

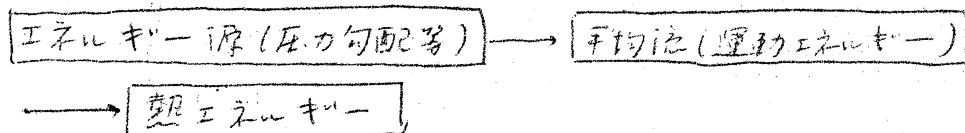
非線形不安定性

東大 宇宙研 桑原 真二

§1. はじめに

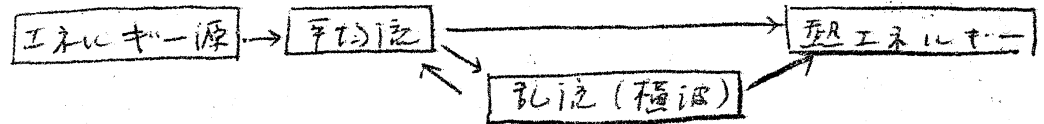
ここでは、熱および電気伝導性のない、縮まない粘性流体 あるいは連続方程式と Navier-Stokes の方程式で記述される流体の議論に限るものとする。これらの方程式によって記述される力学系を Navier-Stokes 系 (N-S 系) と呼ぶことにする。

一般の流体運動においては、層流と乱流という二種類の運動状態がある。N-S 系の一例として Hagen-Poiseuille 流 (H-P 流) の場合を考えよう。圧力勾配が十分小さい場合には流れは層流である。これをエネルギーの観点から見れば、圧力勾配によって起された流れ (平均流) が内部摩擦によって散逸され、圧力勾配によって供給されるエネルギーと摩擦によって失われるエネルギーがバランスしていると考えられる。H-P 流に限らず層流の N-S 系では



というエネルギー変遷の図式が成立つ。さて、圧力勾配が十分と大きく取りある値をこえたと、流れは乱流に遷移する。この場合には、エネルギーの供給が大きすぎて、平均流によるエネルギー散逸だけでは足りない

されず、もっと小さい運動（乱流）にそれを分解させているものと考えられる。乱流状態は（平均流）+（極波の集り）として記述することができ。この場合、エネルギー変遷の図式は



となる。一般に、平均流と乱流とが同時に、一方向のエネルギーの流れだけでなく、エネルギーの授受が考えられる。

乱流状態が起るためには、まずエネルギーの供給が十分大きくなければならぬ。この条件は、流れを特徴づける Reynolds 数 R がその流れに特有な臨界 Reynolds 数 R_{cr} を超えなければならないという形で表わされる。 $N-\rho$ 系ほどのような R についても定常解があると考えられるから、始めに流れを乱すものがなければ乱流は起らない。乱流を起す原因を初期擾乱 (initial disturbance) とよんでいる。臨界 Reynolds 数と、初期擾乱とか、乱流発生を特徴づけるパラメーターである。

乱流の機構は次の三段階に分けて考えるのが、実験的にも、理論的にも考えやすい。すなわち

- 1) 初期段階 (initial stage) 実験的には、線スペクトルの擾乱が観察される。
- 2) 遷移領域 (transition regime) 擾乱が線スペクトルから連続スペクトルに変化する。
- 3) 十分発達した乱流 (fully developed turbulence) 連続スペクトル

ル。

初期段階における理論は如何なる条件のもとに層流中の初期擾乱が増大するか、つまり、層流の不安定性の問題である。これについて、線形および非線形理論がある。前者では、平面波の協会、Squire の定理¹⁾と線形方程式のかい合せの原理から、初期擾乱として二次元擾乱の Fourier 成分をとり出し、それについての不安定の条件をしらべられる。非線形理論では、事情はもっと複雑で、次の三つの非線形作用が考えられる。

- a) 平均流と擾乱との相互作用: 方程式の平均をとった時に、一般に自乗平均の値が 0 になる。非線形理論ではこれらの項と平均流との相互作用が現れる。
- b) 三次元性: 非線形理論では Squire の定理が成立せず、三次元性を考慮する必要がある。実験的にも三次元的擾乱が存在する。
- c) 波と波との間の相互作用: $N-S$ 方程式の波数空間表示において、非線形項は波と波との間の相互作用を表わしている。

a) については Meksyn-Stuart の理論があり、この論文では、そのほかの非線形性を論ずる。b) については Benny & Lin の理論がある。著者の意見では、三次元性は乱流エネルギーの平等分配と考えられる。すなわち、まず二次元擾乱が生じ、第三成分は乱流エネルギーの分配が生ずる。これは非常に不平等なエネルギー分配なので、その平均流に特有な乱流エネルギー分配になるまで第三成分へ、他の二成分から乱流エネルギーが供給される考えなのである。c) は Meksyn-

Stuart の理論において展開されている。

§2. 基礎方程式

我々は準二次元の流れ，つまり S ，空間座標およびそのベクトル成分は二次元の場合について考えよ。座標およびベクトル成分を

	二次元	軸対称
座標	(x, y, z)	$(x, r, \phi) \quad (r \equiv y)$
速度ベクトル	$(u, v, 0)$	$(u, v, 0)$
渦度ベクトル	$(0, 0, \omega)$	$(0, 0, \omega)$

と表わす。連続の方程式，渦度の方程式 ($N-S$ 方程式に対応) および渦度の式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + y^{-s} \frac{\partial}{\partial y} y^s v = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v y^s \frac{\partial}{\partial y} (y^{-s} \omega) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-s} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega \quad (2.2)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3)$$

以下 $\varphi = y^s \frac{\partial}{\partial y} y^{-s} \frac{\partial}{\partial y}$

ここで二次元流に対し $s=0$ ，軸対称流に対し $s=1$ である。 (x, y) ， (u, v) はそれぞれ代表長さ L ，速度 U で，時間 τ ， ω は L/U ， U/L でそれぞれ規格化してある。 $R = UL/\nu$ (ν 動粘性率) は Reynolds 数である。

我々は平行流の不安定性のみを考え， x 軸と平均流 (平行流) の方向にとる。速度と渦度を平均流 (一つま) と乱流成分 (二つま) に分ける。

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}(y) + \tilde{u}(x, y, t), & v &= \tilde{v}(x, y, t) \\ \omega &= \bar{\omega}(y) + \tilde{\omega}(x, y, t) \end{aligned} \right\} (2.4)$$

(2.1) - (2.3) を時間平均したものとして、それらと (2.3) のなすものを令け
ると

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + y^{-s} \frac{\partial}{\partial y} (y^s \tilde{v}) = 0 \quad (2.1')$$

$$\partial \{ y^s (\bar{u}' - R \bar{u} \tilde{v}) \} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{\omega} - (\partial \bar{u}) \tilde{v} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + y^{-s} \partial^2 y^s \right) \tilde{\omega} \quad (2.2a)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} \tilde{\omega}) - \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{v} \tilde{\omega} - \tilde{v} \tilde{\omega}) \quad (2.2b)$$

$$\bar{\omega} = -\bar{u}'(y), \quad \tilde{\omega} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (2.3')$$

となる。非線形性は (2.2a), (2.2b) に現れている。 (2.2a) は

Reynolds 応力による平均流に対する擾乱の反作用を表わす式である。

(2.2b) において、左辺は擾乱を表わす量について線形、右辺は二次である。左辺は初値から順に、渦度の平均流による対流、渦度と平均流との相互作用、および渦度の散逸を表わす項から成り立っており、右辺は二つの級
の相互作用を表わすと考えられる。

そこで擾乱に対する流れの関数 $\psi(x, y, t)$:

$$\tilde{u} = y^{-s} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tilde{v} = -y^{-s} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.5)$$

を導入する。Meksyn-Stuart にしたがって、 ψ を Fourier 級数に展開する。これは一つの近似である。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \phi_1(y) e^{i\alpha(x-ct)} + \phi_2(y) e^{2i\alpha(x-ct)} + \dots + c.c. \\ \tilde{u} &= y^{-s} [\phi_1' e^{i\alpha(x-ct)} + \phi_2' e^{2i\alpha(x-ct)} + \dots + c.c.] \\ \tilde{v} &= -i\alpha y^{-s} [\phi_1 e^{i\alpha(x-ct)} + 2\phi_2 e^{2i\alpha(x-ct)} + \dots - c.c.] \end{aligned} \right\} (2.6)$$

$$\tilde{\omega} = -y^{-5} [e^{i\alpha(x-ct)} (\partial - \alpha^2) \phi_1 + e^{2i\alpha(x-ct)} (\partial - 4\alpha^2) \phi_2 + \dots + c.c.]$$

ここで α , c は Fourier の基本波の波数, 位相速度, c.c. はそれより前
にある式の複素共役を表わす。これを (2.26) に代入すると

$$\begin{aligned} (\bar{u} - c) (\partial - \alpha^2) \phi_1 - (\partial \bar{u}) \phi_1 - \frac{1}{i\alpha R} (\partial - \alpha^2)^2 \phi_1 &= -y^{-5} \{ \phi_1'^* \\ (\partial^2 - 4\alpha^2) \phi_2 + \phi_2' (\partial - \alpha^2) \phi_1^* \} + \frac{\partial}{\partial y} y^{-5} \{ \phi_1'^* (\partial - 4\alpha^2) \phi_2 \\ - 2 \phi_2 (\partial - \alpha^2) \phi_1 \} + \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} (\bar{u} - c) (\partial - 4\alpha^2) \phi_2 - (\partial \bar{u}) \phi_2 - \frac{1}{2i\alpha R} (\partial - 4\alpha^2)^2 \phi_2 \\ = -y^{-5} \{ \phi_1 (\partial - \alpha^2) \phi_1 + \dots \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \{ \phi_1 (\partial - \alpha^2) \phi_1 + \dots \} + \end{aligned} \quad (2.8)$$

等がえられる。

さて、(2.7) で非線形項をすべて落して (2.7), (2.8)

は

$$\partial(y^5 \bar{u}') = 0 \quad (2.9)$$

$$(\bar{u} - c) (\partial - \alpha^2) \phi - (\partial \bar{u}) \phi = \frac{1}{i\alpha R} (\partial - \alpha^2)^2 \phi \quad (2.10)$$

となる。(2.7), (2.8) 等は同形の方程式となる。(2.9) を解いて

$\bar{u}$ を求め、(2.10) に代入すると、いわゆる Orr-Sommerfeld の方程式と

なる。(2.10) の左辺第一項は平均流による乱流項であり、左辺は粘性に

よる散逸項であり、エネルギー的に考えれば、両者は乱流は増大させる

作用は強いと考えられる。左辺第二項は平均流と擾乱との相互作用を表

わし、不安定性に於て重大な効果をもつと考えられる。この項の係数

$\partial \bar{u}$ について二、三の例についてしらべてみる。

i) 平面 Couette 流 $\bar{u} = y \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad \partial \bar{u} = 1$

ii) 平面 Poiseuille 流 $\bar{u} = 1 - y^2 \quad (-1 \leq y \leq 1) \quad \partial \bar{u} = -2y$

iii) Rayleigh 流 $\bar{u} = \operatorname{erfc} y \quad (y \geq 0) \quad \partial \bar{u} = \frac{4y}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$

iv) H-P 流 $\bar{u} = 1 - \eta^2 \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad \partial \bar{u} = 0$

v) 軸対称ポエット $\bar{u} = \frac{1}{(1+\eta^2)^2} \quad (\eta \geq 0) \quad \partial \bar{u} = \frac{24\eta^2}{(1+\eta^2)^4}$

平面 Couette 流と、H-P 流については、線形不安定理論では不安定解がえられることがわかっている。この二つの流れの場合に丁度この項が0になることは、この項の不安定性に対する重要性を暗示しているように思われる。そこで、この二つの流れに対しては、平均流に対する擾乱の非線形反作用が本質的重要性をもっていると考えられる。

さて、準二次元の流れでは、非線形性は前に述べたように、平均流に対する擾乱の反作用と、higher harmonics の発生とが一つである。

十分初期の段階では、第一高調波のみが存在し、又上に強調したように、平均流に対する擾乱の反作用が重要であることはより、第一高調波以上を省略する近似を考えてみよう。ここで

$$\varphi = \sqrt{\alpha R} \phi,$$

とおく。このように近似では、(2.2a), (2.7) より

$$\bar{u} = A_2 y^2 + A_1 \delta_{30} y + A_0 - \frac{1}{\alpha R} \int y^{-5} (\varphi, \varphi') dy \quad (2.12)$$

$$(\bar{u} - c)(\partial - \alpha^2) \phi - (\partial \bar{u}) \phi = \frac{1}{\alpha R} (\partial - \alpha^2)^2 \phi \quad (2.13)$$

をうる。ここで

$$(\varphi, \varphi') = \varphi \varphi'^* - \varphi^* \varphi'$$

である。これは $\bar{u}, \varphi$ に対する連立の非線形常微分方程式である。

境界条件は次のようになり、固体壁においては無限遠で

$$\varphi = \varphi' = 0, \quad u = U_0 \quad (2.14)$$

ここで τ は固体壁あるいは無限遠での速度である。軸対称流では、中心での条件が必要の場合があり

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} \varphi = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2} (\varphi'' - \frac{1}{2} \varphi') = 0 \quad (2.15)$$

となる。前者は必ひ、後者は持たぬ τ_{22} が 0 になることである。

§3. 平面 Couette 流と Hagen-Poiseuille 流に対する非線形不安定性

線形理論によつては、不安定解のない平面 Couette 流 (C-流) と H-P 流に対しては §2 で考察したように、擾乱の平均流への反作用が重大な影をよそをもつと考へられ。Meksyn-Stuart がやつたような線形理論の摂動として、非線形性があるか方法、その中立解が存在しないから、この場合適用できない。

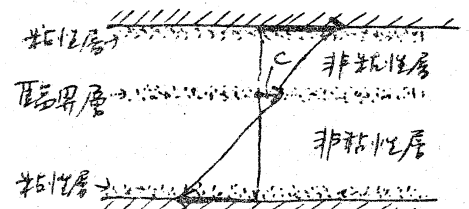
つまり、 αR が大きいとして、うまい臨界層あるいは粘性層とひきいた非粘性層に分けられると仮定しよう (第1図)。この場合には、二種の

領域に各々粘性層の解と漸近解をつくり、これらの解をつなぎ合わせて境界条件を合わせ方法が考へられる。

C-流はつて、この方法では必要の境界条件を満足する中立解はとられな

い。非粘性解による平均流への反作用を計算すると、直線の速度分布がとられ、反作用がないのと同じであ

り、粘性層においてのみ直線分布からはずれることになる。上の方法においては、平均流への反作用、したがって不安定を起す要因がうまい粘性



第1図 平面 Couette 流に
おける一つのモデル

層にのみ限られるため、十分不安定を起すにいたらないものと考えられる。

以上の考察から我々は、全中にわたって粘性の効果が見えなっていると考えてよかろう。このように粘性のもとでは、 ψ が局所的に急激に変化するものでなく十分なめらかな関数とみなしてよい。そこで、これらの全域 (C -区に対しては $[-1, 1]$, H - P 区に対しては $[0, 1]$) を関数領域に持つ適当な直交関数系をこの代わ、 ψ は十分よく近似できるものと考えられる。我々は

$$\psi = \sum a_n \varphi_n(y) \quad (3.1)$$

とおく。 a_n は複素数の定数、 φ_n は実関数である。さて、我々は、各関数 φ_n に対して次のような条件をつけよう。

1) 境界条件を満足する

$$\left. \begin{aligned} s=0 : \quad \varphi_n(\pm 1) = \varphi_n'(\pm 1) &= 0 \\ s=1 : \quad \varphi_n(1) = \varphi_n'(1) &= 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \varphi_n(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} (\varphi_n'' - \frac{1}{2} \varphi_n') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2a)$$

2) 壁における撓動切線応力 τ_{xy} は 0 になる。

$$\left. \begin{aligned} s=0 : \quad \varphi_n''(\pm 1) &\neq 0 \\ s=1 : \quad \varphi_n''(1) &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2b)$$

3) H - P 区の場合には、中心で撓動軸速度は 0 になる。

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \varphi_n'(z) \neq 0 \quad (3.2c)$$

このような条件を満足する直交関数は、 C -区では Legendre の陪関数 $P_{n+1/2}(y)$, または

$\varphi_0 = (1-y^2)^2$, $\varphi_1 = (1-y^2)^2 y$, $\varphi_2 = (1-y^2)^2 (1/y^2 - 1)$ etc (3.4)
 H-P 流に対しては Jacob の多項式 $G_n(2, 3, 2^2)$, つまり $(y = 1-2^2$ とおく)

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 2^2(1-2^2)^2 = y^2(1-y), \quad \varphi_1 = 2^2(1-2^2)(3-82^2) = -y^2(1-y)(5-8y) \\ \varphi_2 &= 2^2(1-2^2)^2(1-62^2 + \frac{15}{2}2^2) = \frac{1}{2}y^2(1-y)(5-8y+15y^2) \text{ etc.} \end{aligned} \quad (3.5)$$

をえらべばよい。

をえらべばよい。

次に中立安定の解をおめよう。 φ を上のようにしてえらんだ直交関数で展開すれば、境界条件はすでに満足されている。 次は基礎方程式を満足するように展開係数をきめなければならない。 それらを決めるのに二つの方法がある。 一つは方程式をその領域の一部で局所的に満足させる方法であり、他は領域全体にわたって、平均的に満足させる方法である。

まず平均法を計算しよう。 我々は φ が十分きめうかとし、展開の巾 = 項数でとり。 そうすると、C-流 ($s=0$), H-P 流 ($s=1$) についておのづかの

$$\begin{aligned} \bar{u} &= y + a f(y), \quad a = 2(a_0, a_1) \\ \left. \begin{aligned} f &= -\left(\frac{187}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \frac{4}{3}y^2 + \frac{6}{5}y^4 - \frac{4}{7}y^6 + \frac{1}{9}y^8\right) \quad s=0 \\ f &= \frac{4}{3 \cdot 5 \cdot 7} [4 - 7(6-5y)y^4]y \quad (y=1-2^2) \quad s=1 \end{aligned} \right\} \quad (3.6) \end{aligned}$$

を用いる。

φ を展開巾 = 項数でとり, (3.6) を代入すると (2.13) は次のようになる。

$$\mathcal{L}\varphi = a_0 \mathcal{L}\varphi_0 + a_1 \mathcal{L}\varphi_1 = 0 \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L} \equiv (y + af - c)(\partial^2 - x^2) - a\partial^2 f - \frac{1}{\alpha R}(\partial^2 - 2x^2\partial^2 + \alpha^2) \quad (3.8)$$

そこで、 $S=1$ において $y=1-r^2$ の変換をうつらものとすると

$$\left. \begin{aligned} \partial^2 &= \frac{d^2}{dy^2} \\ \partial &= 4(1-y)\frac{d}{dy} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} S=0 \\ S=1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

の意味である。

我々は $\langle f \rangle$ を

$$\left. \begin{aligned} \langle f \rangle &= \int_{-1}^1 f dy \\ \langle f \rangle &= \int_0^1 f dy \end{aligned} \right\} \begin{aligned} S=0 \\ S=1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

のように定義する。Galerkin の方法によって、係数をきめよことに

しよう。(3.7) に φ_0 および φ_1 をから、各を全域にわたって積分する

と

$$\left. \begin{aligned} \langle \varphi_0, \mathcal{L}\varphi_0 \rangle a_0 + \langle \varphi_0, \mathcal{L}\varphi_1 \rangle a_1 &= 0 \\ \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_0 \rangle a_0 + \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_1 \rangle a_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

をうる。これらの方程式は ∂ の中に a_0, a_1 をふくむため、一次方程式ではないが、上の式に現れる a_0, a_1 をまず消去し

$$\begin{vmatrix} \langle \varphi_0, \mathcal{L}\varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \mathcal{L}\varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_1 \rangle \end{vmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

をうる。そこで

$$\langle \varphi_k, \mathcal{L}\varphi_j \rangle = a_{jk} - c_{jk} + c_{jk} - \frac{1}{\alpha R} d_{jk} \quad j, k = 0, 1 \quad (3.13)$$

とかけ、

$$\left. \begin{aligned} a_{jk} &= \langle \varphi_j | \partial^2 \varphi_k \rangle - \langle \varphi_j | (\partial^2 f) \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j | f \varphi_k \rangle \\ b_{jk} &= \langle \varphi_j | \partial \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle \\ c_{jk} &= \langle \varphi_j | \gamma \partial \varphi_k \rangle - \alpha^2 \langle \varphi_j | \gamma \varphi_k \rangle \\ d_{jk} &= \langle \varphi_j | \partial^2 \varphi_k \rangle - 2\alpha^2 \langle \varphi_j | \partial \varphi_k \rangle + \alpha^4 \langle \varphi_j | \varphi_k \rangle \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

である。 $a_{ij}, \dots, d_{jk}$ に現れる $\langle \rangle$ は実定数であり、1 にならうと
それらは $\alpha^2 R^4$ の関数である。

(3.12) を線形理論の場合と同じく、特性方程式とよぼう。線形理論
との違いは、その中に擾乱の振幅 α をふくんでいることである。そこで
(3.12) は

$$F(\alpha, R, a, c) = 0 \quad (3.15)$$

の形にかける。もっと具体的に、実数部と虚数部に分けて書けば

$$Aa - Bc + C = 0 \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [\{a, a\} B^2 - 2\{a, b\} AB + \{b, b\} A^2] a^2 - [\{a, b\} BC - \{b, b\} CA \\ & + \{b, c\} AB - \{c, a\} B^2] a + \frac{1}{2} [\{c, c\} B^2 - \{b, c\} BC + \frac{1}{2} \{b, b\} C^2 \\ & - \frac{1}{(\alpha R)^2} B^2 D] = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる。ただし

$$\left. \begin{aligned} \{a, a\}(\alpha) &= \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} \\ a_{10} & b_{11} \end{vmatrix} = a_{00} b_{11} + a_{11} b_{00} - a_{01} b_{10} - a_{10} b_{01} \\ & \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (3.18) \\ A(\alpha) = \{a, d\}, \quad B(\alpha) = \{b, d\}, \quad C(\alpha) = \{c, d\}, \quad D(\alpha) = \{d, d\} \end{aligned}$$

で $\{a, a\}, \dots, A, B, C, D$ は $\alpha^2 R^4$ の関数である。 (3.16), (3.19)

より C を消去すれば、一般に α, R, a の関数 G

$$G(\alpha, R, a) = 0 \quad (3.18)$$

える。 α はその式の形から実数でなければならぬ。(3.19) は α について二次方程式であり、 (α, R) とした場合その二つ面は一つの实根が中立解を表すものと考へられる。今 (α, R, α) の三次空間を考へれば中立解は一つの曲面でなければならぬ。一つの实根は、中立解があるかないかを表わす (α, R) 面における境界である。我々は二の曲面を“中立曲面”、この曲線を“中立曲线”と呼ぶ。中立曲线は(3.19)の实根、すなわち判別式を0とおいてえられ。C-1注($S=0$) H-P 注($S=1$) について各々

$$R = 7.02997 \frac{\sqrt{(\alpha^2 + 0.719043)(\alpha^2 - 9.33739)(\alpha^4 + 6\alpha^2 + 31.5)(\alpha^4 + 22\alpha^2 + 247.5)}}{\alpha(\alpha^2 - 108.854107)} \quad (S=0) \quad (3.19)$$

$$R = 211.8798 \sqrt{J_1 J_2 / (\bar{\alpha}^2 J_0)} \quad \bar{\alpha} = \alpha/10$$

$$\left. \begin{aligned} J_0 &= -\bar{\alpha}^{20} - 2.394666\bar{\alpha}^{18} - 2.212444\bar{\alpha}^{16} - 0.53979591\bar{\alpha}^{14} \\ &\quad + 0.68868710\bar{\alpha}^{12} + 0.57925386\bar{\alpha}^{10} + 0.14376370\bar{\alpha}^8 \\ &\quad - 0.011912878\bar{\alpha}^6 - 0.0084071719\bar{\alpha}^4 - 0.00021999407\bar{\alpha}^2 \\ &\quad + 0.00014294409 \\ J_1 &= \bar{\alpha}^{16} + 2.3016486\bar{\alpha}^{14} + 2.7028169\bar{\alpha}^{12} + 1.8445491\bar{\alpha}^{10} \\ &\quad + 0.77288948\bar{\alpha}^8 + 0.17438359\bar{\alpha}^6 + 0.013477614\bar{\alpha}^4 \\ &\quad - 0.0016373684\bar{\alpha}^2 - 0.00024585671 \\ J_2 &= \bar{\alpha}^8 + 1.408\bar{\alpha}^6 + 1.1904\bar{\alpha}^4 + 0.3096576\bar{\alpha}^2 \\ &\quad + 0.037158912 \end{aligned} \right\} \quad \begin{matrix} (S=1) \\ (3.20) \end{matrix}$$

がえられ。これらから3, 4個に示してある。

中立曲面を

$$\left. \begin{aligned} G(\alpha, R, E) &= 0 \\ E &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) dy & S=0 \\ E &= \pi \int_0^1 (\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2) r dr & S=1 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

の形に書き直すが、もっと物理的にわかり易い形である。ここで E は擾乱のエネルギーの空間平均である。中立曲面は C -流について大抵 2 図のようになり、その $R = \text{const.}$ における断面は図 5 図に示されている。 H -流についてはまだ計算が完了していない。

臨界 Reynolds 数 R_{cr} 、その状態での波数 α_{cr} は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} R_{cr} &= 45, 212 \\ \alpha_{cr} &= 13, 565 \end{aligned} \right\} \quad S=0 \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{cr} &= 655 \\ \alpha_{cr} &= 5.8 \end{aligned} \right\} \quad S=1 \quad (3.23)$$

ここで C -流については、半巾、相対速度の半巾、 H - P 流については直径と平均速度によって Reynolds 数がつけられている。

§ 4. おまけ

この論文では、流体力学における不安定性の非線形問題については述べたが、著者のあつかった場合に限られている。 Meksyn & Stuart,⁷⁾ Stuart,⁹⁾ Watson,¹¹⁾ Gotoh⁴⁾ Benny & Lin¹⁻³⁾ 等のあつたことを附記しておく。

ここで行われた近似法において省略される項は、higher harmonics

し higher modes $\varphi_2, \varphi_3, \dots$ であり。前者は層中の大きいところ
で、後者は R が大きい所で大きいと思われる。

この解析では αR が非常に大きいという結果がでた。それ故
うっね性層と仮定する方がよさそうに思われる。しかし、その場合
は、 $d^4\varphi/dy^4$ が大きいことが仮定されている。我々の場合には、 α が
小程度になり、 d^4/dx^4 の項から出てくる α^4 の項が $d^4\varphi/dy^4$ の項にく
らべてずっと小さい効果をもち、事情はとらえている。円形理論の場
合に α が小さいことは、平均流の方向の長い渦の存在を表し、我々の場合
に α が大きいことは、流れに垂直な方向の長い渦の存在を表す。つまり
後者では、流れに垂直な方向の mixing が変わっていることを示して
いる。

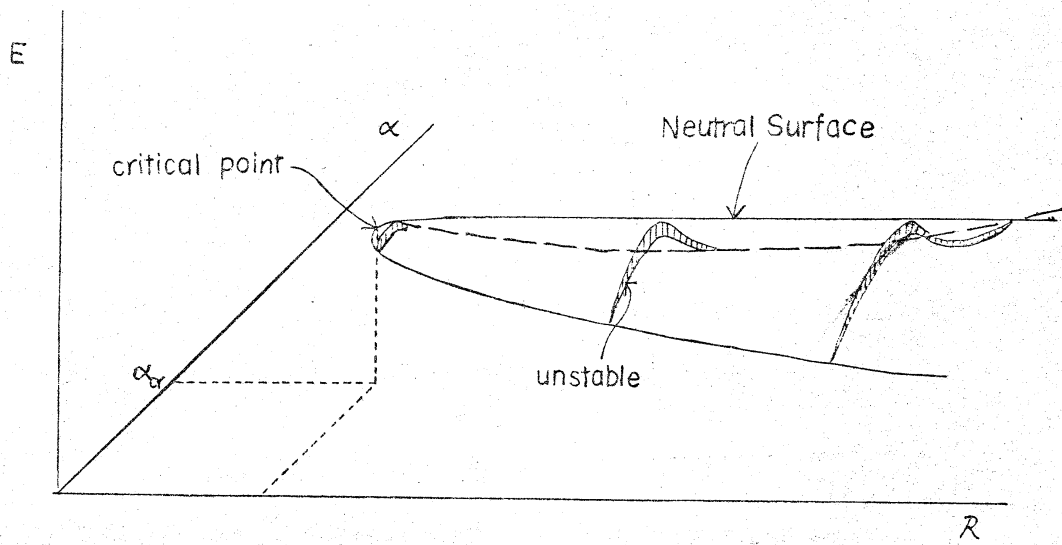
H-P 流について、 $e^{i\theta}$ に比例する (θ は方位角) 軸対称である擾乱
が軸対称の擾乱より不安定である可能性がある。これに対する解析も後
で、やる必要があると思われる。

C-流、H-P 流においては、擾乱の平均流に対する反作用が不安定性
に重大な効果をもつ、以上の解析がその本質を十分つかんでいると考
えられる。

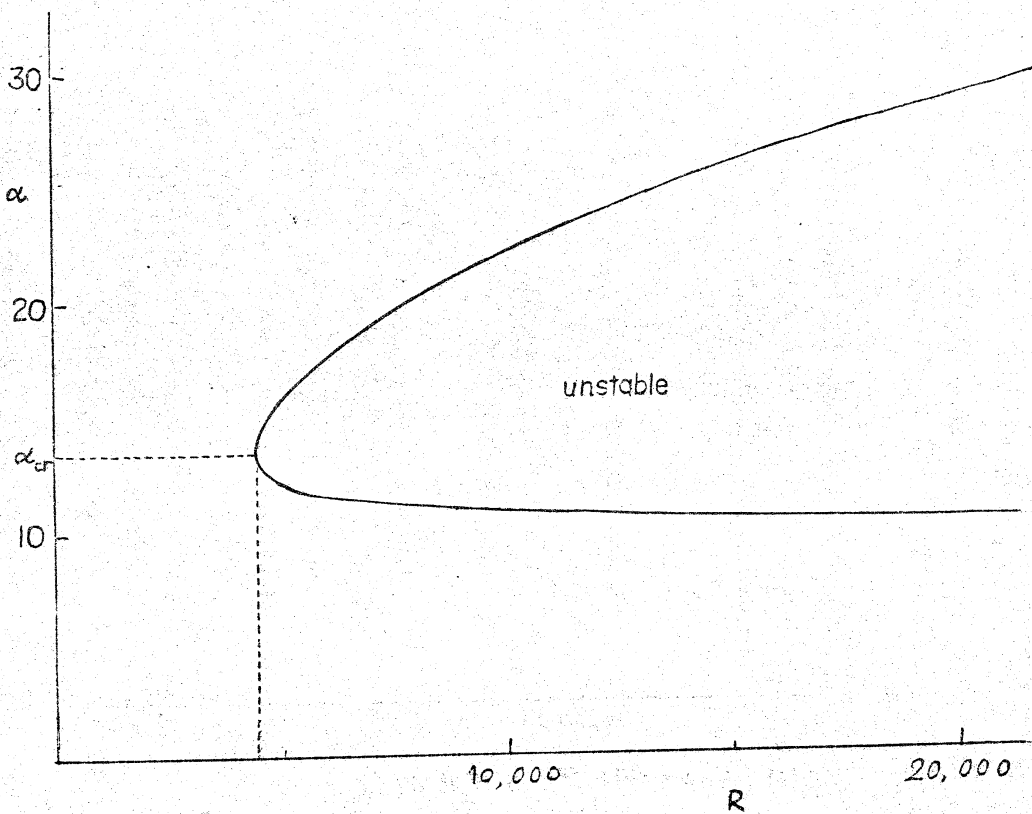
参考文献:

- 1) Benny, D. J. : JFM 10 (1961) 209
- 2) Benny, D. J. : Phys FL. 7 (1964) 319.
- 3) Benny, D. J. & C.C. Lin : Phys FL. 3 (1960) 656.

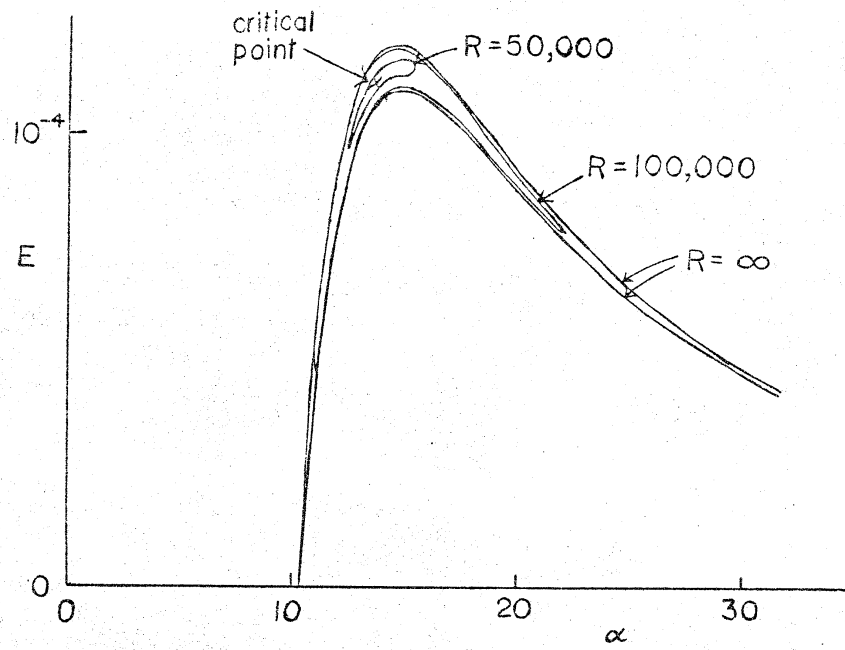
- 4) Gekko, K. : 物理学分科会 (応用力学) 予稿集 (1963)
- 5) Lin, C. C. : *Hydrodynamic stability*, Cambr. Univ. Press
- 6) Lin, C. C. : *Boundary Layer Res. Symp.* (1957, Freiburg)
ed. by H. Görtler, 144-60.
- 7) Meksyn, D. & J. T. Stuart : *Proc. Roy. Soc. A* 208
(1951) 517-26.
- 8) Schada, H. : *Phys. FL* 7 (1964) 623.
- 9) Stuart, J. T. : *JFM* 9 (1960) 353.
- 10) Stuart, J. T. : *Applied Mechanics*, *Proc. 10th Congr. of Appl. Mech.* (1960, Stresa) ed. by Rolla, F. & W. T. Koiter, 63
- 11) Watson, J. : *JFM* 9 (1960) 371.



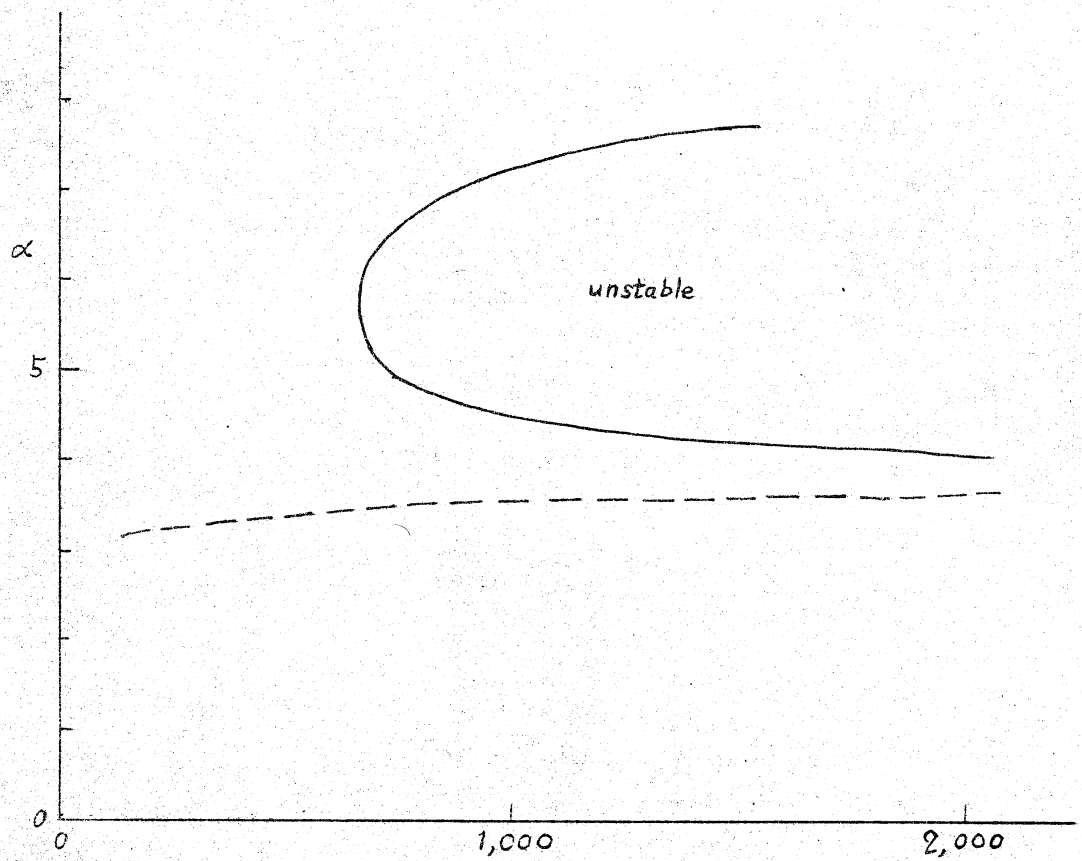
第2図 中立曲面 (平面 Couette 流)



第3図 平面 Couette 流の中立曲線



才5図 中立曲面の断面 (平面 Couette 流)



才4図 Hagen-Poiseuille 流の中立曲線 R