

Hammerstein 方程式の数値解法について

静岡理工科大学 鈴木千里 (Chisato Suzuki)

§1. はじめに

本資料では、常微分方程式の非線形 2 点境界値問題

$$(1.1) \quad \begin{cases} u''(x) = f(x, u(x)) \\ u(-1) = \alpha, \quad u(1) = \beta \end{cases}$$

を特殊な場合として含む Hammerstein 方程式

$$(1.2) \quad u(x) = \int_{-1}^1 K(x, s) f(s, u(s)) ds + h(x), \quad x \in I = [-1, 1]$$

の解の近似値を (要求精度に応じて) 自動的に算出するための数値計算スキムを与える。なお、このスキムは条件

- (i) $K(x, s)$ は $I \times I$ 上の滑らかな関数
- (ii) $f(x, y)$ は $I \times R$ 上の滑らかな関数
- (iii) $h(x)$ は I 上の滑らかな関数

を前提とする Hammerstein 方程式に対して適用可能である。

§2. 準備

Hammerstein 方程式 (1.2) の解に対する近似解の存在性と収束性などに関する理論的な考察はより一般的な仮定の下に既に行われている。実際

(A1) $K(x, s)$ は $I \times I$ ($I = [-1, 1]$) 上の Riemann 可積分関数

(A2) $f(x, z)$ は $I \times R^1$ 上で定義された (一般に z に関して非線形な) 連続関数でつぎを満たす: I 上の任意の Riemann 可積分関数 $u(x), v(x)$ に対して, 適当な I 上の正値連続関数 $g(x)$ が存在して

$$|f(x, u(x)) - f(x, v(x))| \leq g(x) |u(x) - v(x)| \quad (x \in I)$$

が成立し,

(A3) $h(x)$ は I 上の Riemann 可積分関数である,

との仮定の下での Hammerstein 方程式の研究がある¹⁾。本節では準備として, 以下の

議論において必要となる幾つかの基本的な定理を論文1) から引用する.

まず上記の仮定 (A1) ~ (A3) の下で Riemann 可積分関数からなる空間 $R(I)$ 上の写像 T を

$$(2.1) \quad T(u)(x) = \int_{-1}^1 K(x, s) f(s, u(s)) ds + h(x), \quad u \in R(I)$$

と定義する. そのとき, Hammerstein 方程式 (1.2) は T の不動点問題

$$(2.2) \quad u = T(u) \quad \text{in } R(I)$$

と等価になる. この問題の解 (すなわち不動点) の近似に対して, つぎのことが示されている.

(1°) Riemann 可積分関数空間 $R(I)$ 上の写像 T の近似である写像

$$(2.3) \quad T^n(u)(x) = \Phi_n(\pi_n u)(x) + h(x), \quad \text{for } u \in R(I), \quad n \geq 1$$

に対して, その不動点 $u_n(x)$ ($n \geq 2$) が存在するとき, 適当な部分列 $\{u_m(x)\}$ があって, つぎが成立する.

(a) $u_m(x)$ は Hammerstein 方程式を殆ど到る所で満たす関数 $u^*(x)$ に L_2 収束する.

(証明は文献1) の定理2, 定理3 参照)

(b) $u_m^* = T(u_m)(x)$ は Hammerstein 方程式を到る所で満たす関数 $u^*(x)$ に一様する.

(証明は文献1) の理4 参照)

ただし,

Φ_n : n 次元ベクトル $u^n \in R^n$ を補間する作用素で, T の積分の項の近似を意味し, つぎのように定義されている: ベクトル $u^n = (u_1, \dots, u_n) \in R^n$ に対して

$$\Phi_n(u^n)(x) = \sum_{i=1}^n w_i g_{n_i}(x) f(x_i, u_i)$$

ここで

$$g_{n_i}(x) = \sum_{p=1}^n \left\{ \prod_{j=1, j \neq p}^n \frac{(x - x_j)}{(x_p - x_j)} \right\} K(x_p, x_j)$$

π_n : 関数 $u(x)$ ($x \in I$) の n 次元ベクトル空間への射影;

$$\pi_n u(x) = (u(x_1), \dots, u(x_n))^T \equiv u^n \in R^n \quad (x_i \in \Pi_n)$$

Π_n : 選点と呼び, n 次 Legendre 多項式 $p_n(x)$ の n 個のゼロ点の集合;

$$\Pi_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

(2°) 写像 T^n が不動点を持つための必要十分条件は T の n 次元ユークリッド空間 R^n 上の近似である写像

$$(2.4) \quad T^n(u^n) = \pi_n(\Phi_n(u^n) + h), \quad (u^n = (u_1, \dots, u_n) \in R^n)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^n K(x_i, x_j) w_j f(x_j, u_j) + h(x_i) \right]$$

が不動点をもつことである.

(文献1) の定理1 参照)

ただし, $\{w_j\}$ は Π_n 上に標本点をもつ Legendre-Gauss 数値積分公式の重み係数

ある.

$$w_i = 2(1 - x_i^2) / [n^2 p_{n-1}(x_i)^2]$$

そして

- ① T^n_c, T^n_d をそれぞれ T の連続近似写像, 離散近似写像という.
- ② T^n_c の不動点を T の不動点 (又は Hammerstein 方程式) の連続近似解という.
- ③ T^n_d の不動点を T の不動点 (又は Hammerstein 方程式) の離散近似解という.

もちろん上述の結果は, 空間を $R(I)$ から I 上で定まる連続関数空間 $C(I)$ に制限して, 方程式の関数 $K(x, s), f(x, y), h(x)$ を §1 で提示した条件 (i) ~ (iii) に書き換えても通用する.

〔3°〕 上述した〔1°〕と〔2°〕から, つぎのことを主張することができよう.

『まず〔2°〕によって, T^n_d ($n \geq 1$) の不動点の存在証明が示されれば

〔1°〕の下線部分に提示した前提「 $u_n(x)$ ($n \geq 1$) の存在」は仮定でなくなり, (a) 及び (b) の命題は真となる. したがって, Hammerstein 方程式の厳密解の存在が保証されることになる.』

これについては, 解析関数のクラスに対して文献 2) で存在が示されている.

以上の存在と収束性の議論のもとに, つづく節では近似解の残差と誤差の評価を行う.

§3. 近似解の残差の評価

ここでは連続近似解 $u_n(x)$ の残差を評価する. 残差は関数 $v(x)$ に対して

$$(3.1) \quad r_n(v) = v(x) - \int_{-1}^1 K(x, s) f(s, v(s)) ds + h(x)$$

によって定義する. 記法の簡便化のために,

$$U(x) = u_n(x), U_i = U(x_i), f_i = f(x_i, U_i)$$

とおく. さらに積分核 $K(x, s)$ と関数 $f(x, U(x))$ に対する Δ_n 上の Lagrange 補間の誤差をそれぞれ

$$R_n(K)(x, s) = K(x, s) - K_n(x, s)$$

$$R_n(F(U))(x) = f(x, U(x)) - F_n(U)(x)$$

と書く. ここで

$$K_n(x, s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\prod_{p=1, p \neq i}^n \frac{(x - x_p)}{(x_i - x_p)} \right) \left(\prod_{q=1, q \neq j}^n \frac{(s - x_q)}{(x_j - x_q)} \right) K(x_i, x_j)$$

$$F_n(U)(x) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{p=1, p \neq i}^n \frac{(x - x_p)}{(x_i - x_p)} \right) f(x_i, U(x_i))$$

これにより残差 $r_n(u_n)$ は

$$r_n(U)(x) = A_n(x) + B_n(x) + C_n(x)$$

と書くことができる. ここで

$$(3.2) \quad A_n(x) = - \int_{-1}^1 K_n(x, s) R_n(F(U))(s) ds$$

$$(3.3) \quad B_n(x) = - \int_{-1}^1 R_n(K)(s) F_n(U)(s) ds$$

$$(3.4) \quad C_n(x) = - \int_{-1}^1 R_n(F(U))(s) R_n(K)(x, s) ds$$

したがって, $r_n(u_n)$ の評価は

$$(3.5) \quad \| r_n(U) \| \leq \| A_n \| + \| B_n \| + \| C_n \|^$$

により $\| A_n \|$, $\| B_n \|$, $\| C_n \|^$ を個別に評価すれば十分である. ただし $\| \cdot \|$ は 2 乗ノルムを意味する. これらは Schwarz 不等式を用いて簡単に評価でき, 下記を得る.

$$(3.6) \quad \begin{cases} \| A_n \| \leq 2 \| R_n(F(U)) \| \| K \|_{\infty} \\ \| B_n \| \leq \sqrt{2} \| R_n(K) \| \| F(U) \|_{\infty} \\ \| C_n \| \leq \| R_n(F(U)) \| \| R_n(K) \| \end{cases}$$

さらに, $\| R_n(F(U)) \|$ と $\| R_n(K) \|$ の評価については, つぎの補題を用いる.

補題 1. $K(x, s)$, $f(x, z)$, $h(x)$ が十分滑らかであれば, $\| R_n(F(U)) \|$ と $\| R_n(K) \|$ に対してつぎが成立する.

$$(i) \quad \sqrt{2} \| R_n(F(U)) \| \leq 2M_n \mu_n (\| D_x^n K \|_{\infty} + \| D_s^n K \|_{\infty})$$

$$(ii) \quad \| R_n(K) \| \leq M_n \| F^{(n)}(U) \|_{\infty}$$

ただし, $D_x^n = \partial^n / \partial x^n$, $D_s^n = \partial^n / \partial s^n$ であり, そして

$$M_n = \frac{2^n n!}{2n!}, \quad \mu_n = \left(\frac{2}{2n+1} \right)^{1/2} \quad \square$$

(証明は文献 1) の補題 5 を参照)

不等式 (3.6) と上の補題を用いて, 式 (3.5) から連続近似解に対する残差の評価として, つぎを得る.

$$(3.7) \quad \| r_n(U) \| \leq 2M_n \{ \| F^{(n)}(U) \|_{\infty} \| K \| + \mu_n (\| D_x^n K \|_{\infty} + \| D_s^n K \|_{\infty}) \| F(U) \|_{\infty} \}$$

なお, 離散近似解 u^n の残差の評価は式 (3.1) から簡単に評価することができる. すなわち, (3.1) 式において, x を Δ_n に属する選点 x_i に取り, そして積分項については Legendre-Gauss の数値積分公式を適用することによって, つぎが得られる.

$$r_n(U)(x_i) = - d_n D_s^{2n} (K(x_i, \eta_i) F(U)(\eta_i)), \quad (|\eta_i| < 1)$$

ここで

$$(3.8) \quad d_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) (2n!)^3}$$

これから, 離散近似解に対する残差の評価として

$$(3.9) \quad \|r_n(U)(x_i)\| \leq d_n \|D_s^{2n}(K(x_i, \cdot)F(U))\|_\infty$$

が得られる.

§3. 近似解の誤差評価

ここでは連続近似解 $u_n(x)$ の残差の評価を利用し, $u_n(x)$ の誤差

$$(4.1) \quad e_n(x) = u_n(x) - u(x)$$

の限界の評価を与える. ただし $u(x)$ は T の不動点方程式の厳密な解である.

近似解 $u_n(x)$ に対して, つぎの定理が成立する.

定理1. $u(x)$ を条件 (i) ~ (iii) の下での不動点問題 $u=T(u)$ (in $C(I)$) の解とし, $u_n(x)$ は §2 で述べた Δ_n 上で定まる ($u(x)$ の) 近似解とする. さらに

$$G(x, s) = K(x, s) D_z f(x, z) |_{z=v(s)}$$

を積分核とする線形積分方程式は1の固有値を持たないものとする. ただし, $v(s)$ は

$$f(x, u_n(s)) - f(x, u(s)) = D_z f(x, z) |_{z=v(s)} (u_n(s) - u(s))$$

を満たすような各点 $s \in I$ で $u_n(s)$ と $u(s)$ の間の値を取る連続関数である. そのとき, 近似解 $u_n(x)$ の誤差 $e_n(x)$ に対して

$$\|e_n\| \leq (1 + \|R\|) \|r_n(u_n)\|$$

が成立する. ただし, $\|R\|$ の $R(x, s)$ はつぎのレゾルベント方程式を満たすような解である.

$$(4.2) \quad R(x, s) - \int_{-1}^1 G(x, t) R(t, s) dt = G(x, s)$$

$$(4.3) \quad R(x, s) - \int_{-1}^1 R(x, t) G(t, s) dt = G(x, s).$$

【証明】誤差 (4.1) は残差 $r_n(u_n)(x)$ と $u=T(u)$ を用いて

$$e_n(x) = r_n(u_n)(x) + T(u_n)(x) - T(u)(x)$$

と書ける. この式の右辺の第2項と第3項を定理の条件を用いて変形すれば

$$(4.4) \quad e_n(x) = r_n(u_n)(x) - \int_{-1}^1 G(x, s) e_n(s) ds$$

が得られる. 上式を作用素表現すれば, 作用素方程式

$$(4.5) \quad (I - G) e_n = r_n(u_n) \quad (I \text{ は恒等写像})$$

と書ける. 仮定によって $G(x, s)$ のレゾルベントが $R(x, s)$ であることから, 作用素 $(I - G)$ の逆 L^{-1} が存在して, つぎが成立する. 任意の連続関数 $v(x)$ に対して

$$(4.6) \quad L^{-1}v(x) = v(x) + \int_{-1}^1 G(x, s) v(s) ds$$

したがって

$$(4.7) \quad e_n = L^{-1} r_n(u_n)$$

が得られる。この式をもとに、 $\|e_n\|$ を評価すれば

$$\|e_n\| \leq \|L^{-1}\| \|r_n(u_n)\|$$

となる。なお、 $\|L^{-1}\|$ は (4.6) 式から、Schwarz不等式を用いて

$$\|L^{-1}v\| \leq (1 + \|R\|) \|v\|$$

と評価できる。□

この定理から連続近似解の誤差限界はその残差に比例することが分かる。さらに補題から、残差の限界が概ね $\|R_n(F(U))\|$ と $\|R_n(K)\|$ の線形和に比例することから誤差限界は $f(x, u(x))$ と $K(x, s)$ の各々の補間誤差の2乗ノルムの線形和に比例することが分かる。

離散近似解の誤差限界は (4.7) 式から簡単に評価することができる。実際

$$|e_n(x_i)| \leq \|L^{-1}\|_{\infty} \times \sup_{1 \leq p \leq n} |r_n(u_n)(x_p)| \quad (n=1, 2, \dots)$$

を得る。ここで、 $\|L^{-1}\|_{\infty}$ はつぎのように評価される。

$$(4.8) \quad \|L^{-1}\|_{\infty} \leq \left[1 + 2 \sup_{x \in I} \int_{-1}^1 R(x, s)^2 ds \right]$$

最後に、離散近似解の残差に対する評価 (3.9) 式を用いて、各 $n \geq 1$ に対して

$$(4.9) \quad |e_n(x_i)| \leq B_n$$

ただし

$$B_n = d_n \|L^{-1}\|_{\infty} \times \sup_{1 \leq p \leq n} \|D_s^{2n}(K(x_i, \cdot)F(U))\|_{\infty}$$

と評価できる。

本節の終わりに際して、離散近似写像 $T_n^d(u^n)$ の不動点問題を Newton 法で解く場合の Newton 反復の収束判定についてコメントを述べる。離散近似解 u^n が (4.9) 式で評価されるような誤差をもつことから、離散近似写像の不動点問題

$$T_n^d(u^n) = u^n$$

をどの程度正確に解けばよいか分かる。すなわち、この方程式に対する Newton 反復で得られる近似解が B_n 程度の誤差におさまれば、反復を停止しても良いと考えられる。そこで Newton 反復が2次収束の域に入った時点で、その修正量が B_n でおさえられれば、収束したと見做すことができる。

つぎの節で述べる数値計算スキムでは B_n をつぎのようにして定めている。

$$\sup_{1 \leq p \leq n} \|D_s^{2n}(K(x_i, \cdot)F(U))\|_{\infty} = \alpha (2n!) \quad (\alpha \text{ は比例定数})$$

として、(4.9) 式から

$$B_n \sim \|L^{-1}\|_{\infty} \alpha d_n (2n!) \equiv C_1 \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)(2n!)^2}$$

なお、 $K(x, s)$ と $f(x, z)$ に解析性を仮定すると $D_s^{2n}(K(x_i, \cdot)F(U))$ は正確に評価を評価することができる〔文献2〕を参照〕。

§5. 数 値 計 算 ス キ ム

選点集合 Δ_{n-1} ($n \geq 2$) 上の連続近似解 $u_{n-1}(x)$ が既に得られていると仮定してこの近似解からつぎの (Δ_{n-1} よりも 1 つだけ選点の数の多い選点の集合 Δ_n 上の) 連続近似解 $u_n(x)$ を計算するためのスキムについて述べる. その後で $n=1$ と 2 の $u_n(x)$ を求める手順について述べる. この手順は初期手続きと呼ぶ.

Step1. 射影作用素 π_n を用いて $u_{n-1}(x)$ を R^n 空間に射影し, その像を $\hat{u}^n$ とする:

$$(5.1) \quad \hat{u}^n \equiv \pi_n u_{n-1}(x)$$

この $\hat{u}^n$ を Δ_n 上の離散近似解 u^n に対する予測子という.

Step2. つぎに予測子 $\hat{u}^n$ を出発値として, 不動点方程式

$$u^n - T_n^d(u^n) = 0$$

を Newton 法で解く. Newton 反復過程は, $V_0 = \hat{u}^n$ として

$$(5.2) \quad V_{k+1} = V_k + \delta_k \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

で生成される. ここで

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \delta_k &= -J^{-1}(V_k)(V_k - T_n^d(V_k)) \\ J(V_k) &= I - K_n W_n F_n(V_k) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} K_n &= (K_{ij}), \quad K_{ij} = K(x_i, x_j) \\ W_n &= \text{diag}(w_1, w_2, \dots, w_n) \\ F_n(V_k) &= \left(\frac{\partial f(x_1, v_1)}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial f(x_n, v_n)}{\partial v_n} \right)^T \\ V_k &= (v_1, v_2, \dots, v_n)^T \end{aligned}$$

この反復の収束判定は修正量 δ_k がパラメータ

$$(5.4) \quad \eta_n = C_1 \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n!)^2}, \quad (C_1 > 0)$$

によっておさえられるか否かによって行う. すなわち, 反復は

$$(5.5) \quad \|\delta_k\| \leq \eta_n \|V_k\|_\infty$$

が真のとき停止する. これを反復停止則という.

Step3. 停止則が真のとき, $u^n = V_{k+1}$ とし, 埋め込み写像 Φ_n を用いて Δ_n 上の連続近似 $u_n(x)$ を得る;

$$(5.6) \quad u_n(x) = \Phi_n(u^n) + h(x)$$

Step4. つぎに次数判定を行う. ここで, 次数判定とは続く Δ_{n+1} 上の近似解を更に構成する必要があるのか否かを近似精度の観点から判定することである. 判定の方法は予測子 $\hat{u}^n$ と u^n の比較によって行う. すなわち, あらかじめ指定された要求精度 $\varepsilon > 0$ に対して

$$(5.7) \quad \|\hat{u}^n - u^n\|_\infty \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \|u^n\|_\infty \quad (C_2 > 0)$$

が成立するとき, u^n は所望の精度を有すると見做す. これを次数判定則という.

Step5. 次数判定則が満たされれば、最終的な近似解 $u^*(x)$ を

$$(5.8) \quad u^*(x) = T(u_n)(x)$$

によって構成し、さもなれば $n=n+1$ とおき、Step1に戻る。

初期手続き：

上述した計算スキムを適用するためには、最初に少なくとも一つは近似解が既知でなければならない。この最初の近似解を求める手続きを初期近似手続きという。具体的には、小さな n における離散近似写像の不動点方程式を適当な方法で解けばよい。例えば、 $n=1$ と 2 の離散近似写像の不動点方程式はつぎに与えられる。

$$n=1 : ==> \quad w_1 - 2K_0 \circ f(0, u_1) - h(0) = 0$$

$$n=2 : ==> \quad \begin{cases} w_1 - K_{p,p} f(p, u_1) - K_{p,-p} f(-p, u_2) - h(p) = 0 \\ w_2 - K_{-p,p} f(p, u_1) - K_{-p,-p} f(-p, u_2) - h(-p) = 0 \end{cases}$$

ただし、 $K_{x,s} = K(x, s)$, $p=1/\sqrt{3}$ 。

ステップの4で用いた次数判定方法の正当性について簡単な注釈を与える。まず離散近似解 u^{n-1} から射影 π_n によって構成される $\hat{u}^n$ の精度は良くても u^{n-1} の精度のオーダーの半分である。一方、 u^n の精度は悪くても u^{n-1} と同程度の精度をもつ。したがって、 $x_i \in \Delta_n$ の各点での $\hat{u}^n(x_i)$ の精度は対応する u^n の成分の精度のオーダーの半分である。ゆえに $\hat{u}^n$ からみて u^n は真値と見做せる。

上述した計算手順がフローチャートとして図1に示される。

§6. 数値例

本節では先に述べた数値計算スキムにもとづき、幾つかの Hammerstein 方程式を解くことにする。スキムの適用に際してはスキムの定数 C_1, C_2 はいずれも1とした。

【数値例1】下記の方程式は Amann の論文³⁾で扱われた問題である。

$$u(x) = - \int_{-1}^1 \left(2 + (s-x) + \frac{5}{2}(x+1)(s+1) \right) \frac{(5u(s) + 5x + 8)^3}{375} ds$$

この方程式はつぎが唯一の解である。

$$u(x) = -\frac{x}{2} - \frac{11}{10}.$$

本スキムの適用にあたっては $n=2$ において初期手続きを取り、Newton法で処理した。結果的に、つぎの解が得られた。

$$u^2 = \begin{pmatrix} -1.340 \\ -0.784 \end{pmatrix}$$

スキムの適用に際しては、要求精度を指定するパラメータ (ε) は $\varepsilon = 1.0E-15$ とした。実行結果については ($n=5$ のとき次数判定が真となり) 下記の表に示される通りである。なお Newton 反復回数は 2~5 までの各 n に対してすべて1回だけであった。

$n=5$ の最終的な連続近似解 $u^*_5(x)$ に対する誤差の二乗ノルムは $2.22E-16$ であり概ね要求精度 ($1.0E-15$) を満たしている。

初期手続き

$$\begin{aligned}
 n=1 : & \quad w_1 - 2K_0 \circ f(0, u_1) - h(0) = 0 \\
 & \quad \text{または} \\
 n=2 : & \quad \begin{cases} w_1 - K_{p,p} f(p, u_1) - K_{p,-p} f(-p, u_2) - h(p) = 0 \\ w_2 - K_{-p,p} f(p, u_1) - K_{-p,-p} f(-p, u_2) - h(-p) = 0 \end{cases} \\
 & \quad \text{のいずれかを解く}
 \end{aligned}$$

Step 1 ~ Step 5 におけるルーチン

次数増加ルーチン

$$\hat{u}^n \equiv \pi_n u_{n-1}(x) \quad \text{予測子の計算}$$

不動点方程式 $u^n - T^n(u^n) = 0$ の解法

Newton法の出発値設定

$$k=0$$

$$V_0 = \hat{u}^n$$

Newton反復ルーチン

修正量の計算とアップデート

$$k = k + 1$$

$$\delta_k = -J^{-1}(V_k)(V_k - T^n(V_k))$$

$$V_{k+1} = V_k + \delta_k$$

Newton反復の収束判定

No

$$\|\delta_k\| \leq \eta_n \|V_k\|_\infty$$

Yes

$$n = n + 1$$

$$u^n = V_{k+1} \quad \text{離散近似解}$$

$$u_n(x) = \Phi_n(u^n) + h(x) \quad \text{連続近似解}$$

No

$$\|\hat{u}^n - u^n\|_\infty \leq C_2 \sqrt{\varepsilon} \|u^n\|_\infty \quad \text{次数判定}$$

Yes

$$u^*(x) = T(u^n)(x) \quad \text{最終的な連続解}$$

図 1. 数値計算スキムのフローチャート

例 1 の Hammerstein 方程式に対する適用結果

選 点	選点上の近似解	絶対誤差
$x_1 = -0.906179845938664$	-0.646910077030668	$6.939D-17$
$x_2 = -0.538469310105683$	-0.830765344947159	$1.110D-16$
$x_3 = 0.000000000000000$	-1.100000000000000	$0.000D+00$
$x_4 = 0.538469310105683$	-1.369234655052840	$0.000D+00$
$x_5 = 0.906179845938664$	-1.553089922969330	$-2.220D-16$

【数値例 2】下記は Hochstadt の著書⁴⁾において詳しく解析されている Hammerstein 方程式である。

$$u(x) = \int_{-1}^1 \sin \left(\frac{(x+1)}{2} \pi \right) u(s)^2 ds$$

この方程式は 2 つの解 $u_a(x)$, $u_b(x)$ をもつ：

$$u_a(x) = \sin \left(\frac{(x+1)}{2} \pi \right)$$

$$u_b(x) = 0$$

本スキムの適用にあたっては $n=2$ において初期手続きを取り，Newton 法で処理した。結果的に，つぎの解が得られた。

$$u_a^2 = \begin{pmatrix} +0.811 \\ +0.811 \end{pmatrix}, \quad u_b^2 = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix},$$

スキムの適用に際しては，要求精度を指定するパラメータ (ε) は $\varepsilon = 1.0E-8$ とした。 u_a^2 を初期値とするときの実行結果については，($n=7$ のとき次数判定が真となり) 下記の表に示される通りである。なお，Newton 反復回数は $n=2$ のとき 1 回， $n=3$ のとき 2 回，4~7 までの各 n ではすべて 2 回だけであった。 $n=7$ の最終的な連続近似解 $u^*(x)$ に対する誤差の一樣ノルムは $8.38E-16$ であり，概ね要求精度 ($1.0E-8$) を満たしている。 u_b^2 を初期値とする場合は直ちにゼロ解を得る。

例 2 の Hammerstein 方程式に対する適用結果

選 点	選点上の近似解	絶対誤差
$x_1 = -0.949107912342759$	$0.798559858869677D-02$	$6.641D-10$
$x_2 = -0.741531185599394$	$0.394939375022787D-00$	$3.285D-09$
$x_3 = -0.405845151377397$	$0.803586188234196D-00$	$6.683D-09$
$x_4 = 0.000000000000000$	$0.999999991683422D-00$	$8.316D-09$
$x_5 = 0.405845151377397$	$0.803586188234196D-00$	$6.683D-09$
$x_6 = 0.741531185599394$	$0.394939375022787D-00$	$3.285D-09$
$x_7 = 0.949107912342759$	$0.798559858869677D-02$	$6.641D-10$

【数値例 3】下記の方程式は Shimasaki-Kiyono の論文⁵⁾で扱われた問題である。

$$u(x) = \int_{-1}^1 \sin \left(\frac{x(s+1)}{4} \right) u(s)^2 ds + \frac{4-x}{8}$$

この方程式は2つの解 $u_a(x)$, $u_b(x)$ をもつことが知られている。しかし、厳密解を筆者は知らないで、数値解の誤差の検討に際しては高精度の ($n=7$ の) 数値解を真の解と仮定した。

本スキムの適用にあたっては $n=2$ において初期手続きを取り、Newton法で処理した。結果的に、つぎの解が得られた。

$$u_a^2 = \begin{pmatrix} 3.41 \\ -2.41 \end{pmatrix}, \quad u_b^2 = \begin{pmatrix} 0.499 \\ 0.501 \end{pmatrix},$$

スキムの適用に際しては、要求精度を指定するパラメータ (ε) は $\varepsilon = 1.0E-8$ とした。 u_a^2 を初期値とするときの実行結果については、($n=5$ のとき次数判定が真となり) 下記の表の a に示される通りである。なお Newton 反復回数は 2~5 までの各 n ではすべて1回だけであった。 $n=5$ の最終的な連続近似解 $u^*_5(x)$ に対する誤差のノルムは $5.284E-8$ であり、概ね要求精度 ($1.0E-8$) を満たしている。

u_b^2 を初期値とする場合にも $n=5$ のとき次数判定が真となり、下記の表の b に示される通りになる。しかし、表からも分かるように $n=5$ の最終的な連続近似解の誤差 (ノルム) は $6.096E-12$ となり、要求精度と比べ精度が良すぎる。これは経済的ロスを意味する。この原因は次数判定に問題があると考えられる。なお Newton 反復回数は 2~5 までの各 n ではすべて1回だけであった。

例 2 の Hammerstein 方程式に対する適用結果

選 点	解の区別	選点上の近似解	絶対誤差
$x_1 = -0.906179845938664$	解 a	-4.10068880587440	$-3.535D-09$
$x_2 = -0.538469310105683$		-2.27935749143068	$2.889D-07$
$x_3 = 0.000000000000000$		0.500000000000000	$0.000D+00$
$x_4 = 0.538469310105683$		3.27935749143068	$-2.889D-07$
$x_5 = 0.906179845938664$		5.10068880587440	$3.535D-09$
$x_1 = -0.906179845938664$	解 b	0.502195355827321	$-4.118D-12$
$x_2 = -0.538469310105683$		0.500569848593646	$-4.022D-13$
$x_3 = 0.000000000000000$		0.500000000000000	$0.000D+00$
$x_4 = 0.538469310105683$		0.499430151406353	$4.022D-13$
$x_5 = 0.906179845938664$		0.497804644172679	$4.118D-12$

参 考 文 献

- 1) 鈴木千里：不動点方程式による非線形積分方程式の数値解法，情報処理学会論文誌，第31巻，第9号，1269-1279 (1990)。
- 2) 鈴木千里：無限次元問題 (積分方程式) の解の存在に対する存在保証，1992年度京大数理解析研・短期共同研究 (精度保証付き数値計算法とその応用)
- 3) Amann, H. : *Über die näherungsweise Lösung nichtlinearer Integralgleichungen*, Numer. Math., Vol.19, pp.29-54 (1972)。
- 4) Hochstadt, H. : *Integral Equations*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 282pp. (1973)。
- 5) Shimasaki, M. & Kiyono, T. : *Numerical Solution of Integral Equations in Chebyshev Series*, Numer. Math., Vol.21, pp.373-380 (1973)。