

非線形半群についての注意

早稻田大 教員 宮 寺 功

X は Banach 空間, X_0 は X の空でない部分集合とする. 下記の (i) ~ (iii) を満たす作用素 $T(t): X_0 \rightarrow X_0$ の族 $\{T(t); t \geq 0\}$ は contraction semi-group on X_0 と呼ぶことにする.

$$(i) \quad \|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|, \quad t \geq 0, \quad x, y \in X_0.$$

$$(ii) \quad T(0) = I, \quad T(t+s) = T(t)T(s), \quad t, s \geq 0$$

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow 0+} T(t)x = x, \quad x \in X_0.$$

$\{T(t); t \geq 0\}$ の i. g. A_0 , w. i. g. A' と下記の式により定義する.

$$A_0 x = \lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1} (T(h)x - x)$$

$$A' x = w\text{-}\lim_{h \rightarrow 0+} h^{-1} (T(h)x - x).$$

定義域 $D(A)$, 値域 $R(A)$ とともに X の部分集合である

ような, 必ずしも一価でない作用素 A を考える. かつ A に対して

$$\|Ax\| = \inf \{ \|x'\|; x' \in Ax \}$$

$$A^0 x = \{ x' \in Ax; \|x'\| = \|Ax\| \}$$

, $x \in D(A)$, とおく.

各 $x, y \in D(A)$, $x' \in Ax$, $y' \in Ay$ に対して

$$\operatorname{Re} (x' - y', s^*) \leq 0$$

を満たす $s^* \in F(x - y)$ が存在するとき, A は dissipative operator といふ, $\Rightarrow$ に $\operatorname{Re}(\cdot, \cdot)$ は $(\cdot, \cdot)$ の実部を表わし, $F(x) = \{ x^* \in X^*; (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \}$.

また, 作用素 A のグラフが $X \times X$ において閉集合であるとき, A は closed operator といふ.

最近 Crandall and Liggett [3] は非線形半群の生成に関してつぎの著しい結果を与えた.

定理 I. A は dissipative operator とし,

$$(C_1) \quad R(I - \lambda A) \supset D(A), \quad \lambda > 0$$

と仮定する. このとき, つぎの (1), (2) を満足する

contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on $\overline{D(A)}$ が

存在する.

- (1) $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]} x$, $x \in R \cap \overline{D(A)}$, $t \geq 0$,
 ただし $R = \bigcap_{\lambda > 0} R(I - \lambda A)$,
 (2) $\|T(t)x - T(s)x\| \leq \|Ax\| |t - s|$, $x \in D(A)$, $t, s \geq 0$.

定理 II. A は closed dissipative operator とし,

$$(C_2) \quad R(I - \lambda A) \supset \text{co } D(A), \quad \lambda > 0$$

と仮定する, ただし $\text{co } D(A)$ は $D(A)$ の convex hull.
 $\{T(t); t \geq 0\}$ は定理 I により与えられる contraction
 semi-group on $\overline{D(A)}$ とする.

$x \in \overline{D(A)}$ とする. 若し $T(t)x$ が $t_0 > 0$ で強微分可能
 ならば

$$(3) \quad T(t_0)x \in D(A), \quad [(d/dt)T(t)x]_{t=t_0} \in AT(t_0)x.$$

この定理から, X が回帰的 (reflexive) ならば各 $x \in D(A)$ に対して (3) が a. e. $t_0 (\geq 0)$ で成立する. 実際 $x \in D(A)$ のとき, (2) と X の回帰性から, $T(t)x$ は a. e. $t_0 (\geq 0)$ で強微分可能となるからである ([6]).

この小論の第 1 の目的はつぎのことである.

(a) 定理 II にあって (C_2) を (C_1) に弱めることが出来る,

即ち A が closed dissipative で (C₁) を満たせば、定理 II の結論は成立している。

その証明はつぎの補助定理に基づく。補助定理を述べる前に少し準備をしておく。

関数 $\langle, \rangle_s : X \times X \rightarrow (-\infty, \infty)$ と

$$\langle x, y \rangle_s = \sup \{ \operatorname{Re} (x, y^*) ; y^* \in F(y) \}$$

により定義する。

(4) $\langle, \rangle_s : X \times X \rightarrow (-\infty, \infty)$ は上半連続である

([3])。

A を dissipative operator とし

$$(c_1) \quad R(I - \lambda A) \supset \overline{D(A)}, \quad \lambda > 0$$

と仮定する。

$$J_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \lambda^{-1} (J_\lambda - I), \quad \lambda > 0$$

$$\text{と } \|J_\lambda x - J_\lambda y\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in R(I - \lambda A)$$

で、かつ

$$(5) \quad A_\lambda x \in A J_\lambda x, \quad x \in R(I - \lambda A)$$

$$(6) \quad \|A_\lambda x\| \leq \|A x\|, \quad x \in D(A), \quad \lambda > 0.$$

また、定理 I から、contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$

on $\overline{D(A)}$ が存在して

$$(7) \quad T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} J_\lambda^{[t/\lambda]} x \quad (= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (I - \lambda A)^{-[t/\lambda]} x)$$

, $x \in \overline{D(A)}$, $t \geq 0$.

補助定理. A は (C_1') を満たす dissipative operator とし, $\{T(t); t \geq 0\}$ は (7) により定義される contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ とする.

$x \in \overline{D(A)}$, $x_0 \in D(A)$, $y_0 \in Ax_0$. ならば

$$(8) \quad \sup_{s^* \in F(x-x_0)} \left\{ \limsup_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{Re} \left(\frac{T(t)x - x}{t}, s^* \right) \right\} \leq \langle y_0, x - x_0 \rangle_s.$$

証明. $\|J_\lambda^{[t/\lambda]} x_0 - x_0\| \leq t \|Ax_0\|$ のゆえ

$$(9) \quad \|J_\lambda^{[t/\lambda]} x - x_0\| \leq \|x - x_0\| + t \|Ax_0\|.$$

$\lambda > 0$, 正整数 k に対して

$$y_{\lambda, k} \equiv \lambda^{-1} (J_\lambda^k x - J_\lambda^{k-1} x) \in AJ_\lambda^k x.$$

A は dissipative のゆえ, 適当な $\eta^* \in F(J_\lambda^k x - x_0)$ と選ぶと

$$(10) \quad \operatorname{Re} (y_{\lambda, k} - y_0, \eta^*) \leq 0.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (y_{\lambda, k}, \eta^*) &= \lambda^{-1} \operatorname{Re} (J_\lambda^k x - x_0 - \{J_\lambda^{k-1} x - x_0\}, \eta^*) \\ &\leq \lambda^{-1} (\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\| \|J_\lambda^k x - x_0\|) \\ &\leq (2\lambda)^{-1} (\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\|^2) \quad ; \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

$$\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\|^2 \leq 2\lambda \operatorname{Re}(y_{\lambda,k}, \eta^*)$$

$$\leq 2\lambda \operatorname{Re}(y_0, \eta^*) \quad ((2.10) \text{ を用いた})$$

$$\leq 2\lambda \langle y_0, J_\lambda^k x - x_0 \rangle_s.$$

$$J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x = J_\lambda^k, \quad k\lambda \leq \tau < (k+1)\lambda \quad \text{の } \tau \text{ へ}$$

$$\|J_\lambda^k x - x_0\|^2 - \|J_\lambda^{k-1} x - x_0\|^2$$

(4.1)

$$\leq 2 \int_{k\lambda}^{(k+1)\lambda} \langle y_0, J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x - x_0 \rangle_s d\tau.$$

$$t \geq \lambda > 0, \quad (4.1) \text{ を } k=1, \dots, [t/\lambda] \text{ について加える}$$

&

$$\|J_\lambda^{[t/\lambda]} x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2$$

$$\leq 2 \int_\lambda^{([t/\lambda]+1)\lambda} \langle y_0, J_\lambda^{[\tau/\lambda]} x - x_0 \rangle_s d\tau.$$

$\limsup (\lambda \rightarrow 0+ > 0) \leq 0$, (4) 及び (9) 及び

Lebesgue の収束定理により

$$\|T(t)x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2$$

$$\leq 2 \int_0^t \langle y_0, T(\tau)x - x_0 \rangle_s d\tau.$$

$$\|T(t)x - x_0\|^2 - \|x - x_0\|^2 \geq 2 \operatorname{Re}(T(t)x - x, s^*)$$

, $s^* \in F(x - x_0)$ の τ へ

$$(12) \quad \operatorname{Re}(T(t)x - x, s^*) \leq \int_0^t \langle y_0, T(\tau)x - x_0 \rangle_s d\tau$$

, $t > 0$.

$T(\tau)x$ は $\tau \geq 0$ について強連続であるから, (4) により, $\langle y_0, T(\tau)x - x_0 \rangle_s$ は $\tau \geq 0$ に関して上半連続である. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ が存在して

$$\langle y_0, T(\tau)x - x_0 \rangle_s < \langle y_0, x - x_0 \rangle_s + \varepsilon, \quad 0 \leq \tau < \delta.$$

(12) から

$$\operatorname{Re} \left(\frac{T(t)x - x}{t}, s^* \right) \leq \langle y_0, x - x_0 \rangle_s + \varepsilon, \quad 0 < t < \delta$$

即ち

$$\limsup_{t \rightarrow 0+} \operatorname{Re} \left(\frac{T(t)x - x}{t}, s^* \right) \leq \langle y_0, x - x_0 \rangle_s, \\ s^* \in F(x - x_0). \quad \text{証明終.}$$

さて A が closed dissipative ならば, 各 $\lambda > 0$ に対して $R(I - \lambda A)$ は closed. よって (C_1) から (C'_1) がともるう, 従って補助定理の (8) が成立する. [3] におけると同様にして (a) が得られる. (定理 II [3] の証明で条件 (C_2) は上の不等式 (8) を得るためにのみ用いられている.)

上の補助定理を用いてつぎのことが得られる.

(b) A は (C_1) を満足する maximal dissipative operator in $\overline{D(A)}$ とし, $\{T(t); t \geq 0\}$ は定理 I により与えられる contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ とする.

A° は一価であると仮定する.

(i') X が reflexive ならば, $D(A^\circ) = D(A)$, A° は $\{T(t); t \geq 0\}$ (on $\overline{D(A)}$) の w.i.g. で, しかも

$$(w-D^+)T(t)x = A^\circ T(t)x, \quad x \in D(A), \quad t \geq 0$$

(ii') X が uniformly convex ならば, $D(A^\circ) = D(A)$, A° は $\{T(t); t \geq 0\}$ (on $\overline{D(A)}$) の i.g. で, しかも

$$D^+T(t)x = A^\circ T(t)x, \quad x \in D(A), \quad t \geq 0,$$

ただし $D^+T(t)x$ ($(w-D^+)T(t)x$) は $T(t)x$ の強(弱)右側微係数を表わす.

上の (b) からつぎの結果がえられる.

(b') X, X^* がともに uniformly convex, A が (C_1) を満足する closed dissipative operator ならば, A° は一価で $D(A^\circ) = D(A)$, しかも A° は i.g. として $\{T(t); t \geq 0\}$ unique contraction semi-group on $\overline{D(A)}$ が存在する.

最後に, 定理 I の逆の問題を考えて見る. すなわち, 1 つの contraction semi-group $\{T(t); t \geq 0\}$ on X_0 を与えたとき,

$$T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (I - \lambda A)^{-[\frac{t}{\lambda}]} x, \quad x \in X_0$$

となる如き dissipative operator A が存在するか?

ここで X_0 は X_0 上の closed convex set とする. X が Hilbert 空間のときには, $=$ は肯定的に解決されている ($\{T(t); t \geq 0\}$ の i.g. の maximal dissipative extension を考えればよい). Banach 空間では未解決であるが, $=$ に関連するものとしてつぎのことが成立する.

(c) $\{T(t); t \geq 0\}$ は contraction semi-group on X_0 とし, $A^h = h^{-1}(T(h) - I)$, $E = \{x \in X_0; \|A^h x\| = O(1), h \rightarrow 0+\}$ とおく. このとき 各 $x \in \bar{E}$ に対し

$$T(t)x = \lim_{(\lambda, h) \rightarrow (0, 0)} (I - \lambda A^h)^{-[t/\lambda]} x$$

が $[0, \infty)$ の各有限区間上で一様に成立している.

実際, [8] 及び [3] の中の評価から

$$\begin{aligned} & \|T([t/h]h)x - (I - \lambda A^h)^{-[t/\lambda]} x\| \\ & \leq \{ \sqrt{th} + h + 2(\lambda^2 + \lambda t)^{1/2} \} \|A^h x\| \end{aligned}$$

$x \in X_0$, $t \geq 0$, $\lambda > 0$, $h > 0$ がえられるからである.

文 献

- [1] H. Brezis and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions on convex sets, to appear in J. of Functional Analysis .
- [2] _____, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, to appear.
- [3] M.G. Crandall and T.M. Liggett, Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, to appear.
- [4] M.G. Crandall and A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. of Functional Analysis, 3 (1969), 376 - 418 .
- [5] T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Nonlinear Functional Analysis, Chicago, Amer. Math. Soc., (1968).
- [6] Y. Kōmura, Nonlinear semi-groups in Hilbert space, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 493 - 507 .
- [7] _____, Differentiability of nonlinear

semi-groups, J. Math. Soc. Japan, 21 (1969), 375 - 402.

[8] I. Miyadera, Approximation of nonlinear semi-groups, 京大数解研講究録 (1969).

[9] ———, Some remarks on semi-groups of nonlinear operators, to appear.

[10] I. Miyadera and S. Oharu, Approximation of semi-groups of nonlinear operators, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 24 - 47.

[11] S. Oharu, On the generation of semi-groups of nonlinear contractions, to appear in J. Math. Soc. Japan.