

半導体のモデル方程式の階層構造

鈴木 政尋 (東京工業大学)
西畑 伸也 (東京工業大学)

1 序

半導体中の電子流を記述するモデル方程式として, Heat-conductive hydrodynamic model (HHD モデル), Energy-transport model (ET モデル), Drift-diffusion model (DD モデル) 等の方程式系が提案され, デバイスの使用用途に応じて, 設計の際シミュレーションに利用されている. 従って, これらのモデル方程式間の関係 (階層構造) の解析は, 数学的に興味深いだけでなく, 工学的にも重要な問題である. この関係は, モデル方程式に含まれる物理係数である緩和時間を形式的に零に近づける極限操作 (緩和極限) によって説明できる. 本稿では, これらのモデルの解の長時間挙動及び緩和極限に関する研究結果 [13, 14] を概説する.

HHD モデルは次の方程式系で与えられる.

$$\rho_s + m_x = 0, \quad (1.1a)$$

$$m_s + \left(\frac{m^2}{\rho} + \rho\theta \right)_x = \rho\phi_x - \frac{m}{\tau_m}, \quad (1.1b)$$

$$\rho\theta_s + m\theta_x + \frac{2}{3} \left(\frac{m}{\rho} \right)_x \rho\theta - \frac{2}{3} (\kappa\theta_x)_x = \frac{2\tau_e - \tau_m}{3\tau_m\tau_e} \frac{m^2}{\rho} - \frac{\rho}{\tau_e} (\theta - \bar{\vartheta}), \quad (1.1c)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (1.1d)$$

ここで, ρ, j, θ, ϕ は未知関数であり, それぞれ, 電子密度, 電流密度, 絶対温度, 電位を表す. また, $\bar{\vartheta}, \kappa, \tau_m, \tau_e$ は, 室温, 熱伝導係数, モーメントの緩和時間, エネルギーの緩和時間を表す正定数である. なお, 物理的には緩和時間は関係 $\tau_m < \tau_e$ を満たす. ドーピング・プロファイル $D(x)$ は半導体中に固定されている正イオンの分布を表す関数であり, MOSFET などの典型的なデバイスでは深い谷のような形状をしている. ここでは, D に対して有界連続性と正值性を仮定する.

$$D \in \mathcal{B}^0(\bar{\Omega}), \quad \inf_{x \in \bar{\Omega}} D(x) > 0. \quad (1.2)$$

半導体デバイスは極微小である為, 有界領域 $\Omega := (0, 1)$ 上で方程式系 (1.1) を考察

し、次の境界条件を課す.

$$(\rho, m, \theta)(0, x) = (\rho_0, m_0, \theta_0)(x), \quad (1.3)$$

$$\rho(t, 0) = \rho_l > 0, \quad \rho(t, 1) = \rho_r > 0, \quad (1.4)$$

$$\theta_x(t, 0) = \theta_x(t, 1) = 0, \quad (1.5)$$

$$\phi(t, 0) = 0, \quad \phi(t, 1) = \phi_r \geq 0. \quad (1.6)$$

ここで, ρ_l, ρ_r, ϕ_r は正定数である. 方程式 (1.1d) を解いて, 電圧 ϕ を表す公式が得られる.

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \Phi[\rho](t, x) \\ &:= \int_0^x \int_0^y (\rho - D)(t, z) dz dy + \left(\phi_r - \int_0^1 \int_0^y (\rho - D)(t, z) dz dy \right) x. \end{aligned} \quad (1.7)$$

さらに, 初期値・境界値問題 (1.1), (1.3)–(1.6) の古典解を構成する為, 境界 $x = 0$, $x = 1$ で両立条件が成り立つとする. すなわち,

$$\rho_0(0) = \rho_l, \quad \rho_0(1) = \rho_r, \quad (1.8a)$$

$$\theta_{0x}(0) = \theta_{0x}(1) = 0, \quad (1.8b)$$

$$m_{0x}(0) = m_{0x}(1) = 0. \quad (1.8c)$$

初期値に対しては, 亜音速条件及び, 密度と温度の正值性を仮定する.

$$\inf_{x \in \Omega} \rho_0 > 0, \quad \inf_{x \in \Omega} \theta_0 > 0, \quad \inf_{x \in \Omega} \left(\theta_0 - \frac{m_0^2}{\rho_0^2} \right) > 0.$$

以上の条件下で初期値・境界値問題 (1.1), (1.3)–(1.6) は可解となり, 初期値 (ρ_0, m_0, θ_0) の近傍で時間局所解 (ρ, m, θ, ϕ) が一意的に存在し, やはり亜音速条件及び, 密度と温度の正值性を満たす.

$$\inf_{x \in \Omega} \rho > 0, \quad (1.9a)$$

$$\inf_{x \in \Omega} \theta > 0, \quad (1.9b)$$

$$\inf_{x \in \Omega} \left(\theta - \frac{m^2}{\rho^2} \right) > 0. \quad (1.9c)$$

記号. 非負の整数 $i \geq 0$ に対して, $H^i(\Omega)$ は Sobolev 空間であり, ノルムを $\|\cdot\|_i$ と書く. $H^0 = L^2$ であり, ノルムは $\|\cdot\| := \|\cdot\|_0$ とする. 非負の整数 $k, i \geq 0$ に対して, $C^k([0, T]; H^i(\Omega))$ は $H^i(\Omega)$ に値を取り $[0, T]$ 上において k 階連続微分可能な関数の空間を表す. また, $H^k(0, T; H^i(\Omega))$ は $H^i(\Omega)$ に値を取り $(0, T)$ 上で $k - 1$ 階絶対

連続微分可能で、 k 階までの導関数が L^2 可積分関数となる関数の空間を表す。非負の整数 $i \geq 0$ に対して、 $B^i(\Omega)$ は i 階微分可能でその導関数が有界連続である関数の空間を表す。関数空間 $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}_i^j([0, T]) &:= \bigcap_{k=0}^i C^k([0, T]; H^{j+i-k}(\Omega)), \quad \mathfrak{X}_i([0, T]) := \mathfrak{X}_i^0([0, T]), \\ \mathfrak{Y}([0, T]) &:= C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C([0, T]; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega)), \\ \mathfrak{Z}([0, T]) &:= C([0, T]; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)).\end{aligned}$$

2 ET モデル及び DD モデルの形式的導出

ET モデル及び DD モデルは、形式的な極限操作により方程式系 (1.1) から導出される。まず、方程式系 (1.1) でスケール変換

$$s := \frac{t}{\tau_m}, \quad j := \frac{m}{\tau_m}, \quad \varepsilon := \tau_m^2, \quad \zeta := \tau_m \tau_e, \quad \kappa_0 := \frac{\kappa}{\tau_m}$$

を行い、次の方程式系を得る。

$$\rho_t + j_x = 0, \tag{2.1a}$$

$$\varepsilon j_t + \left(\varepsilon \frac{j^2}{\rho} + \rho \theta \right)_x = \rho \phi_x - j, \tag{2.1b}$$

$$\rho \theta_t + j \theta_x + \frac{2}{3} \left(\frac{j}{\rho} \right)_x \rho \theta - \frac{2}{3} \kappa_0 \theta_{xx} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3\zeta} \right) \frac{j^2}{\rho} - \frac{\rho}{\zeta} (\theta - \bar{\vartheta}), \tag{2.1c}$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \tag{2.1d}$$

方程式系 (2.1) の初期値は、(1.3) から導かれる。

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \tag{2.2a}$$

$$j(0, x) = j_0(x) := m_0/\tau_m(x), \tag{2.2b}$$

$$\theta(0, x) = \theta_0(x). \tag{2.2c}$$

また、亜音速条件 (1.9c) は次のように書き換えられる。

$$\inf_{x \in \Omega} \left(\theta - \varepsilon \frac{j^2}{\rho^2} \right) > 0. \tag{2.3}$$

従って、緩和時間 $\tau_m = \sqrt{\varepsilon}$ を十分小さくすることにより、温度の正值性 (1.9b) から亜音速条件 (2.3) が従う。

方程式系 (2.1) で, 形式的にパラメータ ε を零として, ET モデルが得られる.

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (2.4a)$$

$$\rho\theta_t + j\theta_x + \frac{2}{3}\left(\frac{j}{\rho}\right)_x \rho\theta - \frac{2}{3}\kappa_0\theta_{xx} = \frac{2}{3}\frac{j^2}{\rho} - \frac{\rho}{\zeta}(\theta - \bar{\vartheta}), \quad (2.4b)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (2.4c)$$

このとき, 電流密度は

$$j = \rho\phi_x - (\theta\rho)_x \quad (2.4d)$$

となる. ET モデル (2.4) に対する初期値及び境界値は (1.4)–(1.6), (2.2a), (2.2c) で与えられる. さらに, 方程式系 (2.4b) を ζ 倍したのち, $\zeta = 0$ を代入して, DD モデルが得られる.

$$\rho_t + j_x = 0, \quad (2.5a)$$

$$\phi_{xx} = \rho - D. \quad (2.5b)$$

電流密度は

$$j = \rho\phi_x - (\bar{\vartheta}\rho)_x \quad (2.5c)$$

で与えられる. DD モデル (2.5) の初期値及び境界値は (1.4), (1.6), (2.2a) で与えられる. これらの関係は次図にまとめられる.

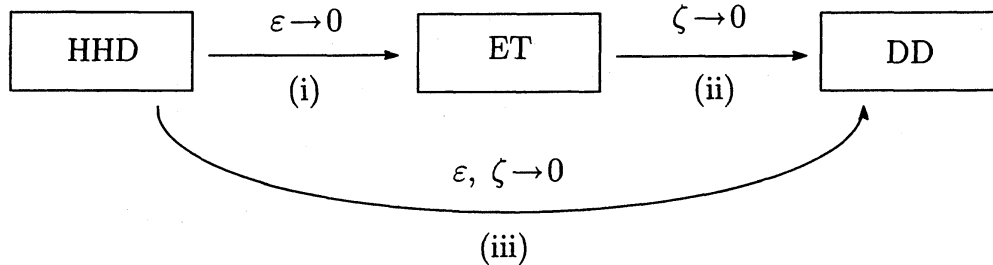


図 1: 階層構造

第 3, 4, 5 節では, HHD モデル, ET モデル, DD モデルの定常解の一意的存在と漸近安定性に関する研究成果をそれぞれ述べ [13, 14], 併せて既存の研究結果を紹介する. 第 6 節では緩和極限の数学的正当化に関する結果を述べる. 具体的には,

- (i) ε を 0 に近づけたとき, HHD モデルの時間大域解が ET モデルの時間大域解に収束すること
- (ii) ζ を 0 に近づけたとき, ET モデルの時間大域解が DD モデルの時間大域解に収束すること

(iii) ε と ζ を 0 に近づけたとき, HHD モデルの時間大域解が DD モデルの時間大域解に収束すること

をそれぞれ証明した. なお, これらの安定性と緩和極限の定理では緩和時間が十分小さいことを仮定しているが, 初期値の大きさには如何なる制限も課す必要はない.

3 HHD モデル

本節では, HHD モデルの定常解の一意的存在と漸近安定性について議論する. 定常解とは, 境界条件 (1.4)–(1.6) を満たす (2.1) の時間に独立な解を意味する. すなわち, 定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ は次の方程式系を満たす.

$$\tilde{j}_x = 0, \quad (3.1a)$$

$$\left(\theta - \varepsilon \frac{j^2}{\rho^2}\right) \tilde{\rho}_x + \tilde{\rho} \tilde{\theta}_x = \tilde{\rho} \tilde{\phi}_x - \tilde{j}, \quad (3.1b)$$

$$\tilde{j} \tilde{\theta}_x + \frac{2}{3} \left(\frac{\tilde{j}}{\tilde{\rho}}\right)_x \tilde{\rho} \tilde{\theta} - \frac{2}{3} \kappa_0 \tilde{\theta}_{xx} = \left(\frac{2}{3} - \frac{\varepsilon}{3\zeta}\right) \frac{\tilde{j}^2}{\tilde{\rho}} - \frac{\tilde{\rho}}{\zeta} (\tilde{\theta} - \bar{\vartheta}), \quad (3.1c)$$

$$\tilde{\phi}_{xx} = \tilde{\rho} - D. \quad (3.1d)$$

等温の hydrodynamic model (HD モデル) の定常解の一意的存在と漸近安定性に関する研究成果は数多く報告されている [4, 6, 7, 8, 11]. 一方, HHD モデルに対しては, 研究 [12] ではじめて定常解の一意的存在と漸近安定性が示された.

以上の結果では初期擾乱が十分小さいことが仮定されているが, 最新の研究 [14] で, 任意に大きな初期擾乱に対して, 定常解の漸近安定性を示されている. 但し, パラメータ ε と ζ は初期値に応じて十分小さく取る必要がある. この結果は定理 3.2 にまとめられる. また, 定常解の一意的存在については次の補題が成立する.

補題 3.1. ドービング・プロファイルと境界条件は (1.2), (1.4), (1.6) を満たすとする. 任意の $\rho_l > 0$ に対して, ある $\delta_0 > 0$, $\zeta_0 > 0$, $\eta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ かつ $\varepsilon < \zeta \leq \zeta_0$ であれば, 定常問題 (1.4)–(1.6), (3.1) に条件 (2.3),

$$\frac{1}{2} B_m \leq \tilde{\rho} \leq 2 B_M, \quad (3.2a)$$

$$B_m := \min \left\{ \rho_l, \rho_r, \inf_{x \in \Omega} D(x) \right\}, \quad B_M := \max \left\{ \rho_l, \rho_r, \sup_{x \in \Omega} D(x) \right\},$$

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} |\tilde{\theta} - \bar{\vartheta}| \leq \eta_0 \quad (3.2b)$$

を満たす定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in B^2(\bar{\Omega}) \times B^2(\bar{\Omega}) \times B^3(\bar{\Omega}) \times B^2(\bar{\Omega})$ が一意的存在する.

定理 3.2. $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ を (1.4)–(1.6), (3.1) を満たす定常解とする. 初期値 $(\rho_0, j_0, \theta_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.8), (1.9a), (1.9b), (2.3) を満たすとする. このとき, ある $\delta_0 > 0$ と $\zeta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば, $(\delta$ に独立で ζ に依存する) $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ であれば, 初期値・境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.1), (2.2) に条件 (1.9a), (1.9b), (2.3) をみたす解 (ρ, j, θ, ϕ) が次の関数空間で一意的に存在する: $\rho - \tilde{\rho} \in \mathfrak{X}_2([0, \infty))$, $j - \tilde{j} \in \mathfrak{X}_2([0, \infty))$, $\theta - \tilde{\theta}, \theta_x - \tilde{\theta}_x \in \mathfrak{Y}([0, \infty))$, $\phi - \tilde{\phi} \in \mathfrak{X}_2^2([0, \infty))$. さらに, 減衰評価

$$\begin{aligned} & \|(j - \tilde{j})(t)\|_1^2 + \|(\rho - \tilde{\rho}, \theta - \tilde{\theta})(t)\|_2^2 \\ & + \varepsilon \|(\partial_x^2 \{j - \tilde{j}\}, \partial_x^3 \{\theta - \tilde{\theta}\})(t)\|^2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_4^2 \leq C e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

が成立する. ここで C と α は δ, ε, t に依らない正の定数である.

注意 3.3. HHD モデルは非線形双曲型方程式を含むため, 一般に大きな初期値に対して時間大域解の存在は期待できない. 実際, Chen-Wang [1] により, 一次元全空間上で大きな初期値に対して, 解は有限時間で爆発することが示されている. 一方, 詳しくは次節で紹介するが, 放物・楕円型連立系である ET モデルに対しては, 初期値の大きさを制限せず時間大域解を構成できる. 研究 [14] では, 緩和時間が十分に小さいとき HHD モデルが ET モデルで近似されることを利用して, 初期値の大きさに条件を課すことなく HHD モデルの時間大域解の存在を示した. ここでは初期値に応じて緩和時間を十分小さくするため, 緩和時間を固定している研究 [1] とは矛盾しない.

4 ET モデル

ET モデルの時間大域的可解性に関する結果を紹介する. Degond-Géniéys-Jüngel [2, 3] は, ディリクレ・ノイマン混合境界条件を課した多次元有界領域上で, ET モデルを含む一般の放物型方程式とボワソン方程式が連立した方程式系を解析している. この研究では定常解の一意的存在と漸近安定性が議論されているが, 一様放物型であることをあらかじめ仮定していた. 研究 [14] では一次元の場合に限るが, この仮定を課さず同様の結果を得ている.

補題 4.1. ドービング・プロファイルと境界条件は (1.2), (1.4), (1.6) を満たすとする. 任意の $\rho_l > 0$ に対して, ある $\delta_0 > 0, \zeta_0 > 0, \eta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば, ET モデル (2.4) に条件 (3.2) を満たす定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in \mathcal{B}^2(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^2(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^3(\bar{\Omega}) \times \mathcal{B}^2(\bar{\Omega})$ が一意的に存在する.

定理 4.2. $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ を ET モデル (2.4) の定常解とする. 初期値 $(\rho_0, \theta_0) \in H^1(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.8a), (1.9a), (1.9b) を満たすとする. このとき, ある $\delta_0 > 0$ と $\zeta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば, 初期値・境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.2a), (2.2c), (2.4) に条件 (1.9a), (1.9b) を満たす解 (ρ, j, θ, ϕ) が次の関数空間で一意的に存在する: $\rho - \tilde{\rho}, \theta - \tilde{\theta} \in \mathfrak{Z}([0, \infty)) \cap \mathfrak{Y}_{loc}((0, \infty))$, $j - \tilde{j} \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap \mathfrak{Z}_{loc}((0, \infty))$, $\phi - \tilde{\phi} \in C([0, \infty); H^3(\Omega)) \cap H^1([0, \infty); H^2(\Omega))$. さらに, 減衰評価

$$\|(j - \tilde{j})(t)\|^2 + \|(\rho - \tilde{\rho}, \theta - \tilde{\theta})(t)\|_1^2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_3^2 \leq Ce^{-\alpha t}$$

が成立する. ここで C と α は δ, ζ, t に依らない正の定数である.

5 DD モデル

DD モデルの数学解析の先駆者である Mock は, (電子が境界を通り抜けられないことを意味する) 不透過境界条件を課した多次元有解領域上で, 定常解の存在と漸近安定性を示した [9, 10]. その後, Gajewski-Gröger [5] により, より一般的な境界条件に対して, Mock と同様の結果が得られている. これらの研究では電流が流れない様な特殊な定常解のみが解析対象とされていた. 私たちは一次元有界領域上で, (電流が流れる) 定常解に対して次の成果を得た [13].

補題 5.1. ドーピング・プロファイルと境界条件は (1.2), (1.4), (1.6) を満たすとする. このとき, DD モデル (2.5) に条件 (1.9a) を満たす定常解 $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\phi}) \in B^2(\bar{\Omega})$ が一意的に存在する.

補題 5.2. $(\tilde{\rho}, \tilde{j}, \tilde{\phi})$ を DD モデル (2.5) の定常解とする. 初期値 $\rho_0 \in H^1(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.8a), (1.9a) を満たすとする. このとき, ある $\delta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ であれば, 初期値・境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.2a), (2.5) に条件 (1.9a) を満たす解 (ρ, j, ϕ) が次の関数空間で一意的に存在する: $\rho - \tilde{\rho} \in \mathfrak{Z}([0, \infty)) \cap \mathfrak{Y}_{loc}((0, \infty))$, $j - \tilde{j} \in C([0, \infty); L^2(\Omega)) \cap \mathfrak{Y}([0, \infty))$, $\phi - \tilde{\phi} \in C([0, \infty); H^3(\Omega)) \cap H^1(0, \infty; H^2(\Omega))$. さらに, 以下の減衰評価が成立する.

$$\|(\rho - \tilde{\rho})(t)\|_1^2 + \|(j - \tilde{j})(t)\|^2 + \|(\phi - \tilde{\phi})(t)\|_3^2 \leq Ce^{-\alpha t}.$$

ここで C と α は, δ, t に依らない正の定数である.

6 緩和極限

緩和極限に関しては、工学的に意味のある設定下での注目すべき成果はあまり報告されていなかった。例えば、既存の研究ではドーピング・プロファイルが平坦であることや境界上で電子の流速が零となることを仮定するなど、物理的に妥当とは思えない問題設定下で緩和極限の正当化が行われていた。私たちはこうした不満点を解消し、工学的にも妥当な設定の下で緩和極限を正当化した [13, 14]。HHD モデルから ET モデルへの緩和極限については、次の定理が成立する。

定理 6.1. 初期値 $(\rho_0, j_0, \theta_0) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.8), (1.9a), (1.9b), (2.3) を満たすとする。このとき、 ε を零に近づければ、初期値・境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.1), (2.2) の時間大域解 $(\rho_\varepsilon^\varepsilon, j_\varepsilon^\varepsilon, \theta_\varepsilon^\varepsilon, \phi_\varepsilon^\varepsilon)$ が初期値・境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.2a), (2.2c), (2.4) の時間大域解 $(\rho_\varepsilon^0, j_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0, \phi_\varepsilon^0)$ に収束する。正確には、ある $\delta_0 > 0$ と $\zeta_0 > 0$ が存在して、 $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば、 $(\delta$ に独立で ζ に依存する) $\varepsilon_0 > 0$ が存在して、 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ であれば、次の評価が任意の $t \in (0, \infty)$ に対して成立する。

$$\|(\rho_\varepsilon^\varepsilon - \rho_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^\varepsilon - \theta_\varepsilon^0)(t)\|_1^2 + \|(\phi_\varepsilon^\varepsilon - \phi_\varepsilon^0)(t)\|_3^2 \leq C\varepsilon^\gamma, \quad (6.1)$$

$$\|(j_\varepsilon^\varepsilon - j_\varepsilon^0)(t)\|^2 \leq \|(j_0 - j_\varepsilon^0)(0)\|^2 e^{-t/\varepsilon} + C\varepsilon^\gamma, \quad (6.2)$$

$$\|(\partial_x^2\{\rho_\varepsilon^\varepsilon - \rho_\varepsilon^0\}, \partial_x^1\{j_\varepsilon^\varepsilon - j_\varepsilon^0\}, \partial_x^2\{\theta_\varepsilon^\varepsilon - \theta_\varepsilon^0\}, \partial_x^4\{\phi_\varepsilon^\varepsilon - \phi_\varepsilon^0\})(t)\|^2 \leq C\varepsilon^\gamma(t^{-2} + 1). \quad (6.3)$$

ここで C と γ は、 δ, ε, t に依らない正の定数である。

注意 6.2. ET モデルの初期値は ρ_0 と θ_0 だけで与えられ、初期時刻での電流密度は方程式 (2.4d) と公式 (1.7) より定まる：

$$j_\varepsilon^0(0, x) = -(\theta_0 \rho_0)_x(x) + \rho_0(\Phi[\rho_0])_x(x).$$

この $j_\varepsilon^0(0, x)$ と HHD モデルに対する初期電流 $j_0(x)$ の差から初期層が生じるが、(6.2) の右辺第一項はその大きさが、 $t \rightarrow \infty$ 又は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき指数関数的に減衰することを意味している。なお、半導体モデル方程式の特異極限で初期層問題を解決した結果は、研究 [13, 14] が初めてである。

ET モデルから DD モデルへの緩和極限に関する結果は以下の通りである。

定理 6.3. 初期値 $(\rho_0, \theta_0) \in H^1(\Omega)$ と境界値 ρ_l, ρ_r, ϕ_r は (1.4), (1.6), (1.8a), (1.9a), (1.9b) を満たすとする。このとき、 ζ を零に近づければ、初期値・境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.2a), (2.2c), (2.4) の時間大域解 $(\rho_\varepsilon^0, j_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0, \phi_\varepsilon^0)$ が初期値・境界値問題 (1.4), (1.6), (2.2a), (2.5) の時間大域解 $(\rho_0^0, j_0^0, \phi_0^0)$ に収束する。正確には、ある $\delta_0 > 0$ と

$\zeta_0 > 0$ が存在して, $\delta \leq \delta_0$ かつ $\zeta \leq \zeta_0$ であれば, 次の評価が任意の $t \in (0, \infty)$ に対して成立する.

$$\|(\rho_\zeta^0 - \rho_0^0)(t)\|^2 + \|(\phi_\zeta^0 - \phi_0^0)(t)\|_2^2 \leq C\zeta^\gamma, \quad (6.4)$$

$$\|(\theta_\zeta^0 - \bar{\vartheta})(t)\|^2 \leq C\|\theta_0 - \bar{\vartheta}\|^2 e^{-\nu t/\zeta} + C\zeta^\gamma, \quad (6.5)$$

$$\|(\{\rho_\zeta^0 - \rho_0^0\}_x, \{\theta_\zeta^0\}_x, j_\zeta^0 - j_0^0)(t)\|^2 \leq C\zeta^\gamma(1 + t^{-1}). \quad (6.6)$$

ここで C , γ , ν は, δ , ζ , t に依らない正の定数である.

注意 6.4. DD モデルは等温モデルであり, 初期時刻での温度は室温 $\bar{\vartheta}$ と一致する. この $\bar{\vartheta}$ と ET モデルに対する初期温度 $\theta_0(x)$ の差もから初期層が生じるが, 不等式 (6.5) の右辺第一項はその大きさがやはり指数関数的に減衰することを意味している. (注意 6.2 を参照.)

定理 6.1 と定理 6.3 より, HHD モデルから DD モデルへの緩和極限は直ちに正当化される.

系 6.5. 定理 6.1 及び定理 6.3 と同じ条件下で, ε , ζ を零に近づければ, 初期値・境界値問題 (1.4)–(1.6), (2.1), (2.2) の時間大域解 $(\rho_\zeta^\varepsilon, j_\zeta^\varepsilon, \theta_\zeta^\varepsilon, \phi_\zeta^\varepsilon)$ が初期値・境界値問題 (1.4), (1.6), (2.2a), (2.5) の時間大域解 $(\rho_0^0, j_0^0, \phi_0^0)$ に収束する. 正確には, 次の評価が任意の $t \in (0, \infty)$ に対して成立する.

$$\begin{aligned} \|(\rho_\zeta^\varepsilon - \rho_0^0)(t)\|^2 + \|(\phi_\zeta^\varepsilon - \phi_0^0)(t)\|_2^2 &\leq \bar{C}\zeta^{\bar{\gamma}} + C\varepsilon^\gamma, \\ \|(\theta_\zeta^\varepsilon - \bar{\vartheta})(t)\|^2 &\leq \bar{C}\|\theta_0 - \bar{\vartheta}\|^2 e^{-\bar{\nu}t/\zeta} + \bar{C}\zeta^{\bar{\gamma}} + C\varepsilon^\gamma, \\ \|(j_\zeta^\varepsilon - j_0^0)(t)\|^2 &\leq \bar{C}\|(j_0 - j_0^0)(0)\|^2 e^{-t/\varepsilon} + \bar{C}\zeta^{\bar{\gamma}}(1 + t^{-1}) + C\varepsilon^\gamma, \\ \|(\{\rho_\zeta^\varepsilon - \rho_0^0\}_x, \{\theta_\zeta^\varepsilon\}_x)(t)\|^2 &\leq \bar{C}\zeta^{\bar{\gamma}}(1 + t^{-1}) + C\varepsilon^\gamma. \end{aligned}$$

ここで C , γ は, δ , ε , t に依らない正の定数である. また, $\bar{\nu}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{C}$ は, ε , ζ , δ , t に依らない正の定数である.

参考文献

- [1] G. Q. CHEN AND D. WANG, Formation of singularities in compressible Euler-Poisson fluids with heat diffusion and damping relaxation, *Z. Angew. Math. Phys.* **49** (1998), 341–362.
- [2] P. DEGOND, S. GENIEYS AND A. JUNGEL, A system of parabolic equations in nonequilibrium thermodynamics including thermal and electrical effects, *J. Math. Pures Appl.* **76** (1997), 991–1015.
- [3] P. DEGOND, S. GENIEYS AND A. JUNGEL, A steady-state system in nonequilibrium thermodynamics including thermal and electrical effects, *Math. Methods Appl. Sci.* **21** (1998), 1399–1413.

- [4] P. DEGOND AND P. MARKOWICH, On a one-dimensional steady-state hydrodynamic model, *Appl. Math. Lett.* **3** (1990), 25–29.
- [5] H. GAJEWSKI AND K. GROGER, On the basic equations for carrier transport in semiconductors. *J. Math. Anal. Appl.* **113** (1986), 12–35.
- [6] Y. GUO AND W. STRAUSS, Stability of semiconductor states with insulating and contact boundary conditions, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **179** (2006), 1–30.
- [7] H. LI, P. MARKOWICH AND M. MEI, Asymptotic behavior of solutions of the hydrodynamic model of semiconductors, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **132** (2002), 359–378.
- [8] A. MATSUMURA AND T. MURAKAMI, Asymptotic behavior of solutions for a fluid dynamical model of semiconductor equation, *Kyoto Univ. RIMS Kokyuroku* **1495** (2006), 60–70.
- [9] M. S. MOCK, On equations describing steady-state carrier distributions in a semiconductor device. *Comm. Pure Appl. Math.* **25** (1972), 781–792.
- [10] M. S. MOCK, Asymptotic behavior of solutions of transport equations for semiconductor devices. *J. Math. Anal. Appl.* **49** (1975), 215–225.
- [11] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Asymptotic stability of a stationary solution to a hydrodynamic model of semiconductors, *Osaka J. Math.* **44** (2007), 639–665.
- [12] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Asymptotic stability of a stationary solution to a thermal hydrodynamic model for semiconductors, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **192** (2009), 187–215.
- [13] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Relaxation limit and initial layer to hydrodynamic models for semiconductors, to appear.
- [14] S. NISHIBATA AND M. SUZUKI, Hierarchy of semiconductor equations: relaxation limits with initial layers for large initial data, to appear.