

Jacobi 形式と *theta lifting*

三重大・教育 菅野孝史 (Takashi Sugano)

2 次 Siegel 尖点形式 (重さ k) の空間においては、Maass space とよばれる特別な部分空間が存在し、それが Saito-Kurokawa lifting I の像と一致していることが知られている。また、Kohnen [05] により、 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $2k-2$ の尖点形式 f が Hecke 作用素の同時固有関数であるとき、 $I^* I(f)$ (I^* は I の随伴写像) は $I(f)$ の定数倍になり、その定数は f の L 関数の特殊値の言葉で記述される。この結果を IV 型領域の場合に一般化する。この場合、*lifting* I は、Oda [11], Rallis-Schiffmann [12] により構成されていることに注意する。ただし、ここでは全ての議論を Jacobi 形式の立場ですすめる。

§1. Jacobi 形式

S を、 m 次 even integral な正定値対称行列で、 $L = \mathbb{Z}^m$ が極大 $\mathbb{Z}$ -integral lattice となるものとする。符号 $(2, m+2)$

の対称行列 $Q = \begin{bmatrix} J & -S^J \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を考え、その直交群を G であらわす。

$$H_S(\mathbb{Q}) = \left\{ [\beta, \gamma, \zeta] = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & 1 & \beta \\ & & & \gamma \\ & & & & \zeta \end{bmatrix} \in G; \beta, \gamma \in V_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^m, \zeta \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$G'(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b & & \\ -c & d & & \\ & & 1 & \\ & & & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in G; \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Q}) \right\} \cong SL_2(\mathbb{Q})$$

で生成される G の部分群を G_S とおく。 G_S は H_S と G' の半直積 ($H_S \triangleleft G_S$) であり、その中心は H_S の中心 $Z_S = \{[0, 0, \zeta]\}$ と一致してゐる。特に G_S は *non-reductive* である。まず Jacobi form と呼ばれる、 G_S 上の保型形式を導入することから始める。

G_S の実点のなす群 $G_{S,\infty}$ は、 $\mathcal{D}_S = \{Z = (z, w); z \in \mathfrak{h}_g, w \in \mathbb{C}^m\}$ ($\mathfrak{h}_g$ は上半平面) に、

$$(1.1) \quad [\beta, \gamma, \zeta] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \langle (z, w) \rangle = \left(\frac{az+b}{cz+d}, w \frac{1}{cz+d} + \beta \frac{az+b}{cz+d} + \gamma \right)$$

により推移的に作用してゐる。一点 $Z_0 = (z, 0)$ の固定化部分群は、 $Z_{S,\infty} \cdot SO(2)$ である。自然数 k, N に対し、

$$(1.2) \quad J_{k,N}([\beta, \gamma, \zeta] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, (z, w)) = (cz+d)^k \left\{ N \left\{ -\zeta + \frac{c}{2} S[w] \frac{1}{cz+d} - S(\beta, w) \frac{1}{cz+d} - \frac{az+b}{cz+d} \frac{1}{2} S[\beta] \right\} \right\}$$

は、 $G_{S,\infty} \times \mathcal{D}_S$ 上の正則保型因子となつてゐる。そこで、

$\Gamma_S = G_{S,\infty} \cap SL_{m+4}(\mathbb{Z})$ に関する weight k , index N の Jacobi cusp form の空間 $\mathcal{C}_{k,N}(\Gamma_S)$ を、次の条件をみたす $\mathcal{D}_S$ 上の正

則関数 f の全体として定義する: $\forall \gamma \in \Gamma_S, \forall Z \in \mathcal{D}_S$ に対し,
 $f(\gamma \langle Z \rangle) = J_{k,N}(\gamma, Z) f(Z)$ & $\sup_{g \in G_{S, \infty}} |f(g \langle Z_0 \rangle) J_{k,N}(g, Z_0)| < \infty$.
 $\mathcal{G}_{k,N}(\Gamma_S)$ は有限次元で、テータ関数を通して、 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $k - \frac{N}{2}$ のある種の (vector 値) 正則尖点形式の空間と同型になることがわかる。Petersson 内積を

$$(1.3) \quad \langle f_1, f_2 \rangle_{k,N} = \int_{\Gamma_S \backslash \mathcal{D}_S} f_1(Z) \overline{f_2(Z)} y^k e^{-2\pi y N S[3]} dZ$$

$$\left(Z = (z, 3z + \eta), \quad z = x + iy, \quad dZ = \frac{dx dy}{y^2} d\eta \right)$$

と正規化しておく。

次に Shintani [15] に従い、 $G_{S,p} = G_S(\mathbb{Q}_p)$ の Hecke 環を導入する (cf. Murase [09])。各素数 p に対し、

$$(1.4) \quad \mathcal{H}_{S,p} = \left\{ \phi: G_{S,p} \rightarrow \mathbb{C}; \begin{array}{l} \phi([0, 0, 3] K_1 g K_2) = \chi_p(z) \phi(g) \\ \forall K_1, K_2 \in K_{S,p}, \forall z \in \mathbb{Q}_p \end{array} \right\}$$

$$Z_{S,p} \backslash \text{supp } \phi = \text{compact}$$

とおく。ここで、 $K_{S,p} = G_S(\mathbb{Z}_p)$ で χ_p は $\chi_\infty(x) = e[x]$ と同じ $\mathbb{Q} \backslash \mathbb{Q}_A$ の指標 $\chi = \prod_v \chi_v$ の p -成分。 $Z_{S,p} \backslash Z_{S,p} K_{S,p}$ 上の convolution により $\mathcal{H}_{S,p}$ は $\mathbb{C}$ -algebra となる。 $L'_p = \{ x \in S^{-1} L_p; \frac{1}{2} S[x] \in p^{-1} \mathbb{Z}_p \}$ は $\mathbb{Z}_p$ -module で、 L'_p / L_p は有限体 $\mathbb{Z}_p / p \mathbb{Z}_p$ 上の 2 次形式 $\frac{1}{2} S[x]$ 付きのベクトル空間をなす。その次元 ∂_p は、 L の極大性の仮定より、2 以下である (殆んど p で $\partial_p = 0$)。 $\mathcal{H}_{S,p}$ の特別な元 $\phi_{1,p}, \phi'_{0,p}$ を以下のように定義する。

$$\phi_{1,p}([{}^P P^{-1}]) = 1, \quad \text{supp } \phi_{1,p} = Z_{S,p} K_{S,p} [{}^P P^{-1}] K_{S,p},$$

$$(1.5) \quad \phi'_{0,p}([0, y, 0]) = p^{-\partial_p} \quad \text{if } y \in L'_p,$$

$$\text{supp } \phi'_{0,p} = Z_{S,p} K_{S,p} \{[0, y, 0]; y \in L'_p\} K_{S,p}.$$

$\partial_p = 0$ ならば $\phi'_{0,p}$ は $\mathcal{H}_{S,p}$ の単位元である。直接計算により、

Lemma 1 (i) $\phi'_{0,p} * \phi_{1,p} = \phi_{1,p} * \phi'_{0,p} = \phi_{1,p},$

(ii) $\phi'^2_{0,p} = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial_p = 1 \\ (1-p^{-1})\phi'_{0,p} + p^{-1} & \text{if } \partial_p = 2 \end{cases}.$

$\phi_{1,p}$ と $\phi'_{0,p}$ で生成される $\mathcal{H}_{S,p}$ の (可換) subalgebra を $\mathcal{H}'_{S,p}$ と書く。 $\partial_p = 0, 1$ のときは $\mathcal{H}'_{S,p} = \mathcal{H}_{S,p}$ であるが、 $\partial_p = 2$ の場合には $\mathcal{H}'_{S,p}$ は $\mathcal{H}_{S,p}$ の真の subalgebra となる。 $\mathcal{H}'_{S,p}$ の指標 λ に対し、L 関数を次式で定義する。

$$(1.6) \quad L_p(\lambda; \mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} B_{S,p}(p^{-\mathcal{A}}) \left\{ 1 - (\lambda(\phi_{1,p}) p^{-(1+\frac{m}{2})} - p^{\partial_p - \frac{n_{0,p}}{2} + p^{-1+\frac{n_{0,p}}{2}}}) p^{-\mathcal{A}} + \lambda(\phi'_{0,p})^{-1} p^{-2\mathcal{A}} \right\}^{-1} \\ \times \begin{cases} (1 - \chi_S(p) p^{-\mathcal{A}})^{-1} & \text{if } m: \text{even} \\ 1 & \text{if } m: \text{odd} \end{cases},$$

$\tau = \tau^*$, $n_{0,p} = m - 2\nu_p$ (ν_p は S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index), $\chi_S(p)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m(m-1)} \det S}) / \mathbb{Q}$ の Legendre symbol τ であり、

$$B_{S,p}(T) = \begin{cases} 1 & \dots \dots \partial_p = 0 \text{ or } (n_{0,p}, \partial_p) = (2, 1), \\ 1 + p^{1/2} T & \dots \dots (n_{0,p}, \partial_p) = (1, 1), \\ (1 + pT)(1 + T) & \dots \dots (n_{0,p}, \partial_p) = (2, 2) \\ 1 - p^{1/2} T & \dots \dots (n_{0,p}, \partial_p) = (3, 1) \\ (1 + p^{1/2} T)(1 - p^{1/2} T) & \dots \dots (n_{0,p}, \partial_p) = (3, 2) \\ (1 - pT)(1 - T) & \dots \dots (n_{0,p}, \partial_p) = (4, 2) \end{cases}.$$

$\mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ の元は自然にアデール化群 G_{SA} 上の保型形式とみなされ、convolution により $\bigotimes_{p<\infty}' \mathcal{H}_{S,p}'$ が作用している。この作用は Petersson 内積に関して正規で、 $\mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ は $\bigotimes_{p<\infty}' \mathcal{H}_{S,p}'$ の同時固有関数からなる基底を有する。 $f \in \mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ が同時固有関数 $f * \phi = \lambda_f(\phi) f$ ($\forall \phi \in \bigotimes_{p<\infty}' \mathcal{H}_{S,p}'$) とき

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \xi(f; s) &= L_\infty(f; s) L(f; s) \\ L(f; s) &= \prod_{p<\infty} L_p(\lambda_f; s) \\ L_\infty(f; s) &= \begin{cases} 2^{-s} \pi^{-\frac{3}{2}s} (\det S)^{s/2} \Gamma(s+k-1-\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{s+a}{2}) & \text{if } m: \text{even} \\ (2\pi)^{-s} (\det S)^{s/2} \Gamma(s+k-1-\frac{m}{2}) & \text{if } m: \text{odd} \end{cases} \\ a &= \begin{cases} 1 & m \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & m \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} \end{aligned}$$

とおく。

Theorem 2 $f \in \mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ が $\bigotimes_{p<\infty}' \mathcal{H}_{S,p}'$ の同時固有関数とする。 $\xi(f; s)$ は全 s -平面上に有理型関数として解析接続され、関数等式 $\xi(f; s) = \begin{cases} -1 & m \equiv 1, 3 \pmod{8} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \xi(f; 1-s)$ を満たす。 $k \geq 2 + 2[\frac{m+3}{2}]$ ならば $\xi(f; s)$ は $s=0, 1$ に possible simple pole と他は正則であり、更に $m \not\equiv 6 \pmod{8}$ ならば entire となる。

この定理は、Jacobi 群上の実解析的 Eisenstein 級数の解析的性質に帰着することにより証明される。 G_S 上の Eisenstein series を Shintani に従って導入しておく。 $\beta \in V_\infty = \mathbb{R}^m$ とし、 $V_A = \mathbb{Q}_A^m$ 上の Schwartz-Bruhat 関数 $\varphi_{S,\beta,k} = \prod_{v \leq p} \varphi_v$ と、

$$\begin{cases} \varphi_p = \mathbb{Z}_p^m \text{ の 特征関数} \\ \varphi_\infty(x) = S(\beta, x)^\kappa \Theta\left[\frac{i}{2} S[x]\right] \quad \left(\kappa = k - 2\left[\frac{k}{2}\right]\right) \end{cases}$$

により定義する。 $\lambda \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 。

$$(1.8) \quad \varphi_{S, \beta, k} \left(\begin{bmatrix} t & x \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} [\xi, \eta, \zeta]^\kappa; \lambda \right) \\ = |t|_A^\lambda \varphi_{S, \beta, k}(\xi) \chi(-\zeta) j(\kappa_m, i)^k \quad \left(\kappa \in SO(2) \times \prod_{p < \infty} SL_2(\mathbb{Z}_p) \right)$$

とあく。 Eisenstein 級数を

$$(1.9) \quad E(g, \varphi_{S, \beta, k}; \lambda) = \sum_{\gamma \in P_{S, \mathbb{Q}} \backslash G_{S, \mathbb{Q}}} \varphi_{S, \beta, k}(\gamma g; \lambda + \frac{m+2}{2}) \\ \left(P_S = \{[0, *, *]\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \right\} \right)$$

と定義する。

Proposition 3 (i) $E(g, \varphi_{S, \beta, k}; \lambda)$ は $\operatorname{Re} \lambda > 1 + \frac{m}{2}$ で

広義 - 様絶対収束する。

$$(ii) \quad E^*(g, \varphi_{S, \beta, k}; \lambda) = f_{m, k}(\lambda) B_S^*(\lambda+1) \begin{cases} \xi(\chi_S; \lambda + \frac{1}{2}) & m: \text{even} \\ \xi(2\lambda+1) & m: \text{odd} \end{cases} \\ \times E(g, \varphi_{S, \beta, k}; \lambda) \quad \text{とあく。}$$

$$= = \tau \quad f_{m, k}(\lambda) = \Gamma\left(\frac{\lambda+1+k-m-1/2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+1+2\left[\frac{m+2}{2}\right]-\frac{m}{2}}{2}\right)^{-1}$$

$$B_S^*(\lambda) = \prod_{p < \infty} B_{S, p}(p^{-\lambda}) \times \begin{cases} |\det S / \Delta_0(S)|^{1/2} & m: \text{even} \\ |2^{-1} \det S|^{1/2} & m: \text{odd} \end{cases}$$

$$\Delta_0(S) = \mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m(m-1)/2} \det S}) / \mathbb{Q} \text{ の 判別式}$$

$$\xi(\lambda) = \pi^{-\lambda/2} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) \zeta(\lambda)$$

$$\xi(\chi_S; \lambda) = \pi^{-\lambda/2} |\Delta_0(S)|^{1/2} \Gamma\left(\frac{\lambda+a}{2}\right) L(\chi_S; \lambda), \quad a = \begin{cases} 0 & \chi_S(+1) = 1 \\ 1 & \chi_S(-1) = -1 \end{cases}$$

$E^*(g, \varphi_{S, \beta, k}; \lambda)$ は全 λ -平面に解析接続され、関数等式

$$E^*(g, \varphi_{S, \beta, k}; \lambda) = \begin{cases} -1 & m \equiv 2, 4 \pmod{8} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} E^*(g, \varphi_{S, \beta, k}; -\lambda)$$

をみたす。 $k \geq 2 + 2\left[\frac{m+2}{4}\right]$ ならば $\lambda = \pm \frac{1}{2}$ に高々 simple pole をもつ以外は正則であり、更に $m \not\equiv -1 \pmod{8}$ ならば entire である。

この主張は Shimura [14] にあるように全 2 の Fourier 係数を具体的に求めることにより示される。なお Arakawa [02] では index が一般の場合に、別の手法で証明されている。

$f \in \mathcal{G}_{k, 1}(\Gamma_S)$ を $G_{S, A}$ 上の関数とみておく。 $(a, \alpha) \in \mathbb{Q} \times V_{\mathbb{Q}}$ に対し (adelic) Fourier 係数を、

$$f_{(a, \alpha)}(g) = \int_{V_{\mathbb{Q}} \backslash V_A \times \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Q}_A} f([0, \eta, 0] \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g) \chi(-ax - S(\alpha, x)) d\eta dx$$

で定義する。 $(a, \alpha) \in \mathbb{Z} \times S^{-1}L$ に対し、 $S_{(a, \alpha)} = \begin{bmatrix} S & S\alpha \\ \alpha S & 2a \end{bmatrix}$ が正定値で、 $\mathbb{Z}^{m+1}$ が $S_{(a, \alpha)}$ に関して極大 $\mathbb{Z}$ -integral なとき (a, α) は reduced であると言うことにする。この時、

$$(1.10) \quad L([3, \eta, 3] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix}, 3 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

により G_S を $G_{S(a, \alpha)}$ に埋め込むことが出来る。Theorem 2 は、次の 2 つの Lemmas と、Proposition 3 からの直接の帰結である。

Lemma 4 (Shintani) (a, α) is reduced & $L: S \sim S_{(a, \alpha)}$,

$\beta = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ & $a < 0$. $\therefore a > 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{f, (a, \alpha)}(\lambda) &\sim \int_{\Phi_A^* \times V_A} f_{(a, \alpha)} \left(\begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) |t|_A^{\lambda-1-\frac{m}{2}} \\ &\quad \varphi_{S \sim, \beta, k} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ t \end{bmatrix} \right) d^*t d^*3 \\ &= \int_{Z_{S, A} \backslash G_{S, \mathbb{Q}} \backslash G_{S, A}} f(g) E(1/g), \varphi_{S \sim, \beta, k}(\lambda - \frac{1}{2}) dg \end{aligned}$$

Lemma 5 $f \in \mathcal{G}_{k, 1}(\Gamma_S)$ is $\bigotimes_{p < \infty} \mathcal{H}_{S, p}$ a simultaneous eigenfunction

(a, α) is reduced & $a > 0$. $\therefore a > 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{f, (a, \alpha)}(\lambda) &= G_{(a, \alpha)}(\lambda) L(f; \lambda) \prod_{p < \infty} B_{S \sim, p} (p^{-\lambda - \frac{1}{2}})^{-1} \\ &\quad \times \begin{cases} \zeta(2\lambda)^{-1} & \text{if } m: \text{even} \\ L(\chi_{S \sim}; \lambda + \frac{1}{2}) & \text{if } m: \text{odd} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tau \cdot G_{(a, \alpha)}(\lambda) &= (2a - S[\alpha])^k (\det S)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda + k + \kappa - 1 - \frac{m}{2}}{2}\right) \\ &\quad \times (2\pi(2a - S[\alpha]))^{-(\lambda + \kappa + k - 1 - \frac{m}{2})/2} \end{aligned}$$

§ 2. theta lifting

G a real point a unitary component G_{∞}^+ is a domain

$$\mathcal{D} = \left\{ z = \begin{bmatrix} \tau \\ w \\ z \end{bmatrix}; \operatorname{Im} \tau > 0, \operatorname{Im} \tau \cdot \operatorname{Im} z - \frac{1}{2} S[\operatorname{Im} w] > 0 \right\} \quad (=$$

$$(2.1) \quad g z \sim (g \langle z \rangle) \sim j(g, z), \quad z \sim = \begin{bmatrix} -\tau z + \frac{1}{2} S[w] \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

と作用し、 $J(g, z)$ は、 $G_{\infty}^+ \times \mathcal{D}$ 上の正則保型因子となる。
 $\Gamma = G_{\infty}^+ \cap SL_{m+2}(\mathbb{Z})$ に関する weight k の正則尖点形式の空間 $S_k(\Gamma)$ を、

$$f(\gamma \langle z \rangle) = J(\gamma, z)^k f(z) \quad \forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathcal{D}$$

$$\sup_{g \in G_{\infty}^+} |f(g \langle z_0 \rangle) J(g, z_0)^{-k}| < \infty \quad (z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix})$$

を満足する $\mathcal{D}$ 上の正則関数 f の全体として定義する。同様
 に、 $\Gamma^* = \{ \gamma \in \Gamma; (\gamma-1)Q^{-1} \in M_{m+2}(\mathbb{Z}) \}$ に関する正則尖
 点形式の空間 $S_k(\Gamma^*)$ が定義される。 $S_k(\Gamma^*)$ の内積を、

$$(2.2) \quad \langle F_1, F_2 \rangle_k = \int_{\Gamma^* \backslash \mathcal{D}} F_1(z) \overline{F_2(z)} \left(\operatorname{Im} \tau \cdot \operatorname{Im} z - \frac{1}{2} S[\operatorname{Im} w] \right)^{k-(m+2)} d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z)$$

と normalize してある。

各 $F \in S_k(\Gamma^*)$ は、

$$\begin{aligned} F\left(\begin{bmatrix} \tau \\ w \\ z \end{bmatrix}\right) &= \sum_{\substack{\eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ b \end{bmatrix} \\ a, b \in \mathbb{Z}, \alpha \in S^{-1}L, ab - \frac{1}{2}S[\alpha] > 0}} a_F(\eta) e[a\tau + b\tau - S(\alpha, w)] \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} F_N(z, w) e[N\tau] \end{aligned}$$

と、Fourier 展開, Fourier-Jacobi 展開される。定義より F_N は $\mathcal{O}_{k,N}(\Gamma_S)$ に属する：とわかる。逆に、 $f \in \mathcal{O}_{k,1}(\Gamma_S)$ に対し、

$$(2.3) \quad I(f)\left(\begin{bmatrix} \tau \\ w \\ z \end{bmatrix}\right) = \sum_{N=1}^{\infty} (V_N f)(z, w) e[N\tau],$$

$$\begin{aligned} (V_N f)(z, w) &= N^{k-1} \sum_{\substack{B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ \eta \in SL_2(\mathbb{Z}) \backslash T(N)}} (cz+d)^{-k} e\left[-\frac{cN}{2}S[w](cz+d)^{-1}\right] \\ &\quad \times f\left(\frac{az+b}{cz+d}, w \frac{N}{cz+d}\right) \end{aligned}$$

とあく $I(f) \in S_k(\Gamma^*)$ となる ([17]).

$$I: \mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S) \longrightarrow S_k(\Gamma^*)$$

を *theta lifting* と呼ぶ. これは Zagier [18] ($m=1$), Gritsenko [04], Kojima [07] ($m=2$) の一般化である. また, Oda [11], Rallis-Schiffmann [12] の構成の Jacobi form version である. (1.3), (2.2) で normalize した内積に関する I の随伴写像を I^* とあらわす: $I^*: S_k(\Gamma^*) \longrightarrow \mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ I による $\mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ の元の像が Γ に関する保型形式となる条件を与えておく.

Lemma 6 $f \in \mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ とする.

$$I(f) \in S_k(\Gamma) \iff f * \phi'_{0,p} = f \quad \forall p < \infty$$

G_p と $K_p = G(\mathbb{Z}_p)$ の組で決まる Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ の構造は, Satake

同型 $\mathcal{H}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_{\nu_p}^{\pm 1}]^{W_{\nu_p}} \quad \left(\begin{array}{l} W_{\nu_p}: \text{Weyl 群} \\ \nu_p: \mathbb{Q} \text{ の } \mathbb{Q}_p \text{ 上の Witt 指数} \end{array} \right)$

により記述される ([13]). $\mathcal{H}_p$ の指標 λ に対し, その L 関数を

$$(2.4) \quad L_p(\lambda; s) = \lambda \left(\prod_{j=1}^{\nu_p} (1 - X_j p^{-s})(1 - X_j^{-1} p^{-s}) \right)^{-1} \\ \times \begin{cases} 1 & (n_{0,p}, \partial_p) = (0,0), (1,0) \\ (1 + p^{1/2-s}) & (1,1) \\ (1 - p^{-2s})^{-1} & (2,0) \\ (1 - p^{-s})^{-1} & (2,1) \\ (1 - p^{-s})^{-1} (1 + p^{1-s}) & (2,2) \\ (1 - p^{-1/2-s})^{-1} & (3,1) \\ (1 - p^{-1/2-s})^{-1} (1 + p^{1/2-s}) & (3,2) \\ (1 - p^{-s})^{-1} (1 - p^{-1-s})^{-1} & (4,2) \end{cases}$$

と定める。 $F \in S_k(\Gamma)$ が $\bigotimes_{p<\infty}' \mathcal{H}_p$ の同時固有関数 α とし

$$L(F; \Delta) = \prod_{p<\infty} L(\lambda_F; \Delta)$$

と置く。これは F a standard L 関数である。

Proposition 7 $f \in \mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ を $f * \phi'_{0,p} = f \quad \forall p < \infty$ なる $\bigotimes_{p<\infty}' \mathcal{H}_{S,p}$ の同時固有関数とする。このとき $I(f)$ は $\bigotimes_{p<\infty}' \mathcal{H}_p$ の同時固有関数であり

$$L(I(f); \Delta) = L(f; \Delta) \prod_{j=0}^m \zeta(\Delta + j - \frac{m}{2}) \quad \text{が成立する。}$$

$F \in S_k(\Gamma^*)$ α とし I^*F a Fourier 係数は F a period の言葉で記述される。このことは Oda [11] の議論を我々の状況で追跡する α によ, り得られる。 I^*F a Fourier 展開を

$$I^*F(z, w) = \sum_{a \in \mathbb{Z}, \alpha \in S^{-1}L} a_{I^*F}(a, \alpha) e[az + S(\alpha, w)] \quad \alpha \text{ とする。}$$

Proposition 8 $k > 2m+4$, $F \in S_k(\Gamma^*)$ とする。 (a, α) が reduced ならば

$$a_{I^*F}(a, \alpha) = C \cdot (a - \frac{1}{2}S(\alpha))^{-\frac{k-m-1}{2}} \int_{\Gamma_{\gamma^{\sim}}^* \setminus G_{\gamma^{\sim}, \infty}^+} F(h g_{\gamma}) \omega_{\gamma}(h),$$

$\Rightarrow \gamma^{\sim} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$, $\gamma = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$ で $G_{\gamma^{\sim}}$ は $\gamma^{\sim}$ の固定化部分群,

$\omega_{\gamma}(h)$ は $G_{\gamma^{\sim}, \infty}^+$ の (具体的に定めらる) Haar measure,

C は (具体的にわかる) 定数であり、 g_{γ} は適当にえらる

$\in G_{\infty}^+$ の π 。

§ 3 主結果

Theorem 9 $k > 2m+4$ とし、 $f \in \mathcal{G}_{k,1}(\Gamma_S)$ が $\bigotimes_{p < \infty} \mathcal{H}'_{S,p}$ の同時固有関数であるとする。このとき、

$$I^* I(f) = C'_{S,k} L(f; 1 + \frac{m}{2}) f \quad \text{が成立する.}$$

$$C'_{S,k} = \begin{cases} 4 C_{S,k} & \text{if } -1 \in \Gamma^* \\ 2 C_{S,k} & \text{if } -1 \notin \Gamma^* \end{cases},$$

$$C_{S,k} = (\det S)^{\frac{m+1}{2}} \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} B_{2j} \times (4\pi)^{-k} \Gamma(k) \\ \times \begin{cases} 2^{-m/2} \pi^{-1-m/2} & \text{if } m: \text{even} \\ 2^{-\frac{m+1}{2}} \Gamma(\frac{m+3}{2})^{-1} & \text{if } m: \text{odd} \end{cases},$$

$$B_{2j} = 2(2\pi)^{-2j} \Gamma(2j+1) \zeta(2j) : \text{Bernoulli 数}$$

この Theorem より直ちに次の結果を得る。

Corollary 10 Theorem 9 と同じ状況下において、

$$\langle I(f), I(f) \rangle_k = C'_{S,k} L(f; 1 + \frac{m}{2}) \langle f, f \rangle_{k,1}.$$

[証明の概略] $(a, \alpha) \in \mathbb{Z} \times S^+L$ が reduced だとし、

$S \sim S_{(a, \alpha)}$ の直交群を H , $[1, S^{-1}]$ の直交群を H_1 と書く。

$F = I(f)$ に対し、次の等式が出発点となる。

$$(3.1) \quad \int_{H_1 \backslash H} F(h g_\eta) E(g, 1; \alpha - \frac{1}{2}) dh \\ = \text{vol}(H_0 \backslash H_A) \Gamma(\alpha + k - 1 - \frac{m}{2}) (4\pi \sqrt{a - \frac{1}{2} S[\alpha]})^{-(\alpha + k - 1 - \frac{m}{2})} \\ \times \zeta(\alpha - \frac{m}{2}) L(f, \alpha) \prod_{p < \infty} B_{S; p} (p^{-(\alpha + \frac{1}{2})})^{-1}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{ll} \zeta(2\alpha)^{-1} & \text{if } m: \text{even} \\ L(\chi_{S, \alpha + \frac{1}{2}})^{-1} & \text{if } m: \text{odd} \end{array} \right\} a_f(a, \alpha)$$

$\equiv \tau$. $E(9, 1; \alpha)$ は (Levi part の表現が trivial τ である) H_1 上の Eisenstein series ($H_1 \cong G_{\eta, \infty}$ τ である). 証明には [16] の議論 (Andrianov [01] の一般化) と Lemma 5 の議論が用いられる.

(3.1) の両辺の $\alpha = 1 + \frac{m}{2}$ τ の residue をとることにより,

$$\frac{(2\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2\alpha - S[\alpha])^{\frac{1}{2}} (\det S)^{\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(m+1)} \times \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{if } m: \text{even} \\ \frac{L(\chi_S; \frac{m+1}{2})}{\zeta(m+1)} & \text{if } m: \text{odd} \end{array} \right\}$$

$$\times \prod_{p < \infty} B_{S, p} (p^{-\frac{m+1}{2}}) \int_{\Gamma_{\eta, \infty}^* \backslash G_{\eta, \infty}^+} F(h g_{\eta}) \omega_{\eta}(h)$$

$$= \text{vol}(H_{\mathbb{Q}} \backslash H_A) \Gamma(k) (4\pi \sqrt{a - \frac{1}{2}S[\alpha]})^{-k} a_f(a, \alpha)$$

を得る。右辺の volume は, Siegel formula τ 計算されるから, Proposition 8 より)

$$(3.2) \quad a_{I^* I(f)}(a, \alpha) = c'_{S, k} L(f; 1 + \frac{m}{2}) a_f(a, \alpha)$$

が, reduced to (a, α) に対して成立する。Proposition 7, $\mathcal{H}'_{S, p}$ の構造から $I^* I(f)$ と f は同じ固有値をもつ $\bigotimes'_{p < \infty} \mathcal{H}'_{S, p}$ の同時固有関数であることがわかり, Theorem 9 が得られる。詳しくは [17] を参照された。なお, Corollary 10 に関しては別の証明が [10] τ 与えられている (Kohnen-Skoruppa [06] の一般化)。

References

- [01] Andrianov, A.N. : Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2 ; Russian Math. Surveys 29 (1974), 45-116.
- [02] Arakawa, T. : Real analytic Eisenstein series for the Jacobi group ; preprint.
- [03] Eichler, M. and Zagier, D. : The theory of Jacobi forms ; Progr. Math. vol.55, Birkhauser, 1985.
- [04] Gricenko, V. : Maass space for $SU(2,2)$, Hecke algebra and zeta function.
- [05] Kohnen, W. : On the Petersson norm of a Siegel-Hecke eigen form of degree two in the Maass space ; J. reine angew. Math. 357 (1985), 96-100.
- [06] Kohnen, W. and Skoruppa, N.-P. : A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two ; Invent. Math. 95 (1989), 541-558.
- [07] Kojima, H. : An arithmetic of hermitian modular forms of degree two ; Invent. Math. 69 (1982), 217-227.
- [08] Maass, H. : Uber eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III ; Invent. Math. 52 (1979), 95-124, 53 (1979), 249-253, 53 (1979), 255-265.
- [09] Murase, A.: L-functions attached to Jacobi forms of degree n , Part I The basic identity ; J. reine Angew Math. 401 (1989), 122-156.
- [10] Murase, A. and Sugano, T. : On standard L-functions associated with holomorphic cusp forms on $O(2,m+2)$; preprint.

- [11] Oda, T. : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$; Math. Ann. 231 (1977), 97-144.
- [12] Rallis, S. and Schiffmann, G. : Automorphic forms constructed from the Weil representation , Holomorphic case ; Amer. J. Math. 100 (1978), 1049-1122.
- [13] Satake, I. : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields ; Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 18 (1963), 229-293.
- [14] Shimura, G. : On the holomorphy of certain Dirichlet series ; Proc. London Math. Soc. 31 (1975), 79-98.
- [15] Shintani, T. : Unpublished notes.
- [16] Sugano, T. : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on $SO(2, q)$; Advanced Studies in Pure Math. 7 (1985), 333-362.
- [17] Sugano, T. : Jacobi forms and the theta lifting ; preprint.
- [18] Zagier, D. : Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'apres H. Maass) ; Seminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-1980, Progr. Math. vol.5 (1980), Birkhauser, 371-394.