

バレー法

Tunneling effect in imaginary time path-integral formulation

東京大学 物性研究所 佐藤 昌利¹

経路積分の配位空間の幾何学的な構造が量子論にどのように反映されるかを、「谷の構造」に注目して調べた。1) 摂動論とトンネル効果との関係、2) トンネル効果による量子論的な不安定性、の2つの話題について、それがどのような幾何学的な構造から理解できるかを説明する。

1 経路積分における谷とは

まず、「谷」を定義する。簡単な例として、作用 S が

$$S(x, y) = y^2 + \frac{1}{2}x^2 - x^2y \quad (1)$$

で与えられる場合を考える。作用 S を高さとして、この作用を書くと図1のようになり、谷の構造がある。この谷を式で表す為に等高図を考えてみる。(図2) 各等高線上で傾き

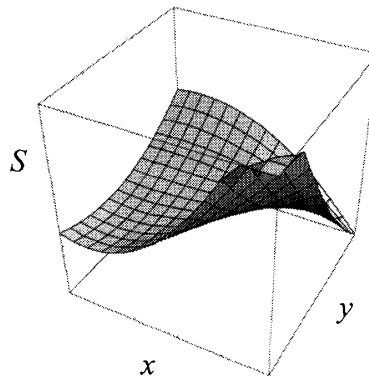


図 1: $S(x, y) = y^2 + 1/2 x^2 - x^2 y$ の谷

$\sum_{i=1,2} (\partial S / \partial x_i)^2, (x_1 = x, x_2 = y)$ を極小化する点を考え、それをつなげると、ちょうど谷に対応している事が分かる。つまり、 λ をラグランジュの未定乗数として、谷上の点は方程式

$$\delta \left(\sum_{i=1,2} \left(\frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 - \lambda S \right) = 0,$$

¹E-mail: msato@issp.u-tokyo.ac.jp

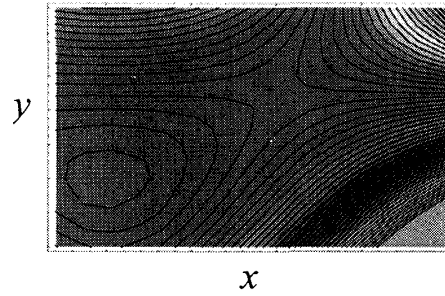


図 2: $S(x, y) = y^2 + 1/2x^2 - x^2y$ の等高図

$$\sum_{j=1,2} \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial S}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial S}{\partial x_i}, \quad (x_1 = x, x_2 = y) \quad (2)$$

で定義することができる。

この方程式を量子力学や場の量子論の作用に拡張することは容易である。作用が $S[q(\tau)]$ である量子力学系に対しては

$$\int d\tau' \frac{\delta^2 S}{\delta q(\tau) \delta q(\tau')} \frac{\delta S}{\delta q(\tau')} = \lambda \frac{\delta S}{\delta q(\tau)}, \quad (3)$$

作用が $S[\phi(x)]$ である場の量子論に対しては

$$\int dx' \frac{\delta^2 S}{\delta \phi(x) \delta \phi(x')} \frac{\delta S}{\delta \phi(x')} = \lambda \frac{\delta S}{\delta \phi(x)}, \quad (4)$$

で、谷を定義することができる。

2 摂動論とトンネル効果の関係

一般に量子力学の摂動論は漸近展開であり、その級数は収束しない。例えば、分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}q e^{-S[q]/g^2} \quad (5)$$

を摂動論で計算すると

$$Z_P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g^{2n}, \quad |c_n| \stackrel{n \rightarrow \infty}{\approx} n! \quad (6)$$

という級数が得られ、これはどんなに小さい結合定数 g に対しても収束しない。しかし、この級数を形式的に収束させる事は可能である。まず、

$$\begin{aligned} Z_P &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n g^{2n} \\ &= \frac{1}{g^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \frac{c_n}{n!} t^n e^{-t/g^2} \end{aligned} \quad (7)$$

と変形しておいて、その後、形式的に和と積分を交換する。すると、

$$Z_P = \frac{1}{g^2} \int_0^\infty dt F(t) e^{-t/g^2}, \quad F(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n!} t^n \quad (8)$$

という表式を得る。この時現れる和 $F(t)$ は元々の級数と異なって、 t が十分に小さい場合には絶対収束している。そこで式 (8) の積分経路を適当な区間に変形すると、 Z_P を数学的に意味のある表式に変える事ができる。

このようにして、発散級数を収束級数に変える方法はボレル総和法と呼ばれているが、問題はその物理的な意味がはっきりしない事である。以下では、このボレル総和法の物理的な意味、例えば積分変数 t の物理的な意味が、谷の構造から明らかになる事を示そう。ボレル総和法の物理的な意味づけを考えることより、トンネル効果と摂動論の関係も明らかになる。

問題を具体的に扱う為に、次の作用で表される量子力学系 (図 3) を考える。

$$S[q(\tau)] = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \dot{q}^2 + V(q) \right], \quad V(q) = \frac{1}{2} q^2 (1 - gq)^2 - \epsilon g q. \quad (9)$$

まず、この模型の谷を式 (3) で求めると、図 4 のようになる。特徴的なのは、谷はトンネ

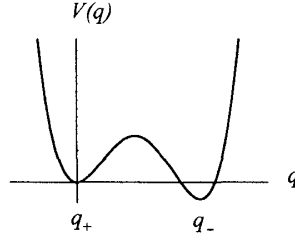


図 3: 非対称 2 重井戸

ル効果を表す配位 ($R = 0$) と摂動論を表す配位 ($R \rightarrow \infty$) を両方とも含んでいる事である。この谷の寄与を取り入れて、分配関数 Z を評価しよう。経路積分を谷からの寄与とその周りの揺らぎの寄与とに分けて、先に揺らぎの部分を積分してしまうと、

$$Z = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle q_f | e^{-HT} | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q e^{-S(q)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-T/2}}{\pi g^2} \int_0^T dR (T - R) e^{-\tilde{S}(R)/g^2},$$

$$\tilde{S}(R) = \begin{cases} \sigma R^2 & R \rightarrow 0 \\ \frac{1}{3} - 2e^{-R} - \epsilon g^2 R & R \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (10)$$

となる。更に $t = \tilde{S}(R) + \epsilon g^2 \int d\tau q(\tau)$ で積分変数を R から t に変えると

$$Z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{T/2}}{\pi g^2} \int_{C_V} dt e^{-t/g^2} F(t), \quad F(t) = \begin{cases} \frac{T}{\sqrt{4\sigma t}} & t \rightarrow 0 \\ \frac{1}{1/3-t} \left(\frac{1/3-t}{2} \right)^{-\epsilon} \ln \left(\frac{1/3-t}{1/3-x} \right) & t \rightarrow 1/3 \end{cases}, \quad (11)$$

となり、式 (8) に非常に似た形に直す事ができる。更に、図 5 のように、積分経路 C_V を C_P と C_{NP} の和の形に書き直すと、

$$Z = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{T/2}}{\pi g^2} \int_{C_P} dt e^{-t/g^2} F(t) + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{T/2}}{\pi g^2} \int_{C_{NP}} dt e^{-t/g^2} F(t) \quad (12)$$

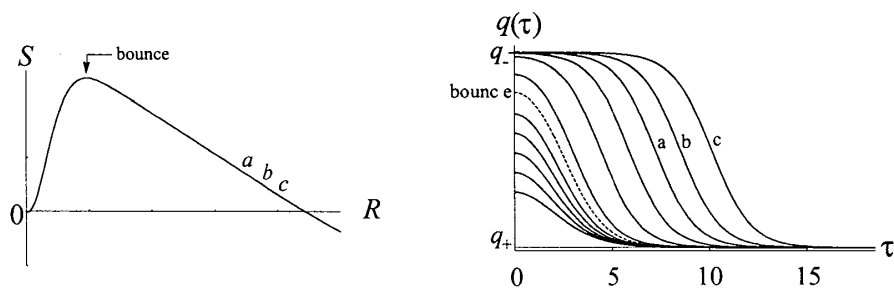


図 4: 谷の様子。左図は谷上の作用を $R = \int d\tau |q(\tau)|$ の関数として表しており、右図は谷上での $q(\tau)$ の様子を表す。 $R = 0$ では谷は $q(\tau) = q_+$ であり、 $q = q_+$ の周りの摂動論に対応する。 $R \rightarrow \infty$ では、谷は $q = q_+$ と $q = q_-$ をつなぐ instanton のような配位になり、トンネル効果を記述する。

となり、右辺第 1 項は摂動論のボレル和 Z_P そのものとなる。また、谷の配位には摂動論的な配位とトンネル効果を表す配位の両方が含まれていたため、右辺第 2 項は必然的にトンネル効果の寄与ということになる。

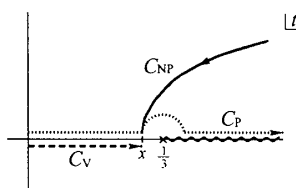


図 5: 積分経路。 x は $x = 1/3 - 2e^{-T/2}$ で定義される定数

以上の考察から、ボレル総和法に物理的な意味を与える事ができる。つまり、「ボレル総和法とは、谷の寄与を一部取り入れる方法であり、ボレル総和法における変数 t の積分とは、谷に沿った座標 R の積分である」。

式 (12) で与えられるトンネル効果と摂動論の関係には、実用上、重要な応用がある。まず、この関係式を使うことで、励起状態を含んだトンネル効果や、非対称井戸に対するトンネル効果を計算する事が可能となる。また、トンネル効果と摂動論の直接関係付くので、トンネル効果の計算から、摂動論の高次補正が計算可能となる。紙数の関係で、これらの結果については紹介しきれないので、直接論文を見てほしい。[1, 2]

3 トンネル効果による不安定性

図 6(a) の系を見てほしい。 $q = 0$ に静止している粒子は古典的には安定だが、量子論ではトンネル効果で、 $q \rightarrow \infty$ の無限の彼方に飛び去ってしまい、二度と $q = 0$ の状態には戻らない。そして、この不安定性を反映してエネルギーに虚部が現れる。このようにトンネル効果で不安定となる系に特徴的な配位は何であろうか？ 標準的なテキストには、負の

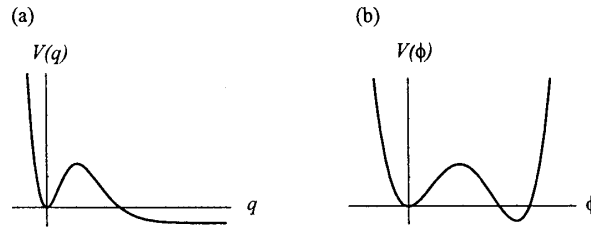


図 6: (a) トンネル効果で不安定になる系。(b) トンネル効果で 1 次相転移をおこす系。

モードの揺らぎを持つ古典解、いわゆるバウンス解が、そのような配位であると書いてある。[3] この考えは一見もっともらしいが、図 3 で示した 1 次元量子力学系と比べると、疑問が生じる。図 3 の系にもトンネル効果があり、バウンス解もあるが、エネルギーは常に実数で、安定した系となっているからである。

場の理論を考えてみると、問題は更に複雑になる。(図 6(b)) この場合には、偽の真空 ($\phi = 0$) はトンネル効果で本当の真空に崩壊してしまうと、決して元に戻る事はない。つまり不安定である。このように、同じ形のポテンシャルであっても、図 3 のような量子力学では安定であり、図 6(b) のような場の量子論では不安定であるということがある。これらの違いを理解するには、バウンス解を調べるだけでは不十分である。

今回、この違いを理解するために、その配位空間の谷の構造を詳しく調べた。その結果、分かったことだが、安定である系と不安定な系とでは、谷の揺らぎの構造に顕著な違いがある。不安定な系では、谷にゼロモードや負モードの揺らぎが無数に現れる。一方、安定な系ではこのような振る舞いは見られない。したがって、系の安定性を決めているのは、バウンス解とこの無数の不安定モードの有無であると考えられる。解析の詳細については、論文 [4] に詳しく書くので、そちらを参照してもらいたい。

参考文献

- [1] H. Aoyama, H. Kikuchi, I. Okouchi, M. Sato and S. Wada, *Nucl. Phys.* **B553**[PM] (1999) 644-710,
- [2] M. Sato and T. Tanaka, *J. Math. Phys.* **43**(2002) 3484-3510.
- [3] S. Coleman, "The use of Instantons" in "The Why's of Subnuclear Physics", ed. A. Zichichi (Plenum, New York, 1979)
- [4] M. Sato, in preparation