

非線形回路の数学的アプローチについて.

豊田工専 伊藤敏和

§ 0. はじめに

我々は, ここで非線形回路の方程式をある種の変分問題としてとらまえようと思う。それはかつて解析力学等で H. Poincaré のやったことを E. Cartan がより幾何学的に考察したように……。

けれどもここでは F. Takens が 1974 年に Warwick での Dynamical Systems のシンポジウムで話した内容をもとにして述べる。それは L.C. network についての回路方程式の解を変分問題の解としてとらまえている。

(1) F. Takens ; Geometric Aspects of Non-linear
R.L.C. Networks, Dynamical Systems
— Warwick 1974.

(2) S. Smale ; On the mathematical foundations of
electric circuit theory, J. Diff. Geometry
7 (1972) 193—210

(3) E. Cartan ; 外微分形式の理論

§ 1.

G を L.C. network N のグラフとし, $e_1, \dots, e_n$ は capacitor branch, $e_{n+1}, \dots, e_s$ は coil branch とする。

S. Smale が (2) でや, たようにかくと

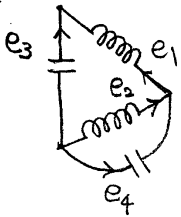
$$(1) \begin{cases} \partial; C_1(G; R) \longrightarrow C_0(G; R) \\ \partial^*; C^0(G; R) \longrightarrow C^1(G; R) \end{cases}$$

なる記号のもとに Telegen の定理は $\text{Im } \partial^*(\text{Ker } \partial) = 0$ となる。 $V_0 = \text{Ker } \partial$ において, 我々は V_0 を Kirchhoff space という。

我々は (1) をより抽象的にあつかう。それは次のようである。

W を $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_s$ を base にもつ R 上の s -dim. vector space とする。そして V_0 を W の vector subspace とする。又, W^* を W の dual space, $V_0^\perp$ を V_0 の直交補空間とする。

例



$$W \ni w = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i$$

$$V_0 = \left\{ \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i \in W \mid \begin{array}{l} \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{array} \right\}$$

だから V_0 の coordinate は $\beta_1 = \alpha_1|_{V_0}$, $\beta_2 = \alpha_2|_{V_0}$ ととれる。i.e. $(\beta_1, \beta_2) \in V_0$ は W 内では

$$\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 - \beta_1 e_3 + (\beta_1 - \beta_2) e_4$$

$W^*/V_0^\perp$ の coordinate は $\partial^*\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i^*\right) = (\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_4 - \alpha_2)$ となる。

$$(2) \begin{cases} \partial; W \longrightarrow W/V_0 & \text{canonical projection} \\ \partial^*; W^* \longrightarrow W^*/V_0^\perp & \text{"} \end{cases}$$

として, ∂, ∂^* を定義する。さらに, 我々は回路の方程式を求めるために記号を準備する。

$$C_i; \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{smooth function}$$

$$L_j; \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad (n+1 \leq j \leq s) \quad \text{"}$$

さらに, 正の定数 a_i, a_j が存在して, $C_i > a_i, L_j > a_j$ を満たすと仮定する。

定義 1.

L.C. 回路 N の解とは次の性質をみたす smooth maps $(I(t), V(t))$ である。

$$I; \mathbb{R}^1 \longrightarrow W, \quad I(t) = \sum_{i=1}^s I_i(t) e_i$$

$$V; \mathbb{R}^1 \longrightarrow W^*, \quad V(t) = \sum_{i=1}^s V_i(t) e_i^*$$

であり以下の関係式 (a), (b) をみたす。

$$(a) \quad \partial I \equiv 0, \quad \partial^* V \equiv 0$$

$$(b) \quad (i) \quad \frac{dV_i}{dt} = \frac{1}{C_i(V_i)} I_i \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$(ii) \quad V_j = L_j(I_j) \frac{dI_j}{dt} \quad n+1 \leq j \leq s$$

次に我々は上で定義した回路の方程式もある種の変分問題の解としてとらえるために, 記号を導入する。

$$E_i; \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad \text{smooth map} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$K_j; \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1 \quad \text{smooth map} \quad (n+1 \leq j \leq s)$$

を次のように定義する。

$$E_i(0) = E_i'(0) = 0, \quad E_i''(u) = \frac{1}{C_i(y(u))}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^1$$

$$K_j(0) = K_j'(0) = 0, \quad K_j''(u) = L_j(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}^1$$

そこで、 y は次のようにして定義された函数である。

$$g_i(u) = \int_0^u C_i(t) dt \quad \text{と定義すると } C_i(t) > a_i > 0 \text{ より}$$

$g_i'(u) > 0$ だから global に逆函数が定義できる。それを y とおく。 i.e. $g_i(y(u)) = u, \quad y(g_i(u)) = u.$

さらに、我々は capacitor のところでは電荷量 $Q_i(t)$ と電流 I_i との間には $\frac{dQ_i}{dt} = I_i$ なる関係があることに注意して以下のようなものを考える。

定義 2. $Q; \mathbb{R} \longrightarrow W$ smooth map

$$Q(t) = \sum_{i=1}^s Q_i(t) e_i \quad \text{で次の性質をもつ}$$

$$(A) \begin{cases} (1) \quad \partial \left(\sum_{i=1}^s Q_i'(t) e_i \right) \equiv 0 \\ (2) \quad \partial^* \left(\sum_{i=1}^n E_i'(Q_i(t)) e_i^* + \sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j'(t)) \cdot Q_j''(t) e_j^* \right) \equiv 0 \end{cases}$$

(注意)

$Q_i(t) \quad (1 \leq i \leq n)$ は電荷量として物理的な意味はあ

るが, $Q_j(t)$ ($n+1 \leq j \leq s$) は $\frac{dQ_j}{dt} = I_j$ とみた時に意味があるゆえ, 回路の方程式の解とみようとすると定数項の自由度がでる。

ここで, 我々は定義1と定義2の関係をみる。

まず, I, V が定義1によって決められたものとする。

このとき $Q_i(t) = \int_0^{V_i(t)} C_i(t) dt$ ($1 \leq i \leq n$) と定義し, $Q_j(t)$

($n+1 \leq j \leq s$) を $\frac{dQ_j}{dt} = I_j$ の解として定義する。定数項は任意に決める。すると $Q_i'(t) = C_i(V_i(t)) \cdot V_i'(t) = I_i(t)$ となる。だから $\partial I \equiv 0$ より (A) の (1) がいえる。一方 $\frac{dV_i}{dt}$

$$\equiv \frac{1}{C_i(V_i)} I_i = E_i''(Q_i(t)) \cdot Q_i'(t) = (E_i'(Q_i(t)))'$$

$$\therefore V_i(t) = E_i'(Q_i(t)) \text{ となる。又 } V_j(t) \equiv L_j(I_j(t)) \frac{dI_j}{dt} \\ = K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) \text{ となるから, (A) の (2) がいえる。}$$

よって定義1ならば定義2がいえた。逆に $Q(t)$ が定義2をみたすとする。この時 $I_i = Q_i'$, $I_j = Q_j'$ とおき, $V_i(t) = E_i'(Q_i(t))$, $V_j(t) = K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t)$ とおけば, 明らかに (a), (b) を満足する。よって定義2ならば定義1がいえた。

以上をまとめると, 定義1と2とはある意味で同値であるそれは $(s-n)$ 次元の自由度を無視すればである。このことは後でも一度ふれることにする。

(記号) $W_C = \{e_1, \dots, e_n\}$, $W_L = \{e_{n+1}, \dots, e_s\}$ なる W の subspace とする。 $c \in W/V_0$ に対して $\varphi^{-1}(c) = V_c$ とおく。

そこで今 Q が定義 2 をみたしたとすると, (A) の (1) から

$$\partial(Q(t)) = c \in W/V_0 \quad (\text{constant}) \quad \text{となるから, } Q(\mathbb{R}^1) \subset V_c$$

となる。一方 (A) の (2) より $\sum_{i=1}^m E'_i(Q_i(t)) e_i^* + \sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j'(t))$

$$\cdot Q_j''(t) e_j^* \in V_0^\perp. \quad \text{従って} \quad \sum_{i=1}^m E'_i(Q_i(t)) e_i^* \in W_C^\perp + V_0^\perp \\ \subset (W_C \cap V_0)^\perp.$$

定義 3

$$W \cap S = \left\{ \sum_{i=1}^s g_i e_i \in W \mid \sum_{i=1}^m E'_i(g_i) e_i^* \in (W_C \cap V_0)^\perp \right\}$$

とおく。

Lemma 1

S は smooth submanifold of W , $p \in S$

$$T_p(S) \oplus (W_C \cap V_0) = W$$

定義 4

$\mathcal{L}_*; T(W) \longrightarrow \mathbb{R}$ を次のように決める。

$$\mathcal{L}_*(g_1, \dots, g_s, \dot{g}_1, \dots, \dot{g}_s) = \sum_{i=1}^m E_i(g_i) - \sum_{j=n+1}^s K_j(\dot{g}_j)$$

Theorem 2

$c \in W/V_0$, $Q; \mathbb{R} \longrightarrow (S \cap V_c) \subset W$ smooth map.

Q が (A) の解 $\iff Q$ が $(\mathcal{L}_*, S \cap V_c)$ の変分問題の解。

(証明)

$$\tilde{Q}(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^s \tilde{Q}_i(t, \varepsilon) e_i \in S \cap V_c$$

は次の性質をもつものとする。

$$\tilde{Q}(t, 0) = Q(t)$$

$$\tilde{Q}(t, \varepsilon) = Q(t) \quad \text{if } t \notin K$$

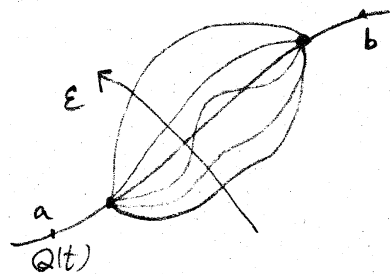
ただし K は $\mathbb{R}^1$ の compact interval. $(a, b) \supset K$ とする。

$$F(\varepsilon) = \int_a^b L_*(\tilde{Q}(t, \varepsilon), \tilde{Q}'(t, \varepsilon)) dt \quad (t \in K \text{ かつ } \varepsilon \neq 0)$$

とおく。

$$F'(0) = \frac{dF}{d\varepsilon}(0) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^m E_i'(Q_i(t)) \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t, 0) + \sum_{j=1}^s K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) \frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t, 0) \right) dt$$

となる。

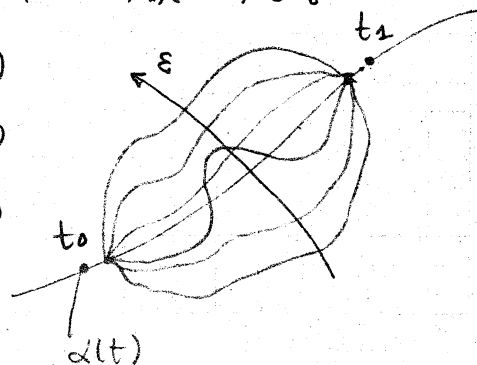


よく知られてゐる質点系の運動の決定を変分法の問題の解決に帰着させることを思い出そう。

一つの力の函数から導かれる力を受けてゐる自由質点の場合を考える。

$U = U(x, y, z, t)$ はポテンシャル函数とする。

$$\alpha(t, \varepsilon) = \begin{cases} x = x(t, \varepsilon) \\ y = y(t, \varepsilon) \\ z = z(t, \varepsilon) \end{cases} \quad \alpha(t) = \begin{cases} x(t) = x(t, 0) \\ y(t) = y(t, 0) \\ z(t) = z(t, 0) \end{cases}$$



まず Q が (A) の解とする。定義3の前で述べたことより,

$$\begin{aligned} Q(R^1) &\subset S \cap V_0. \text{ そして, 上で定義した } \tilde{Q}(t, \varepsilon) \in S \cap V_0 \\ (V(t, \varepsilon)) &\text{ は } \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \varepsilon}(t, \varepsilon) \in V_0 \text{ となることから, } \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t, 0) e_i \\ &+ \sum_{j=n+1}^s \frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t, 0) e_j \in V_0, \text{ 一方 (A) の (2) より } \sum_{i=1}^n E'_i(Q_i(t)) e_i^* \\ &+ \sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) e_j^* \in V_0^\perp \text{ より, } \sum_{i=1}^n E'_i(Q_i(t)) \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial \varepsilon} \\ &+ \sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) \cdot \frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \varepsilon} \equiv 0. \text{ よって } F'(0) = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon}(0) \end{aligned}$$

$= 0$ となり, Q は $(L_*, S \cap V_0)$ の解である。

逆に Q が $(L_*, S \cap V_0)$ の変分問題の解とせよ。任意の

$\tilde{Q}(t, \varepsilon) \in S \cap V_0$ に対して $F'(0) = 0$ がいえる。

作用量 F を考える。

$$F(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \right] dt$$

ここで, m は質量を x', y', z' はそれぞれ $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}$ を表わすとする。我々は $F'(0) = \frac{dF}{d\varepsilon}(0)$ を求める。

$$\begin{aligned} F'(0) = \int_{t_0}^{t_1} &\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \right. \\ &\left. \cdot \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \right] dt. \end{aligned}$$

すなわち, $\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n E_i'(Q_i(t)) \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t, 0) + \sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) \frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t, 0) \right)$

$dt = 0$. したがって

$$(*) \quad \sum_{i=1}^n E_i'(Q_i(t)) \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t, 0) + \sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j'(t)) Q_j''(t) \frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t, 0) \equiv 0$$

が任意の $\tilde{Q}_i(t, \varepsilon) \in S \cap V_0$ に対して成立する。 $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \varepsilon}(t, 0) \in V_0$ になることは S の定義に注意すれば $\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \varepsilon}(t, 0)$ を

$W_0 \cap V_0$ にとり, かつ $W_0 \cap V_0$ 内をうごかす。

$$\sum_{i=1}^n E_i'(Q_i(t)) \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial \varepsilon}(t, 0) \equiv 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n E_i'(Q_i(t)) e_i^* \in (W_0 \cap V_0)^\perp$$

一方 $Q(R^1) \subset S$ より $\sum_{i=1}^n E_i'(Q_i) e_i^* \in (W_0 \cap V_0)^\perp$

が成立するから, (*) は $\sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j') Q_j'' \frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \varepsilon}(t, 0) \equiv 0$

ゆえに

$$F'(0) = 0 \iff \begin{cases} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \quad \text{が成り立つ。}$$

さらに, これを次のように書きなおす。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x' \\ \frac{dy}{dt} = y' \\ \frac{dz}{dt} = z' \end{cases}, \quad \begin{cases} m \cdot \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \\ m \cdot \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} \\ m \cdot \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

となる。又 $\sum_{j=n+1}^s \frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \tilde{z}}(t, 0) e_j \in W_L \cap V_0 \neq 0$,

$$\sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j') Q_j'' \cdot e_j^* \in (W_L \cap V_0)^\perp$$

$$\text{よって } \sum_{i=1}^n E_i'(Q_i) e_i^* + \sum_{j=n+1}^s K_j''(Q_j') Q_j'' e_j^* \in V_0^\perp$$

ゆえに, Q は (A) の解である。 (p. e. d)

ここで我々は p4~5 にかけて注意したことにもどろう。
それは変分問題の解としてとらえるために, 物理的な意味は
ないけれども $Q_j(t)$ ($n+1 \leq j \leq s$) を導入した。他方 $Q_i(t)$
 $Q_i'(t)$ ($1 \leq i \leq n$), $Q_j'(t)$ ($n+1 \leq j \leq s$) は回路から決まる。

また $T(\mathbb{R}^3) \longrightarrow T^*(\mathbb{R}^3)$ の対応が $X = a_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + a_3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$ に対して $\omega = m a_1(x, y, z) dx + m a_2(x, y, z) dy + m a_3(x, y, z) dz$ をとるようになっていることに注意すれば

$$T^*(\mathbb{R}^3) \text{ 上の coordinate } (x, y, z, p_1, p_2, p_3) \text{ に対して,}$$

$$X = \frac{p_1}{m} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{p_2}{m} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{p_3}{m} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p_2} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p_3}$$

なる $T^*(\mathbb{R}^3)$ 上の vector field を定義する。一方, $T^*(\mathbb{R}^3)$

には自然な symplectic structure $\Omega = dx \wedge dp_1 + dy \wedge dp_2 + dz \wedge dp_3$

が入る。すると $X \lrcorner \Omega = d[\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U]$ となるこ

とから, X は Hamilton vector field になる。

$$\left(p_1 = m x', p_2 = m y', p_3 = m z' \text{ より } \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + U \right. \\ \left. = \frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + U \text{ となる。} \right)$$

そこで、我々は次のようなものを考える。

$$T(W) \supset \mathcal{Q} = \{ (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \in T(W) \mid \bar{q} \in S, (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \in T(S \cap V_0) \}$$

さらに $\mathcal{Q}$ に次のような同値関係を入れる。

$$(\bar{q}, \dot{\bar{q}}), (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \in \mathcal{Q} \text{ に対して } (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \sim (\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \text{ とは,}$$

$$\bar{q}_i = \bar{q}_i \quad (1 \leq i \leq n), \quad \dot{\bar{q}}_k = \dot{\bar{q}}_k \quad (1 \leq k \leq s)$$

そして $\mathcal{Q}/\sim = \tilde{\mathcal{Q}}$ を考えると、上で注意した物理的に意味のないところが無視される。

次に $(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) \in \mathcal{Q}$ に対して $Q; (U, 0) \rightarrow (W, \bar{q})$ を方程式 (A) の解とする。ただし $0 \in U \subset \mathbb{R}^1$, $Q(0) = \bar{q}$, $Q'(0) = \dot{\bar{q}}$.

そして、 $X(\bar{q}, \dot{\bar{q}})$ は $t \rightarrow (Q(t), Q'(t)) \in \mathcal{Q}$ で定義される $\mathcal{Q}$ 上の vector field とし、それを $\tilde{\mathcal{Q}}$ 上に自然に projection したものを $\bar{X}$ とかけば、次の命題が成立する。

Proposition 3

$\bar{X}$ の integral curves と 方程式 (A) の解とは 1対1に対応する。

Theorem 4

$\tilde{\mathcal{Q}}$, $\bar{X}$ を上記のようとする。

$I; \tilde{\mathcal{Q}} \longrightarrow (W/V_0)_{\cap W_L} \oplus (W_L \cap V_0)^*$ を下記のように定義すると、次のことがいえる。

(1) $\bar{X}$ の積分曲線を $\lambda; \mathbb{R}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}$ とすれば $I \circ \lambda$ は定数である。(i.e. I は $\bar{X}$ の first integrable である。)

(2) 各 $(c_1, c_2) \in \left((W/V_0) / \partial W_L \right) \oplus (W_L \cap V_0)^*$ に対して, $I^{-1}(c_1, c_2)$ は自然な symplectic structure をもち, $\bar{X}|_{I^{-1}(c_1, c_2)}$ はこの symplectic structure に関して Hamiltonian vector field である。

I の定義.

$[(z, \dot{z})] \in \tilde{\mathcal{Q}}$, $(z, \dot{z}) \in \mathcal{Q}$ に対して $\partial \mathcal{Q} \bmod \partial W_L$ であって $(W/V_0) / \partial W_L$ の元を定義する。

また $-\sum_{j=n+1}^s K'_j(\dot{z}_j) e_j^* \Big|_{W_L \cap V_0} \in (W_L \cap V_0)^*$ を対応させる。

最後に

$$(3) \dim \left((W/V_0) / \partial W_L \oplus (W_L \cap V_0)^* \right) = h_\lambda + h_\lambda^*$$

$$\dim(I^{-1}(c_1, c_2)) = 2(h - h_Y - h_\lambda) = 2(h^* - h_Y^* - h_\lambda^*)$$

が成立する。

ただし, $h = \dim(V_0)$ (i.e. $\dim H_1(G; \mathbb{R})$), $h_Y = \dim(V_0 \cap W_C)$ (i.e. $\dim H_1(G_C; \mathbb{R})$), $h_\lambda = \dim(V_0 \cap W_L)$ (i.e. $\dim H_1(G_L; \mathbb{R})$) とおく。又 h^*, h_Y^*, h_λ^* は dual なもの。