

Intrinsic London Superconductor の 磁氣的性質

真 木 和 美 (京大数理研)

都 築 俊 夫 (京 大 理)

(1 0 月 2 2 日 受 理)

1 Ginzburg-Landau (GL) により導入された、negative surface energy の概念¹⁾は、いわゆる Landau 型超電導体の異常な磁氣的性質を説明する上で、非常に有効であるように思われる。実際、Abrikosov²⁾は、GL 方程式をくわしく解析することによつて、混合状態の存在を示した。

しかしながら、GL 方程式は、転移温度のすぐ近くでしか成立しないので、Abrikosov の picture が、より低温においても有効であるかどうか調べることは、意味があると思う。

以前に、Maki³⁾は、電子の mean free path が非常に短い超電導合金では、Abrikosov の理論は温度に無関係に、全く一般的に成立することを示した。

この論文では、intrinsic London superconductor (電子の mean free path は無限大) の場合について、混合状態の磁氣的性質を調べる。このような超電導体は自然界にはあまり存在せず (例、Nb, V) むしろ理想的な場合であるけれど、合金の結果と合せ考えると、London 型超電導体の一般的性質が明らかになると期待される。

この問題に必要な基礎方程式は、Gor'kov によりすでに得られているので、それらを変分法により解くと言うことになる。

subcritical region での Abrikosov の混合状態は、2つのパラメータ $\kappa_1(T)$ と $\kappa_2(T)$ を用いて完全に記述されることが分る。ここで $\kappa_1(T)$, $\kappa_2(T)$ は、次の様に定義されます。

$$\kappa_1(T) = H_{C2}(T) / \sqrt{2} H_C(T),$$

$$-4\pi \frac{\partial M}{\partial H} \Big|_{H=H_{C2}(T)} = \{ (2\kappa_2^2(T) - 1) \beta \}^{-1}.$$

κ_1 と κ_2 を実際に計算すれば、関係 $\kappa_2(T) \geq \kappa_1(T) \geq \kappa$ が成立しており、絶対

真木・都築

零度の近くで、 $\kappa_2(T)$ は $[\ln T_{C0}/T]^{1/2}$ のように発散することが分る。

2 始めに、Gor'kov によつて得られた結果 ($H_{C2}(T)$ の計算) を復習しておこう。⁴⁾ 磁場が十分強い場合には、秩序パラメータ $\Delta(r)$ は小さい ($\Delta/\pi T_{C0} \ll 1$) ので一般化された Gor'kov 方程式を Δ の巾級数にとくと⁵⁾

$$\begin{aligned} \Delta^+(r) = & g T \sum_n \int G_\omega(r', r) G_{-\omega}(r', r) \Delta^+(r') d^3 r' \\ & - g T \sum_n \iiint G_\omega(s, r) G_{-\omega}(s, \ell) G_\omega(m, \ell) G_{-\omega}(m, r) \\ & \times \Delta^+(s) \Delta(\ell) \Delta^+(m) d^3 s d^3 \ell d^3 m, \end{aligned} \quad (1)$$

となる。ここで $\omega = \pi T(2n+1)$, $\Delta^+(r) = \langle T \psi_\uparrow^\dagger(r, t) \psi_\downarrow^\dagger(r, t) \rangle$. Δ について5次以上の項は無視した。

$$G_\omega(r, r') = e^{i\varphi(r, r')} G_\omega^0(r, r')$$

$$\varphi(r, r') = \int_{r'}^{r'} \vec{A}(\ell) \cdot d\vec{\ell}$$

は磁場中での正常金属中の電子のグリーン関数である。 $\vec{A}(\vec{r})$ はベクトルポテンシャル。

一方、電流密度は

$$\begin{aligned} j(r) = & \frac{ie}{m} (\nabla_r - \nabla_{r'}) T \sum_n \iiint G_\omega(r', s) G_\omega(\ell, s) G_{-\omega}(\ell, s) \\ & \times \Delta^+(\ell) \Delta(s) d^3 \ell d^3 s \big|_{r'=r} \end{aligned} \quad (2)$$

で与えられる。

方程式(1), (2)を一般化されたG-L方程式と呼んでもよい。

混合状態について話をする前に、upper critical field $H_{C2}(T)$ の計算をGor'kov に従つてやつておこう。よく知られているように、upper critical field $H_{C2}(T)$ は、それ以下の強さでは正常状態が不安定になる そのような磁場の強さの限界値であり、方程式(1)の線型部分から決められている。

磁場が z 方向を向いていて、その強さが H であるとする、面倒な計算の結果線型部分は

$$A(\xi) \ln\left(\frac{er d_{00} \delta}{v\sqrt{eH}}\right) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K_T(\xi, \xi') A(\xi') d\xi', \quad (3)$$

$$K_T(\xi, \xi') = \frac{2\pi T}{v} \int_0^{\infty} \frac{J_0[(\xi^2 - \xi'^2)\sqrt{u^2 - 1}] du}{u \sinh\left(\frac{2\pi T u}{v\sqrt{eH}} |\xi - \xi'|\right)} \theta(|\xi - \xi'| - \delta) \quad (4)$$

となる。ここで J_0 は 0 次のベッセル関数、 $\theta(x)$ は階段関数である。又 $\xi = \sqrt{eH} x$, $\ln r = C$ は Euler の定数である。

方程式(3)は変分関数 $A(\xi) = e^{-\xi^2}$ を用いて解かれ、 H_{C2} を決める方程式は、

$$\ln \frac{T}{T_{C0}} + f_0(\rho) = 0 \quad (5)$$

となる。ここで

$$f_0(\rho) = \int_0^{\infty} d\zeta \int_1^{\infty} \frac{du}{u} \cdot \frac{1 - J_0(\rho \xi^2 \sqrt{u^2 - 1}) e^{-\rho \xi^2}}{\sinh(\zeta u)} \quad (6)$$

$$\rho = \frac{v^2 e H_{C2}}{(2\pi T)^2}$$

$f_0(\rho)$ の漸近形は

$$f_0(\rho) = \frac{7\zeta(3)}{6} \rho - \frac{31}{10} \zeta(5) \rho^2 + \frac{381}{28} \zeta(7) \rho^3 - \frac{511}{6} \zeta(9) \rho^4 + \dots$$

for $\rho \ll 1$ (7)

$$= \ln(2e\sqrt{2r\rho}) + \frac{1}{\pi^2} \left\{ \zeta'(2) + \frac{\zeta(2)}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi^2 r \rho}\right) \right\} \frac{1}{\rho}$$

for $\rho \gg 1$ (8)

となり、従つて upper critical field $H_{C2}(T)$ は

$$H_{C2}(T) = \frac{1}{e v^2} \left(\frac{r d_{00}^2 e^2}{2} \right) \left[1 - \frac{8r}{\pi^2 e^2} \left\{ \zeta'(2) + \zeta(2) \ln\left(2e\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{T}{T_{C0}}\right) \right\} \times \left(\frac{T}{T_{C0}}\right)^2 \right]$$

for $T \ll T_{C0}$ (9)

真木・都築

$$= \frac{6}{7\zeta(3)} \cdot \frac{(2\pi T_{C0})^2}{e v^2} \theta \left[1 + \left\{ \frac{31}{5} \zeta(5) \left(\frac{6}{7\zeta(3)} \right)^2 - \frac{3}{2} \right\} \theta \right]$$

$$\text{for } \theta = \frac{T_{C0} - T}{T_{C0}} \ll 1 \quad (10)$$

$\kappa_1(T)$ を $\kappa_1(T) = H_{C2}(T) / \sqrt{2} H_C(T)$ で定義すると

$$\kappa_1(T) = 1.25 \kappa \left[1 + 0.65 \left(\frac{T}{T_{C0}} \right)^2 \ln \left(\text{const.} \cdot \frac{T}{T_{C0}} \right) \right]$$

$$\text{for } T/T_{C0} \ll 1 \quad (11)$$

$$= \kappa (1 + 0.41 \theta) \quad \text{for } \theta \ll 1 \quad (12)$$

となる。ここで

$$\kappa = \frac{3\pi m T_{C0}}{e} (2\pi / 7\zeta(3) m^4 v^5)^{1/2} \quad (13)$$

である。

以上の結果にもとづいて、Gor'kov は次の様な interpolation formula を与えた。

$$\sqrt{2} \kappa_1(T) = \kappa \left[1.77 - 0.43 \left(\frac{T}{T_{C0}} \right)^2 + 0.07 \left(\frac{T}{T_{C0}} \right)^4 \right] \quad (14)$$

実験データの解析は、この公式によっている。

3. ここでは、Abrikosov の混合状態を調べよう。磁場の強さが H_{C2} より少し小さくなつたとき、秩序パラメータはやはり小さいので次の仮定のもとに、方程式(1), (2)の解を調べてもよいであろう。即ち、 $\Delta(r)$ の関数形は

$$\Delta(x, y) = \sum_n C_n \psi_n(x, y) \quad (15)$$

$$\psi_n(x, y) = e^{ikny - eH(x - \frac{kn}{2eH})^2} \quad (16)$$

と取る。ここで n は整数, C_n , k は任意常数である。(C_n , k は自由エネルギーを極小にするように後に決める)^{1), 6)}

(15), (16)を(2)に代入すると

$$j_i(x, y) = \frac{eN}{m(2\pi T)^2} \sum_{n,m} C_n \psi_n C_m^+ \psi_m^+ I_i(x + \frac{k(n+m)}{4eH}, \frac{k(n-m)}{4eH}) \quad (17)$$

$$I_x(x, a) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{2\pi T}{v}\right)^3 \int \frac{d\varrho}{z} \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 A(x_1, x_2; x, a) \quad (18)$$

$$I_y(x, a) = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{2\pi T}{v}\right)^3 \int \frac{ia d\varrho}{z} \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 A(x_1, x_2; x, a) \quad (19)$$

$$A(x_1, x_2; x, a) = \left\{ \sinh\left(\frac{2\pi T}{vz} |x_1 + x_2|\right) \right\}^{-1} \\ \times \exp\{-eH\{(1-ia)(x_1^2 + 2x_1[x+a]) + (1+ia)(x_2^2 + 2x_2[a-x])\}\} \quad (20)$$

$$z = \cos \theta, \quad a = \tan \theta \cos \varphi$$

となる。上の表式から連続の方程式 $\partial \partial x / \partial x + \partial \partial y / \partial y = 0$ が成立していることがすぐ分る。それ故、Maxwell 方程式は直ちに積分出来て

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = H = H_0 - \frac{eN}{m(2\pi T)^2} \sum_{n,m} C_n \psi_n C_m^+ \psi_m^+ \\ \times J\left[x + \frac{k(n+m)}{4eH}, \frac{k(n-m)}{4eH}\right] \quad (21)$$

となる。或いは、小さなnonlocal 効果を見無視すると（高々 a few パーセントのエラーしかないことを示すことが出来る）

$$H = H_0 - \frac{6\pi eN}{m(2\pi T)^2} g(\rho) |A|^2 \quad (22)$$

$$J(x, a) = \int_{-\infty}^x I_y(x, a) dx \quad (23)$$

$$g(\rho) = \frac{df_0(\rho)}{d\rho} \quad (24)$$

となる。

(22)によつて与えられる induced field による磁場の変化を考慮して、(1)を解くと、この効果と(1)の右辺の第2項とが同程度の寄与をするので、

$$\frac{e v^2}{(2\pi T)^2} (H_{C2} - H_0) g(\rho) \overline{|A|^2} + \frac{1}{2(2\pi T)^2} \left[\frac{4\pi N}{3m} \left(\frac{3ev}{2\pi T} g(\rho) \right)^2 - f_1(\rho) \right] \overline{|A|^4} = 0 \quad (25)$$

をうる。ここで $\overline{|A|^2}$ 等は空間的平均を意味する。又

$$f_1(\rho) = \frac{1}{\pi} \int \frac{d\mathbf{Q}}{z^3} \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{\sinh(\frac{t}{z})} \int_0^1 du \int_0^v dv e^{-\rho t^2} A(u, v; \alpha) \quad (26)$$

$$A(u, v; \alpha) = \frac{(1-u)^2 + v^2}{2} - i\alpha \frac{(1-u)^2 - v^2}{2} + \frac{1+\alpha^2}{4} \quad (27)$$

である。 $f_1(\rho)$ の漸近形は local 近似で

$$f_1(\rho) = 7\zeta(3) - \frac{62}{3}\zeta(5)\rho + \frac{2159}{24}\zeta(7)\rho^2 \dots \quad \text{for } \rho \ll 1 \quad (28)$$

$$= 4\rho^{-1} [\{ \ell n(1+\sqrt{2}) \}^2 \ell n(24r\rho) + \text{const}] + O(\rho^{-2}) \quad \text{for } \rho \gg 1 \quad (29)$$

となる。(25)を用いれば、磁束密度 B は

$$\begin{aligned} B = \bar{H} &= H_0 - \frac{6\pi e N}{m(2\pi T)^2} g(\rho) \overline{|A|^2} \\ &= H_0 - \frac{H_{C2} - H_0}{\{2\kappa_2^2(T) - 1\}\beta} \end{aligned} \quad (30)$$

となる。従つて、自由エネルギーは

$$\begin{aligned} \Delta F_{SH} &\equiv F_{SH} - F_{S,0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[B^2 - \frac{(H_{C2} - B)^2}{\{2\kappa_2^2(T) - 1\}\beta + 1} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

となる。(31)から分るように、自由エネルギーは、 β が極小のとき、最大となる。論文 6)によれば、磁場の強さが極大となる点が、equilateral triangular lattice を形づくっているとき β が極小で、 $\beta = 1.159$ で与えられることが分る。又 $\kappa_2(T)$ は

$$\kappa_2(T) = \left[\frac{3m f_1(\rho)}{8\pi N} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{3ev}{2\pi T} g(\rho) \right]^{-1} \quad (32)$$

で与えられる。 $\kappa_2(T)$ の漸近形は、(7), (8), (24), (28), (29)を用いて

$$\begin{aligned} \kappa_2(T) &= \frac{2e}{3} \ln(1+\sqrt{2}) \sqrt{\frac{7\zeta(3)}{r}} \kappa \left[\ln \frac{T_{C0}}{T} \right]^{1/2} \\ &= 3.48 \kappa (\ln T_{C0}/T)^{1/2} \quad \text{for } T \ll T_{C0} \end{aligned} \quad (33)$$

$$= \kappa (1 + 4.63 \theta) \quad \text{for } T_{C0} - T \ll T_{C0} \quad (34)$$

で与えられる。

$\kappa_2(T)$ は温度が降ると共に急速に増大し、絶対零度では $(\ln T_{C0}/T)^{1/2}$ のように発散することが分る。(32), (33), (34)から一般の温度に対する $\kappa_2(T)$ の温度依存性はinterpolation formula

$$\kappa_2(T) = \kappa \left[1 + 12 \ln \frac{T_{C0}}{T} \right]^{1/2} \quad (35)$$

で表わされる。

最近、純粋な Nb の転移点における比熱の「とび」を Mc Conville と Serin⁷⁾が測定したが、それによると、 $\kappa_2(T)$ は温度が降ると共に急速に増加することを示している。

4 以上の結果から次のようなことが結論される。唯一つのパラメータ κ の代りに、2つのパラメータ κ_1 と κ_2 を導入すれば、Abrikosov's pictureはかなり広い応用領域をもっている。Maki による結果と合せ考えれば、純粋な超電導体でも、合金の場合でも、2つのパラメータ κ_1, κ_2 を用いてAbrikosovの構造は完全に特長づけられる。しかしながら、pure limit と dirty limit では著しい違いがある。即ち関係

$$\begin{aligned} \kappa_2(T) &\geq \kappa_1(T) \geq \kappa & \text{for pure limit} \\ \kappa_1(T) &\geq \kappa \geq \kappa_2(T) & \text{for dirty limit} \end{aligned} \quad (36)$$

真木・都築

が成立することに、その点が現われている。(等号は転移点で成立) $\kappa_1(T)/\kappa$ の温度変化及びその値は、不純物の密度にあまり依存しないが、 $\kappa_2(T)/\kappa$ は非常に強く依存する。しかも、温度が降ると、dirty limit では κ_2/κ は単調に減少し、 $T=0^\circ\text{K}$ では有限の値をもつのに反し、pure limit では、温度が降ると共に増大し(急速に)、 $T=0^\circ\text{K}$ では $[\ln(T_{\text{Co}}/T)]^{1/2}$ のように発散する。この相違は、素励起のスペクトラムの相違により説明される様に思われる。

即ち、不純物密度が十分大きいときには、磁場の効果は、Gapless superconductivity として説明されるが、pure な場合には、磁場の強さが H_{C_2} より少しでも小さくなると、素励起はエネルギー・ギャップをもつ。

Intrinsic London (Type II) 型超電導体は、第二種の相転移をする。合金の場合のように「第三種」相転移をする可能性はない。

以上のことから、London 型 (Type II) 超電導体の磁氣的性質はかなり明らかになつたと思われる。pure limit と dirty limit との結果は限界値を与えられられる。

最後に、G-L approach (自由エネルギーを $|A|^2$ で展開する方法) の有効性について少し議論しておこう。subcritical region では A は小さいのでそのような展開が可能とすれば

$$\Delta F = a \overline{|A|^2} + b \overline{|A|^4} + c \overline{|A|^6} + \dots \quad (37)$$

しかしながら、pure metal では係数 b は低温で $\ln T_{\text{Co}}/T$ のように発散する。係数 c について調べてもやはり発散する。従つて、絶対零度の近くで ΔF の正しい表式をうるためには most diverging terms を sum up しなければならない。これは実際に可能で、例えば $T=0^\circ\text{K}$ では

$$\Delta F = a \overline{|A|^2} + b' \ln\left(\frac{C T_{\text{Co}}^2}{\overline{|A|^2}}\right) \overline{|A|^4} \quad (38)$$

となることが分る。このことは、形式的な展開 (37) が、絶対零度の近くでだめになることを示している。(合金の場合には (37) は常に成立する)^{4), 8)}

最後に、この仕事について種々御討論下さいました松原先生・碓井先生にお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) V.L. Ginzburg, L.D. Landau : JETP 20 1064 (1950)
- 2) A.A. Abrikosov : JETP 32 1442 (1957) : Soviet Phys.—JETP 5 1174 (1957)
- 3) K. Maki : Physics 1 21 (1964)
- 4) L.P. Gor'kov : J.E.T.P. 36 1918 (1959) ; 37, 1407 (1959) ; Soviet Phys.—J.E.T.P. 9 1364 (1959) ; 10 998 (1960)
- 5) L.P. Gor'kov : J.E.T.P. 37 835 (1959) ; Soviet Phys.—J.E.T.P. 10 593 (1960)
- 6) W.H. Kleiner, L.M. Roth, S.H. Autler : Phys. Rev. 133 A1226 (1964)
- 7) T. McConville, B. Serini : Phys. Rev. Letters. 13 365 (1964)
- 8) P.G. de Gennes : to be published.