prod_{\ell=1}^r \left\{ \sum_{k=1}^s (\lambda_k + 1) \xi_{\lambda_k}^{j_{\ell}} \right\}.$$

これより,

$$(5) (u_{j_1} \cdots u_{j_r}, k(p^{\lambda_1} x \cdots x p^{\lambda_s})) = \left(\prod_{\ell=1}^r \frac{\partial}{\partial t_{j_{\ell}}} \right) \left(\prod_{k=1}^s p_{\lambda_k} ((\lambda_k + 1)t) \right) \Big|_{t=0}.$$

初等的な計算によって, (4)(5)の右辺は等しい。 p.e.d.

§3. Genera

Def. ring homomorphism $\varphi: MU^*(pt) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ を genus といふ。

genus を作るには次のようにする。

$$\lambda\text{-ring } \Lambda(\mathbb{Q}) = \{1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \mid c_i \in \mathbb{Q}\}.$$

multiplication は formal power series の積として定義する。これは abelian group になる。 c_i は変数にも用いる。このとき, $\deg c_i = i$ とする。 $T_\ell(c_1, \dots, c_\ell)$ ($T_0 = 1$, $\ell = 1, 2, \dots$) を $\mathbb{Q}$ に係数をもつ ℓ 次の同次式とする。

Def. $T = \{T_\ell(c_1, \dots, c_\ell)\}_{\ell=0,1,2,\dots}$ が multiplicative sequence とは,

$\Phi_T: \Lambda(\mathbb{Q}) \longrightarrow \Lambda(\mathbb{Q})$ が homomorphism になるものをいふ。

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \mapsto 1 + T_1 z + T_2 z^2 + \dots$$

このとき,

$$Q(z) = \Phi_T(1+z)$$

を T の characteristic power series という (cf. [H]).

multiplicative sequence と characteristic power series は 1 対 1 に対応する。 multiplicative sequence T があれば, n 次元の weakly almost complex manifold M に対し

$$\varphi(M) = T_n(c_1, \dots, c_n)[M]$$

とおいて genus をうき。

Th.2.4 における同型 K^+ を自然に延長して

$$\hat{K}^+: \mathbb{Q}[[c_1, c_2, \dots]] \longrightarrow \mathbb{Q}[[t_1, t_2, \dots]]$$

をうる。ただし、完備化は $\deg c_i = \deg t_i = i$ としてのものをとる。

$$T(c) = \sum_{n \geq 0} T_n(c_1, \dots, c_n)$$

とおく。

Def. $\tau_T(t) = \hat{K}^+(T(c))$ を T に付随した τ 函数という。

T の characteristic power series $\in \mathbb{Q}(z)$ とし

$$(b) \quad \frac{1}{Q(z)} = 1 - a_1 z + a_2 z^2 - a_3 z^3 + \dots$$

と展開しておく。

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_g) \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_g \quad n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_g \quad (n \text{ の分割})$$

とし, $x_1, x_2, \dots$ に対して,

$$D(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_g) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x_{\lambda_1} & x_{\lambda_1+1} & x_{\lambda_1+2} & \dots & x_{\lambda_1+g-1} \\ x_{\lambda_2-1} & x_{\lambda_2} & x_{\lambda_2+1} & \dots & x_{\lambda_2+g-2} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ x_{\lambda_g-g+1} & \dots & \dots & \dots & x_{\lambda_g} \end{vmatrix}$$

とおく。ここには, $x_0 = 1$, $x_m = 0$ ($m < 0$) とする。これらの記号を用いて

$$\text{Th.3.1. (i)} \quad \tau_T(t) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} t_i t_i\right).$$

ただし, t_i は $T_i(c_1, \dots, c_i)$ における c_i の係数である。

(iii) $\tau_T(t) = \hat{K}^+(T(c))$ は次で与えられる。

$$(*) \quad T(c) = 1 + \sum_{n \geq 1} \sum_{n \text{ 分割}} D(c; \lambda_1, \dots, \lambda_g) D(a; \lambda_1, \dots, \lambda_g)$$

$$= \det \left(\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & & & & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & & & 0 \\ & & 1 & a_1 \\ & & a_2 & a_1 & 1 \\ & & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ \hline & & & a_3 & a_2 & a_1 \\ & & & & a_3 & a_2 \\ & & & & & a_3 \end{array} \right)$$

となる。

無限次行列の積の行列式のとり方は次のとおり。

$$\det \left(\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline m & n \end{array} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \det_m \left(\begin{array}{c|c} m & n \\ \hline m & n \end{array} \right) \right\}$$

注意 (*) の等式については 1953 年 6 月 20 日に Hirzebruch が Todd にあてた手紙の中に少なくとも Todd genus については述べられている。

例 Todd genus

$$Q(z) = \frac{z}{1-e^{-z}}$$

$$T(c) = \det \left(\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & & & & & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & & & 0 \\ & & \frac{1}{2!} & 1 \\ & & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \\ & & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 \\ \hline & & & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} \\ & & & & \frac{1}{3!} \end{array} \right)$$

附.3.1. の証明

(i) 同型 $K: \mathbb{Q}[t_1, t_2, \dots] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{T,0}$ は group scheme の同型

$$\kappa: G_a^\infty \xrightarrow{\sim} \Lambda$$

を与える。multiplicative sequence T は group schemes の homomorphism $\Phi_T: \Lambda \longrightarrow \Lambda$ に対応する。

$$\tilde{\Phi}_T = \kappa^{-1} \circ \Phi_T \circ \kappa$$

とおく。 $G_a^\infty(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^\infty$ は $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であるから $\tilde{\Phi}_T$ の加法群としての準同型性から、 $\tilde{\Phi}_T$ は $\mathbb{Q}$ 線型であることが従う。すなわち、 $\tilde{\Phi}_T$ は

$$t_i \longmapsto \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} t_j \quad (\text{for } i=1, 2, 3, \dots; \alpha_{ij} \in \mathbb{Q})$$

の形となる。 κ, Φ_T は次数を保つから $\tilde{\Phi}_T$ も次数を保ち、従って $\tilde{\Phi}_T$ は

$$t_i \longmapsto b_i t_i \quad (b_i \in \mathbb{Q})$$

の形となる。可換図式

$$\begin{array}{ccc} G_a^\infty(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\kappa} & \Lambda(\mathbb{Q}) \\ \tilde{\Phi}_T \downarrow & & \downarrow \Phi_T \\ G_a^\infty(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\kappa} & \Lambda(\mathbb{Q}) \end{array}$$

より

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} b_i t_i z^i\right) = 1 + T_1 z + T_2 z^2 + \dots$$

そうす。両辺を t_n で偏微分して $t=0$ とおいて、

$$(-1)^{n+1} b_n = \frac{\partial}{\partial t_n} T_n \Big|_{t=0}$$

をうる。 T_n は次数 n の同次多項式で

$$C_n = (-1)^n p_n(-t) = (-1)^{n+1} t_n + \{t_i \text{ は 1 次とみて, 2 次以上の項}\}$$

であるから, $\frac{\partial}{\partial t_n} T_n \Big|_{t=0}$ は T_n における C_n の係数の $(-1)^{n+1}$ 倍となる。

$$(ii) \quad g(z) = \prod_{r=1}^n (1 - \alpha_r z) = 1 - a_1 z + a_2 z^2 - \dots + (-1)^n a_n z^n$$

$$Q(z) = \frac{1}{g(z)}$$

とする。 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ は n の分割とし, λ の conjugate は $\tilde{\lambda} = \mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ とする。 conjugate とは n の分割に対応する Young 図形の転置に対応する n の分割のことである。このとき あきらかに $\tilde{\tilde{\lambda}} = \lambda$ となる。

Littlewood [L, p89 (6.3.3)] より,

$$(8) \quad D(h; \lambda) = D(a; \tilde{\lambda})$$

となる。 c_i は universal Chern class とし

$$1 + c_1 z + \dots + c_n z^n = \prod_{i=1}^n (1 + \xi_i z)$$

と分解する。

$$g(z) = 1 - c_1 z + c_2 z^2 - \dots + (-1)^n c_n z^n$$

$$G(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - \xi_i z)} = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \dots + d_n z^n + \dots$$

とおく。先と同様に

$$(9) \quad D(d; \lambda) = D(c; \tilde{\lambda}).$$

$\{\lambda\}$ が n の分割全体をうごければ $\{\tilde{\lambda}\}$ は n の分割全体をうごく。

[L, p103, V] より,

$$\begin{aligned}
 Q(\xi_1)Q(\xi_2)\cdots Q(\xi_n) &= 1 + \sum_{\lambda} D(k; \lambda) D(d; \lambda) \\
 &= 1 + \sum_{\lambda} D(k; \tilde{\lambda}) D(d; \tilde{\lambda}) \\
 &= 1 + \sum_{\lambda} D(a; \lambda) D(c; \lambda).
 \end{aligned}$$

$Q(\xi)$ から multiplicative sequence T をつくるときには,
 $Q(\xi_1)Q(\xi_2)\cdots Q(\xi_n)$ を考え $n \rightarrow \infty$ とする。これで (※) が示せた。

A を $p \times q$ 行列, B を $q \times p$ 行列 ($p \leq q$) とする。このとき

$$\det(AB) = \sum_I A_I B_I.$$

ただし, A_I, B_I はそれぞれ A, B の $I \subset \{1, 2, \dots, q\}$ ($\#I=p$)
 に対応する p -小行列式である。これを用いれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \det \begin{array}{|c|c|} \hline \overset{m}{\square} & \overset{n}{\square} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \overset{m}{\square} \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right\} = 1 + \sum_{\lambda} D(c; \lambda) D(a; \lambda).$$

ただし, λ は 任意の自然数の m 個以下の自然数への分割
 全体にわたる。この式において, $m \rightarrow \infty$ とすれば, 後半の
 式も成り立つ。g.e.d.

§4. KP 方程式

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad (1 \text{ 変数常微分作用素}),$$

$$L = \partial_x + u_2(x, t) \partial_x^{-1} + u_3(x, t) \partial_x^{-2} + \cdots \quad \text{に対し}$$

$$(L^n)_+ = L^n \text{ の微分作用素の部分}$$

と定義する。

Def. L が

$$(10) \quad \frac{\partial L}{\partial t_n} = [(L^n)_+, L] \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

をみたしているとき, L を KP hierarchy の解という。

KP hierarchy の解をうるために次のような変変換が知られている (cf. [S1], [S2]). L に対し

$$(11) \quad W = 1 + w_1(x; t) \partial_x^{-1} + w_2(x; t) \partial_x^{-2} + \dots$$

があって

$$(12) \quad L = W \partial_x W^{-1}$$

となる。(10) は W に対する方程式

$$(13) \quad \frac{\partial W}{\partial t_n} = B_n W - W \partial_x^n \quad (\text{Sato 方程式})$$

となる。ただし, $B_n = (W \partial_x^n W^{-1})_+ = W \partial_x^n W^{-1}$ の微分作用素の部分

Elementary Schur polynomials $\{p_i\}$ を用いて τ 函数を次のように定義する。

$$\text{Def. } \tau(t; \xi) = \det \left(\begin{array}{c|c|c} & p_1 & p_2 \\ & p_1 & p_2 \\ 0 & p_1 & p_2 \\ & p_1 & p_2 \\ & p_1 & p_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \xi_{-2} 1 \\ \dots \xi_{-1} \xi_{-1} 1 \\ \dots \xi_{-1} \xi_{-1} 1 \\ \dots \xi_{-1} \xi_{-1} 1 \\ \dots \xi_{-1} \xi_{-1} 1 \end{pmatrix}$$

(cf. [S1]).

注意 $\det \begin{pmatrix} & 0 \\ & \xi_{-2} 1 \\ & \xi_{-1} \xi_{-1} 1 \\ & \xi_{-1} \xi_{-1} 1 \\ & \xi_{-1} \xi_{-1} 1 \end{pmatrix} = 1$ だから, この行列の逆行列を τ の

定義の行列式の中身にならからかけて

$$\tau(t, \xi) = \det \left(\begin{array}{c|c} & P_1 P_2 P_3 \\ \hline 0 & P_1 P_2 P_3 \\ & P_1 P_2 P_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ & \vdots \\ \hline \xi_0 \xi_{00} \\ \xi_1 \xi_{10} \\ \vdots \end{array} \right)$$

の形に正規化できる。

$x+t = (x+t_1, t_2, t_3, t_4, \dots)$ と定義する。

Def. $\tau(x, t; \xi) = \tau(x+t, \xi)$.

τ 函数を用いて Sato 方程式の解は

$$(14) \quad W = \tau(x, t; \xi)^{-1} \tau(x, t - \tilde{\alpha}; \xi),$$

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1^{-1}, \frac{1}{2} \alpha_2^{-2}, \frac{1}{3} \alpha_3^{-3}, \dots, \frac{1}{n} \alpha_n^{-n}, \dots)$$

で与えられる (cf. [S1], [S2])。ただし、ここにおいて α_n は単なる不定元と考え、 W を (11) の形に整理するものとする。

これを用いて (12) より KP hierarchy の解を求める。

この理論を用いて、genus に付随した τ 函数 $\tau_T(t)$ に対応する KP hierarchy の解を計算する。(3) において $t_i \mapsto (-1)^{i+1} t_i$ とおきかえる。そのとき、 $c_i(t) \mapsto p_i(t)$ となるから

$$\tau(t; \xi) = \tau_T(t_1, -t_2, t_3, -t_4, \dots)$$

とあれば、これは KP hierarchy の τ 函数となる。TK2.14 より

$$\tau(t; \xi) = \exp \left(\sum_{i \geq 1} t_i t_i \right).$$

(14) より、これに対応する Sato 方程式の解は、

$$W = \exp \left\{ \sum_{i \geq 1} -\frac{b_i}{i} \partial_x^{-i} \right\}.$$

故に

$$L = W \partial_x W^{-1} = \partial_x,$$

すなわち, genus に付随した τ 函数は, KP hierarchy の trivial 解を与える。

参考文献

- [H] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*, 3rd ed., Springer-Verlag (1966).
- [KSU] T. Katsura, Y. Shimizu, K. Ueno, *Complex cobordism ring and conformal field theory over $\mathbb{Z}$* , to appear.
- [L] D.E. Littlewood, *The theory of group characters and matrix representations of groups*, Oxford Univ. Press (1950).
- [M] J. Milnor, *On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue*, Amer. J. Math., 82 (1960), 505-521.
- [S1] M. Sato, *KP equation and Sato theory* (lecture by M. Sato), M. Mulase の 1-ト.
- [S2] M. Sato, *初期値が形式的な級数である場合の KP 方程式の解法* (lecture by M. Sato), M. Mulase の 1-ト.