

Fuglede-Putnam の定理の $\rightarrow$ a version

山形大 理 岡安隆照 (Takateru OKAYASU)

1. A, B が正規作用素ならば任意の作用素 X に対して A
 $X - XB^* = 0$ ならば $A^*X - XB = 0$ が導かれる. このことをい
 く知られた Fuglede-Putnam の定理 の主張のところである.
 Barberian は A, B が互正規作用素 (hyponormal operator)
 であっても X が Hilbert-Schmidt 作用素であれば同じ結論が
 得られることを示した [1]. 現在では X を Hilbert-Schmidt
 作用素に限定したことも知られている (高橋 [3],
 R.L. Moore - D.D. Rogers - T.T. Trent [2]). Barberian の
 議論は不十分であったわけである.

しかし彼の議論は作用素環論的で示唆に富む. それを注意
 深く読み返したところいくつかの命題が成り立つことがわかった.
 ある: A_j, B_j が

$$A_i A_j^* = A_j^* A_i, B_i B_j^* = B_j^* B_i \quad (i \neq j)$$

を満たす互正規作用素で X が Hilbert-Schmidt 作用素ならば

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i X B_i^* = 0$$

ならば

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i^* X B_i = 0$$

が導かれる. — ここではこの命題の 積分形 を定式化しよう.

それは作用素積分方程式における一つのきわんだ現象である
とみることが出来る。

2. 目的の定理はつぎのとおりである:

定理 $(S, \mathcal{F})$ を可測空間, $\mu \in (S, \mathcal{F})$ 上の複素測度, M
を半有限型作用素環, a, b を S 上の $|\mu|$ に関して本質的に
有界な M 値関数としての条件を満たすものとする:

(1) μ に関してほとんどあつての λ について $a(\lambda), b(\lambda)$ が真正
正規。

(2) μ に関してほとんどすべての $\lambda, \lambda' (\lambda \neq \lambda')$ について

$$a(\lambda)a(\lambda')^* = a(\lambda')^*a(\lambda), \quad b(\lambda)b(\lambda')^* = b(\lambda')^*b(\lambda).$$

このとき $\lambda \in L_1(M) \cap M$ ⁽¹⁾⁺⁽²⁾ 関数 $\lambda \rightarrow a(\lambda) \times b(\lambda)^*$
が Bochner 積分可能, 関数 $\lambda \rightarrow a(\lambda)^* \times b(\lambda)$ が弱可測 (つまり
弱可測) かつ

$$\int a(\lambda) \times b(\lambda)^* d\mu = 0$$

ならば, 関数 $\lambda \rightarrow a(\lambda)^* \times b(\lambda)$ は弱積分可能 (つまり弱積分
可能) である。

$$\int a(\lambda)^* \times b(\lambda) d\mu = 0.$$

特に M が有限型で関数 $\lambda \rightarrow a(\lambda)^* \times b(\lambda)$ が弱積分可能ならば
は, μ を拡張した複素測度 (しかしハーンの分解はとく
とす) としとていい, a, b が $|\mu|$ に関して本質的に有界
であるという条件を落していい。

この定理から部座につきの系が得られる:

系1 $(S, \mathcal{F})$ を可測空間, $\mu \in (S, \mathcal{F})$ 上の核型測度, A, B は S 上の行列値関数で、下記の条件を満たすものとする:

(3) μ にほとんどすべての λ について $A(\lambda), B(\lambda)$ が正規.

(4) μ にほとんどすべての $\lambda, \lambda' (\lambda \neq \lambda')$ について

$$A(\lambda)A(\lambda')^* = A(\lambda')^*A(\lambda), \quad B(\lambda)B(\lambda')^* = B(\lambda')^*B(\lambda).$$

このときもしも $\underbrace{\text{行列 } X \text{ は } 2 \times 2}_{\text{関数}} \lambda \rightarrow A(\lambda) \times B(\lambda)^*, \lambda \rightarrow A(\lambda)^* \times$

$B(\lambda)$ が積分可能.

$$\int A(\lambda) \times B(\lambda)^* d\mu = 0$$

ならば

$$\int A(\lambda)^* \times B(\lambda) d\mu = 0.$$

系2 $(S, \mathcal{F})$ を可測空間, $\mu \in (S, \mathcal{F})$ 上の核型測度, A, B はヒルベルト空間 H 上の, $|\mu|$ に関して本質的に有界な有界作用素値関数で、下記の条件を満たすものとする:

(5) μ にほとんどすべての λ について $A(\lambda), B(\lambda)$ が正規.

(6) μ にほとんどすべての $\lambda, \lambda' (\lambda \neq \lambda')$ について

$$A(\lambda)A(\lambda')^* = A(\lambda')^*A(\lambda), \quad B(\lambda)B(\lambda')^* = B(\lambda')^*B(\lambda).$$

このときもしも H 上の核型作用素 X に対して関数 $\lambda \rightarrow A(\lambda) \times B(\lambda)^*$ が Bochner 積分可能, 関数 $\lambda \rightarrow A(\lambda)^* \times B(\lambda)$ が弱可

測) である。

$$\int A(\lambda) \times B(\lambda) d\mu = 0$$

ならば、函数 $\lambda \rightarrow A(\lambda)^* \times B(\lambda)$ は弱積分可能で

$$\int A(\lambda)^* \times B(\lambda) d\mu = 0.$$

3. 定理の証明の概略を述べよう。

$$x(\lambda) = a(\lambda) \times b(\lambda)^*, \quad y(\lambda) = a(\lambda)^* \times b(\lambda) \quad (\lambda \in S)$$

とある。任意の $\varphi \in Y^*$ を定めよう。函数 x は Bochner 積分可能、函数 $\varphi \circ y$ は可測かつ $|\mu|$ に関して本質的に有限であるから、任意の自然数 n に対して S のある分割 $\Delta_n = \{S_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して、 $\lambda_k \in S_n^k$ を選んで

$$x_n(\lambda) = x(\lambda_k), \quad y_n(\lambda) = y(\lambda_k) \quad (\lambda \in S)$$

と定めるとき x_n は Bochner 積分可能で

$$\int \|x_n(\lambda) - x(\lambda)\| d|\mu| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ}$$

$$|\varphi(y_n(\lambda)) - \varphi(y(\lambda_k))| < \frac{1}{n}.$$

しよるに

$$\int \bigcup_{k=m+1}^{\infty} S_n^k x_n(\lambda) d\mu \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

$$\int \bigcup_{k=m+1}^{\infty} S_n^k \varphi(y_n(\lambda)) d\mu \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

であるから

$$\left\| \int \bigcup_{k=m+1}^{\infty} S_n^k x_n(\lambda) d\mu \right\| < \frac{1}{n} \quad \text{と}$$

$$\left| \int \bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} S_n^k \varphi(y_n(\lambda)) d\mu \right| < \frac{1}{n}$$

と満たす自然数 m_n を次のように選ぶことができる。したがって

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\| &= \left\| \int (X(\lambda) x_n(\lambda) - x(\lambda)) d\mu \right\| \\ &\leq \left\| \int (1 - X(\lambda)) x_n(\lambda) d\mu \right\| + \int \|x_n(\lambda) - x(\lambda)\| d\mu \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

ただし X は $\bigcup_{k=m_n+1}^{\infty} S_n^k$ の特性関数である。

いま $\varphi = \psi + \psi'$ ($\psi \in M$, $\psi' \in M^\perp$) とする。また $\{a_i\} \subset L_1(M) \cap M$, $\psi - a_i \tau \rightarrow 0$ とする (τ は M の trace)。

このとき

$$\begin{aligned} &\psi \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \\ &\leq (\psi - a_i \tau) \left(\left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \right. \\ &\quad \left. + \tau \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \right) \\ &\leq \|\psi - a_i\| \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|^2 + \|a_i\| \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|_2^2. \end{aligned}$$

ここで (1), (2) の不等式

$$\left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|_2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_2$$

を示すことができる。この計算は長々たる2分割法によるが、この方法は本質的に Barberian [1] の方法と同じである。

更に

$$\left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_2^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\| \left\| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_1$$

$$< \frac{2}{n} \left\| \sum_k \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_1.$$

$$\text{したがって } \left\| \sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|^2, \left\| \sum_k \mu(S_n^k) x(\lambda_k) \right\|_1 \text{ は一様有界}$$

である。よって $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ である。

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi \left(\left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \right) \leq \|y - a_1\|^2 < \infty,$$

ただし K は $\left\| \sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right\|^2$ の上界である。よって $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ である。

$$\varphi \left(\left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right)^* \left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

したがって $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\varphi \left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

よって $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\varphi \left(\sum_k \mu(S_n^k) y(\lambda_k) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

したがって $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \int \varphi(y_n(\omega)) d\mu \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \mu(S_n^k) \varphi(y(\lambda_k)) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) \varphi(y(\lambda_k)) \right| + \left| \sum_{k=m_n+1}^n \mu(S_n^k) \varphi(y(\lambda_k)) \right| \\ &< \left| \sum_{k=1}^{m_n} \mu(S_n^k) \varphi(y(\lambda_k)) \right| + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

よって

$$\int \varphi(y_n(\omega)) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \varphi(y(\omega)) d\mu$$

よって $n \rightarrow \infty$ のとき

$$\int \varphi(y(\omega)) d\mu = 0.$$

定理の残りの部分は上の議論を少し変更すれば示される。

4. 定理の積方を作用素環の強位相に用いる積方として議論したいところである (M を有限型に限定以上の technique が適用する).

References

[1] S. K. Berberian, Extensions of a theorem of Fuglede and Putnam, Proc. AMS 71 (1978), 113 - 114.

[2] R. L. Moore, P. D. Rogers and T. T. Trent, A note on intertwining M -hyponormal operators, Proc. AMS 83 (1981), 514 - 516.

[3] K. Takahashi, On the converse of the Fuglede-Putnam theorem, Acta Sci. Math. 43 (1981), 123 - 125