

一般化された中心極限定理と Tsallis の非加法的統計力学

日本大学理工学部 阿部 純義

要旨： Khinchin による正規分布と中心極限定理に基づく Gibbs の正準集団理論の導出を、Lévy 分布と一般化された中心極限定理の場合に拡張し、Tsallis の非加法的統計力学が如何に導かれるかを示す。下に有界な物理量（例えばエネルギー）のベキ則的な振る舞いをする分布を考え、それ自身の多数回の合成積が半無限空間上で定義された Lévy の安定分布に収束することを証明する。次に、この分布に関する物理量の一般化された期待値（例えば内部エネルギー）を定義し計算する。この量と一般化された自由エネルギーが Legendre 変換で結ばれ、一般化された内部エネルギーと温度パラメータが共役な対になるようにエントロピーを定義する。このエントロピーが、非加法性パラメータ q が $q > 1$ の場合の Tsallis エントロピーに他ならないことを示す。

1. はじめに

自然界に見られる確率分布の多くは正規分布の形をしている。正規分布の普遍性は、数学的には、de Moivre-Laplace-Lyapunov の中心極限定理によって裏づけられている。

しかしながら、正規分布とは異なる、ベキ則に従う分布もまた自然界によく見受けられる。その普遍性も数学的裏づけをもつ。すなわち、Lévy-Gnedenko の一般化された中心極限定理である。

半無限空間 $(0, \infty)$ 中に値 E をとる確率変数 H を考えよう。物理的には H として系のエネルギーを想定している。このとき、Lévy 分布は

$$L_\gamma(E) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi_L(t) e^{-iEt} \quad (1)$$

$$\chi_L(t) = \exp \left\{ -a|t|^\gamma \exp \left[i\varepsilon(t) \frac{\theta\pi}{2} \right] \right\} \quad (2)$$

で与えられる[1]。ここで、特性関数 $\chi_L(t)$ 中の a は正の定数、 γ は Lévy 指数、 θ は $|\theta| \leq \gamma$ を満たす定数であり、また $\varepsilon(t)$ は符号関数 $\varepsilon(t) = t/|t|$ である。半無限空間では、Lévy 指数の値の範囲は

$$0 < \gamma < 1 \quad (3)$$

である。 E の大きな値に対して、Lévy 分布(1)は

$$L_\gamma(E) \sim E^{-1-\gamma} \quad (4)$$

というべき則的な振る舞いをする。このことから、すべての正の整数次のモーメント

$$\langle H^n \rangle_1 \equiv \int_0^\infty dE E^n L_\gamma(E) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

は、数学的に発散する。

Lévy 分布が安定なクラスを成すことを見るために、 N 個のスケールされた独立な同種の確率変数の和

$$H = \frac{H_1 + H_2 + \dots + H_N}{B_N} \quad (6)$$

を考えよう。スケール因子 B_N は後で決定される。各 H_i ($i=1, 2, \dots, N$) が分布(1)に従うとすると、 H は

$$L_\gamma^{(N)}(E) = B_N (L_\gamma * \dots * L_\gamma)(B_N E) \quad (7)$$

のように、Lévy 分布の N 回の合成積によって与えられる分布に従うことになる。ただし、半無限空間での合成積の定義は

$$(f * g)(x) = \int_0^x dx' f(x-x') g(x') \quad (8)$$

である。式(7)の分布関数の性質を調べるには、その特性関数

$$\chi_L^{(N)}(t) = \int_0^\infty dE e^{iEt} L_\gamma^{(N)}(E) \quad (9)$$

を考えると便利である。合成積と Fourier 変換の関係から、ただちに

$$\chi_L^{(N)}(t) = \left[\chi_L \left(\frac{t}{B_N} \right) \right]^N \quad (10)$$

を得る。この計算では、 $E < 0$ のとき $L_\gamma(E) = 0$ であるとしている。式(2)と(10)を比較すると、

$$B_N = N^{1/\gamma} \quad (11)$$

と取るならば、 $\chi_L^{(N)}(t) = \chi_L(t)$ という不変性が実現されることがわかる。言い換えれば、Lévy 分布は合成積によって形状不変なのである。このことは、ちょうど正規分布が自身との合成積によって形状不変なのと同じ事情である。

中心極限定理は、二次モーメントが有限ないかなる分布も、多数回の合成積によって正規分布に収束することを主張する。一方、一般化された中心極限定理は、モーメントが有限でない分布の多数回の合成積が（もし収束するならば）指数の範囲が式(3)で表される Lévy の安定なクラスの中のどれかに収束することを主張する。

さて、統計力学の基礎に興味がある我々にとって、これらの極限定理が重要な訳は、それが Khinchin[2]による Gibbs の正準集団理論の導出において基本的な役割を果たすからである。（参考文献[3]には、より簡潔な解説がある。）従って、Khinchin の議論を一般化された中心極限定理の場合に拡張した場合、いかなる正準集団理論が得られるか、という自然な問があらわれる。驚くべきことに、この問はかつて統計力学の研究者によって一度も問われなかった。

以下において、我々はこの問題について最近展開された議論[4]を紹介する。

2. ベキ則的分布と一般化された中心極限定理

我々がここで取り上げたいベキ則的分布は

$$f(E) = \frac{1}{z(\beta)} [\xi(\beta) + E]^{-s} \quad (1 < s < 2) \quad (12)$$

$$z(\beta) = \int_0^\infty dE [\xi(\beta) + E]^{-s} = \frac{\xi^{1-s}(\beta)}{s-1} \quad (13)$$

である。ここで、 $\xi(\beta)$ はある種のパラメータ β に依存する正の定数である。 s の範囲は、 $f(E)$ の規格化可能性、およびすべての次数のモーメントが発散するという条件から決まっている。この分布の N 回の合成積によって得られる分布の特性関数を $\chi^{(N)}(t)$ と書くと、やや長い計算により、その対数が

$$\begin{aligned} \ln \chi^{(N)}(t) = & -a|t|^{s-1} \exp\left[i\epsilon(t) \frac{\theta\pi}{2}\right] \\ & + (s-1)\xi^{s-1}|t|^{s-1} \int_0^\infty dy \left(e^{iy\epsilon(t)} - 1\right) \left[\frac{1}{(y + \xi|t|/B_N)^s} - \frac{1}{y^s} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

となることが見い出される。ただし、

$$a = (s-1)\xi^{s-1}|L(s-1)| > 0 \quad (15)$$

$$\theta = 1-s \quad (16)$$

$$L(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{dy}{y^{1+\alpha}} (e^{-y} - 1) < 0 \quad (0 < \alpha < 1) \quad (17)$$

である。式(14)中の B_N は式(11)中のものと同じであり、従って N 回の合成積は $N \rightarrow \infty$ で（右辺第二項はゼロに収束し）実際に指数

$$\gamma = s-1 \quad (18)$$

の Lévy 分布に収束することがわかった。

3. Tsallis の非加法的統計力学の導出：

指導原理としての熱力学的 Legendre 変換構造

前節の一般化された中心極限定理の話は純粋に数学の議論であった。統計力学の話に移行するためには、式(15)の定数 a の物理的意味を明らかにしなければならない。Khinchin による中心極限定理と正準集団理論との関係づけの場合と異なり、我々の場合は、通常モーメントがすべて発散してしまう。この困難は、期待値の定義を拡張することにより回避される。すなわち、エスコート分布[5]

$$P_q(E) = \frac{f^q(E)}{\int_0^{\infty} dE f^q(E)} \quad (19)$$

による q -期待値[6]

$$\langle H \rangle_q = \int_0^{\infty} dE E P_q(E) \quad (20)$$

を考えるのである。 q はある定数であるが、式(20)が有限であるための最低限の要請から

$$q = 1 + \frac{1}{s} \quad (21)$$

と取ればよいことがわかる。

式(19)の右辺の分母は

$$c_q \equiv \int_0^\infty dE f^q(E) = \frac{(s-1)^q}{s} \xi^{1-q}(\beta) \quad (22)$$

と計算される。同様に、 q -期待値 $\langle H \rangle_q$ 、すなわち一般化された内部エネルギーは

$$u_q \equiv \langle H \rangle_q = \frac{\xi(\beta)}{s-1} \quad (23)$$

のように求められる。式(22)と(23)から

$$c_q = \frac{s-1}{s} u_q^{1-q} \quad (24)$$

という関係が得られる。

さて、我々の取る指導原理は、「パラメータ β と u_q を熱学的 Legendre 変換構造における共役な対とせよ」、というものである。この要請は、熱学的 Legendre 変換構造が統計力学以前にすでに存在するものであることを考慮すれば、自然であろう。このためには、何らかのエントロピー (S_q と書こう) が存在して

$$\frac{\partial S_q}{\partial u_q} = \beta \quad (25)$$

となり、その Legendre 変換

$$\Gamma_q \equiv S_q - \beta u_q \quad (26)$$

に関して

$$-\frac{\partial \Gamma_q}{\partial \beta} = u_q \quad (27)$$

となっていなければならない。式(25)は β を温度 (の逆数) と同一視することを可能にする。ひとたびエントロピー S_q が定義されれば、分布(12)中の ξ が β の関数として決定されることになる。

注目すべきことに、上述の Legendre 変換構造は、エントロピー S_q を

$$S_q[f] = \frac{1}{1-q} (\sigma^{1-q} c_q - 1) \quad (28)$$

と取ることにより、実際に確立することができる。ここで、 σ は S_q を無次元化するためのスケール因子であり、 c_q は式(22)で与えられる $f(E)$ の汎関数である。このとき、式(25)は具体的に

$$\beta = \frac{s}{s-1} \frac{u_q^{-q}}{\sigma^{1-q}} \quad (29)$$

と計算される。これと式(23)から、 ξ と β との関係が決定される。

ところで、式(28)のエントロピー S_q は、非加法性パラメータ q をもつ Tsallis エントロピー[7]に他ならない。また、 q -期待値(20)、(23)は Tsallis の非加法的統計力学[8-10]に特有のものである。

4. おわりに

このように、ベキ則的分布が、一般化された中心極限定理をとおして、正準集団理論の分布として特徴づけられ、更にそれが熱力学的 Legendre 変換構造の要請から Tsallis の非加法的統計力学に結びつけられることがわかった。

確率論には、ただ二つの極限定理が存在する。Gibbs の正準集団理論は通常を中心極限定理から得られる。一方、Tsallis の非加法的統計力学は、一般化された中心極限定理から導かれる正準集団理論なのである。

謝辞

「第 8 回非平衡系の統計物理シンポジウム」に招待して下さいました有光敏彦先生に感謝いたします。このレポートは、著者が 2000 年 3 月に 1 ヶ月ほど Washington D. C. の Naval Research Laboratory (NRL) に滞在した折に Dr. A. K. Rajagopal と行なった共同研究に基づいています。Dr. Rajagopal と NRL のホスピタリティに謝意を表します。

参考文献

- [1] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (Addison-Wesley, Cambridge MA, 1954).
- [2] A. I. Khinchin, *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics* (Dover, New York, 1949).
- [3] 久保亮五編「大学演習 熱学・統計力学」(裳華房、1961)
- [4] S. Abe and A. K. Rajagopal, "Justification of Power-Law Canonical Distributions Based on Generalized Central Limit Theorem" (cond-mat/0003380), submitted for publication.
- [5] C. Beck and F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [6] C. Tsallis, R. S. Mendes, and A. R. Plastino, *Physica A* **261**, 534 (1998).
- [7] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).

- [8] C. Tsallis, in Braz. J. Phys. **29** (1999). これは非加法的統計力学の特集号であり、http://sbf.if.usp.br/WWW_pages/Journals/BJP/Vol29/Num1/index.htm から入手可能である。
- [9] 日本語で書かれた解説としては、阿部純義「Tsallis の非加法的統計力学」数理科学（連載：2000 年 1 月～4 月号）。
- [10] “Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications” Lecture Notes in Physics, eds. S. Abe and Y. Okamoto (Springer-Verlag, Heidelberg), to be published.