

鉛直壁面を流れる粘性流体膜上の波動

東大工 仲矢 長次 (Choji Nakaya)

1. はじめに

鉛直壁面を粘性流体が流れるとき、流れの不安定性によって表面に波が生ずる。この波の性質はカピツパによって、はじめに系統的にしらべられた。それによると、周期的なパルスを上流で与えると、二種の特長のある波が観測された。その一つは正弦波で、もう一つはシンガレ波と名付けられた波である。前者は線形理論によって、後者は孤立波を重ね合わせた表現であると考えられる。しかし現在では一般に波の性質は不明である。この報告では、観測された波のどのような種類のものがあつかわれているにする。

2. 運動方程式

直交座標 x, y, z と x 軸を鉛直下方にとる。流れの速度を Ψ で表わすと、二次元の非圧縮粘性流体の方程式は

$$\Psi_{xxt} + \Psi_{yyt} - \Psi_x (\Psi_{xxy} + \Psi_{yyy}) + \Psi_y (\Psi_{xxx} + \Psi_{xyy})$$

$$= \nu (\Psi_{xxxx} + 2\Psi_{xxyy} + \Psi_{yyyy}) \quad (1)$$

である。自由表面の水位を

$$h(x, t) = \eta \quad (2)$$

を表わし、その変動部分の流函数を ψ によって表わす。無次元量と x, y, t との関係は

$$x = l_0 x^*, \quad y = l_0 y^*, \quad t = l_0 u_0^{-1} t^*, \quad \bar{\psi} = u_0 h_0 \bar{\psi}^*$$

$$\psi = u_0 h_0 \psi^*, \quad \rho = \rho_0 h_0 \rho^*, \quad h = h_0 h^*, \quad (3)$$

$$u_0 = \frac{g h_0^2}{2\nu} \quad (4)$$

である。このとき、量 x, y, t の運動方程式と境界条件は

$$\begin{aligned} \psi_{yyyy} = \mu R [\psi_{yy} t + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xyy} - (\bar{\psi}_{yyy} + \psi_{yyy}) \psi_x] \\ - 2\mu^2 \psi_{xxyy} + \mu^3 R [\psi_{xxt} + (\bar{\psi}_y + \psi_y) \psi_{xxx} - \psi_x \psi_{xxy}] \\ - \mu^4 \psi_{xxxx}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\psi_x = 0, \quad \bar{\psi} = 0, \quad (6)$$

$$\psi_y = 0, \quad \bar{\psi} = 0, \quad (7)$$

$$(\bar{\psi}_{yy} + \psi_{yy} - \mu^2 \psi_{xx})(1 - \mu^2 h_x^2) - 4\mu^2 \psi_{xy} h_x = 0, \quad y=h, \quad (8)$$

$$-\frac{W\mu^2 h_{xx}}{(1+\mu^2 h_x^2)^{3/2}} - \rho - \mu \psi_{xy} \frac{(1-\mu^2 h_x^2)}{1+\mu^2 h_x^2} - \frac{4\mu^3 \psi_{xy} h_x^2}{1-\mu^4 h_x^4} = 0, \quad y=h, \quad (9)$$

$$h_t = -[\bar{\psi}(h) + \psi(h)]_x \quad (10)$$

$$z = 12$$

$$\bar{\psi} = y^2 - \frac{1}{3} y^3, \quad (11)$$

$$p_x = \frac{1}{2\mu} \psi_{yyy} - \frac{1}{2} [\psi_{yt} + (\bar{\psi}_t + \psi_t) \psi_{xy} - (\bar{\psi}_{xy} + \psi_{xy}) \psi_x] + \frac{1}{2} \mu \psi_{xxy}. \quad (12)$$

Let μ be a real number, h is a function of x and y , W is a function of x and y .

$$R = \frac{gh_0^3}{2\nu^2}, \quad \mu = \frac{h_0}{l_0}, \quad W = \frac{W}{\rho gh_0^2} \quad (13)$$

is a function of x and y .

The solution of the equation is sought in the form

$$\psi = \psi^{(0)} + \mu \psi^{(1)} + \mu^2 \psi^{(2)} + \dots \quad (15)$$

$$p = p^{(0)} + \mu p^{(1)} + \mu^2 p^{(2)} + \dots \quad (16)$$

and ψ is a function of x and y .

$$\psi^{(0)} = (h-1)y^2, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} = & \left(\frac{2}{3} R h^4 h_x + \mu^2 W h h_{xxx} \right) y^2 - \frac{1}{3} \mu^2 W h_{xxx} y^3 \\ & - \frac{1}{6} R h^2 h_x y^4 + \frac{1}{30} R h h_x y^5 \end{aligned} \quad (18)$$

が求まる。表面の条件を代入して微分すると

$$h_t = -2h^2 h_x - \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 h_{xx} + \frac{16}{5} R h^5 h_x^2 + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 h_{xxxx} + 2\mu^2 W h^2 h_x h_{xxx} \right) \quad (5)$$

が得られる。これが表面の変動を記述する方程式である。

3. 孤立解

方程式(18)の解を

$$h = h(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (19)$$

と仮定する。式(19)を(18)に代入すると

$$-c \frac{dh}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left[\frac{2}{3} h^3 + \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 \frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} \right) \right] = 0, \quad (20)$$

一度積分すると

$$-ch + \frac{2}{3} h^3 + \mu \left(\frac{8}{15} R h^6 \frac{dh}{d\xi} + \frac{2}{3} \mu^2 W h^3 \frac{d^3 h}{d\xi^3} \right) = A. \quad (21)$$

となる。式(21)の解に対する境界条件

$$h \rightarrow k, \quad \xi = \pm \infty \quad (22)$$

が与えられる。式(22)に代入すると

$$A = -ck + \frac{2}{3} k^3. \quad (23)$$

新しい変数

$$\eta = \varepsilon^{-1} \xi, \quad \varepsilon = \mu W^{1/3} \quad (24)$$

を $\frac{1}{3}\lambda$ に, (22) に代 λ すると

$$-ch + \frac{2}{3}h^3 + \frac{8}{15} \frac{R}{W^{1/3}} h^6 \frac{dh}{d\eta} + \frac{2}{3} h^3 \frac{d^3 h}{d\eta^3} = -ck + \frac{2}{3}k^3 \quad (25)$$

で, 境界条件は

$$h \rightarrow k, \quad \eta \rightarrow \pm\infty \quad (26)$$

となる. ところで R, W は $R/W^{1/3}$ と 2 と 4 と 6 と 8 と 10 と 12 と 14 と 16 と 18 と 20 と 22 と 24 と 26 と 28 と 30 と 32 と 34 と 36 と 38 と 40 と 42 と 44 と 46 と 48 と 50 と 52 と 54 と 56 と 58 と 60 と 62 と 64 と 66 と 68 と 70 と 72 と 74 と 76 と 78 と 80 と 82 と 84 と 86 と 88 と 90 と 92 と 94 と 96 と 98 と 100 と 102 と 104 と 106 と 108 と 110 と 112 と 114 と 116 と 118 と 120 と 122 と 124 と 126 と 128 と 130 と 132 と 134 と 136 と 138 と 140 と 142 と 144 と 146 と 148 と 150 と 152 と 154 と 156 と 158 と 160 と 162 と 164 と 166 と 168 と 170 と 172 と 174 と 176 と 178 と 180 と 182 と 184 と 186 と 188 と 190 と 192 と 194 と 196 と 198 と 200 と 202 と 204 と 206 と 208 と 210 と 212 と 214 と 216 と 218 と 220 と 222 と 224 と 226 と 228 と 230 と 232 と 234 と 236 と 238 と 240 と 242 と 244 と 246 と 248 と 250 と 252 と 254 と 256 と 258 と 260 と 262 と 264 と 266 と 268 と 270 と 272 と 274 と 276 と 278 と 280 と 282 と 284 と 286 と 288 と 290 と 292 と 294 と 296 と 298 と 300 と 302 と 304 と 306 と 308 と 310 と 312 と 314 と 316 と 318 と 320 と 322 と 324 と 326 と 328 と 330 と 332 と 334 と 336 と 338 と 340 と 342 と 344 と 346 と 348 と 350 と 352 と 354 と 356 と 358 と 360 と 362 と 364 と 366 と 368 と 370 と 372 と 374 と 376 と 378 と 380 と 382 と 384 と 386 と 388 と 390 と 392 と 394 と 396 と 398 と 400 と 402 と 404 と 406 と 408 と 410 と 412 と 414 と 416 と 418 と 420 と 422 と 424 と 426 と 428 と 430 と 432 と 434 と 436 と 438 と 440 と 442 と 444 と 446 と 448 と 450 と 452 と 454 と 456 と 458 と 460 と 462 と 464 と 466 と 468 と 470 と 472 と 474 と 476 と 478 と 480 と 482 と 484 と 486 と 488 と 490 と 492 と 494 と 496 と 498 と 500 と 502 と 504 と 506 と 508 と 510 と 512 と 514 と 516 と 518 と 520 と 522 と 524 と 526 と 528 と 530 と 532 と 534 と 536 と 538 と 540 と 542 と 544 と 546 と 548 と 550 と 552 と 554 と 556 と 558 と 560 と 562 と 564 と 566 と 568 と 570 と 572 と 574 と 576 と 578 と 580 と 582 と 584 と 586 と 588 と 590 と 592 と 594 と 596 と 598 と 600 と 602 と 604 と 606 と 608 と 610 と 612 と 614 と 616 と 618 と 620 と 622 と 624 と 626 と 628 と 630 と 632 と 634 と 636 と 638 と 640 と 642 と 644 と 646 と 648 と 650 と 652 と 654 と 656 と 658 と 660 と 662 と 664 と 666 と 668 と 670 と 672 と 674 と 676 と 678 と 680 と 682 と 684 と 686 と 688 と 690 と 692 と 694 と 696 と 698 と 700 と 702 と 704 と 706 と 708 と 710 と 712 と 714 と 716 と 718 と 720 と 722 と 724 と 726 と 728 と 730 と 732 と 734 と 736 と 738 と 740 と 742 と 744 と 746 と 748 と 750 と 752 と 754 と 756 と 758 と 760 と 762 と 764 と 766 と 768 と 770 と 772 と 774 と 776 と 778 と 780 と 782 と 784 と 786 と 788 と 790 と 792 と 794 と 796 と 798 と 800 と 802 と 804 と 806 と 808 と 810 と 812 と 814 と 816 と 818 と 820 と 822 と 824 と 826 と 828 と 830 と 832 と 834 と 836 と 838 と 840 と 842 と 844 と 846 と 848 と 850 と 852 と 854 と 856 と 858 と 860 と 862 と 864 と 866 と 868 と 870 と 872 と 874 と 876 と 878 と 880 と 882 と 884 と 886 と 888 と 890 と 892 と 894 と 896 と 898 と 900 と 902 と 904 と 906 と 908 と 910 と 912 と 914 と 916 と 918 と 920 と 922 と 924 と 926 と 928 と 930 と 932 と 934 と 936 と 938 と 940 と 942 と 944 と 946 と 948 と 950 と 952 と 954 と 956 と 958 と 960 と 962 と 964 と 966 と 968 と 970 と 972 と 974 と 976 と 978 と 980 と 982 と 984 と 986 と 988 と 990 と 992 と 994 と 996 と 998 と 1000 と 1002 と 1004 と 1006 と 1008 と 1010 と 1012 と 1014 と 1016 と 1018 と 1020 と 1022 と 1024 と 1026 と 1028 と 1030 と 1032 と 1034 と 1036 と 1038 と 1040 と 1042 と 1044 と 1046 と 1048 と 1050 と 1052 と 1054 と 1056 と 1058 と 1060 と 1062 と 1064 と 1066 と 1068 と 1070 と 1072 と 1074 と 1076 と 1078 と 1080 と 1082 と 1084 と 1086 と 1088 と 1090 と 1092 と 1094 と 1096 と 1098 と 1100 と 1102 と 1104 と 1106 と 1108 と 1110 と 1112 と 1114 と 1116 と 1118 と 1120 と 1122 と 1124 と 1126 と 1128 と 1130 と 1132 と 1134 と 1136 と 1138 と 1140 と 1142 と 1144 と 1146 と 1148 と 1150 と 1152 と 1154 と 1156 と 1158 と 1160 と 1162 と 1164 と 1166 と 1168 と 1170 と 1172 と 1174 と 1176 と 1178 と 1180 と 1182 と 1184 と 1186 と 1188 と 1190 と 1192 と 1194 と 1196 と 1198 と 1200 と 1202 と 1204 と 1206 と 1208 と 1210 と 1212 と 1214 と 1216 と 1218 と 1220 と 1222 と 1224 と 1226 と 1228 と 1230 と 1232 と 1234 と 1236 と 1238 と 1240 と 1242 と 1244 と 1246 と 1248 と 1250 と 1252 と 1254 と 1256 と 1258 と 1260 と 1262 と 1264 と 1266 と 1268 と 1270 と 1272 と 1274 と 1276 と 1278 と 1280 と 1282 と 1284 と 1286 と 1288 と 1290 と 1292 と 1294 と 1296 と 1298 と 1300 と 1302 と 1304 と 1306 と 1308 と 1310 と 1312 と 1314 と 1316 と 1318 と 1320 と 1322 と 1324 と 1326 と 1328 と 1330 と 1332 と 1334 と 1336 と 1338 と 1340 と 1342 と 1344 と 1346 と 1348 と 1350 と 1352 と 1354 と 1356 と 1358 と 1360 と 1362 と 1364 と 1366 と 1368 と 1370 と 1372 と 1374 と 1376 と 1378 と 1380 と 1382 と 1384 と 1386 と 1388 と 1390 と 1392 と 1394 と 1396 と 1398 と 1400 と 1402 と 1404 と 1406 と 1408 と 1410 と 1412 と 1414 と 1416 と 1418 と 1420 と 1422 と 1424 と 1426 と 1428 と 1430 と 1432 と 1434 と 1436 と 1438 と 1440 と 1442 と 1444 と 1446 と 1448 と 1450 と 1452 と 1454 と 1456 と 1458 と 1460 と 1462 と 1464 と 1466 と 1468 と 1470 と 1472 と 1474 と 1476 と 1478 と 1480 と 1482 と 1484 と 1486 と 1488 と 1490 と 1492 と 1494 と 1496 と 1498 と 1500 と 1502 と 1504 と 1506 と 1508 と 1510 と 1512 と 1514 と 1516 と 1518 と 1520 と 1522 と 1524 と 1526 と 1528 と 1530 と 1532 と 1534 と 1536 と 1538 と 1540 と 1542 と 1544 と 1546 と 1548 と 1550 と 1552 と 1554 と 1556 と 1558 と 1560 と 1562 と 1564 と 1566 と 1568 と 1570 と 1572 と 1574 と 1576 と 1578 と 1580 と 1582 と 1584 と 1586 と 1588 と 1590 と 1592 と 1594 と 1596 と 1598 と 1600 と 1602 と 1604 と 1606 と 1608 と 1610 と 1612 と 1614 と 1616 と 1618 と 1620 と 1622 と 1624 と 1626 と 1628 と 1630 と 1632 と 1634 と 1636 と 1638 と 1640 と 1642 と 1644 と 1646 と 1648 と 1650 と 1652 と 1654 と 1656 と 1658 と 1660 と 1662 と 1664 と 1666 と 1668 と 1670 と 1672 と 1674 と 1676 と 1678 と 1680 と 1682 と 1684 と 1686 と 1688 と 1690 と 1692 と 1694 と 1696 と 1698 と 1700 と 1702 と 1704 と 1706 と 1708 と 1710 と 1712 と 1714 と 1716 と 1718 と 1720 と 1722 と 1724 と 1726 と 1728 と 1730 と 1732 と 1734 と 1736 と 1738 と 1740 と 1742 と 1744 と 1746 と 1748 と 1750 と 1752 と 1754 と 1756 と 1758 と 1760 と 1762 と 1764 と 1766 と 1768 と 1770 と 1772 と 1774 と 1776 と 1778 と 1780 と 1782 と 1784 と 1786 と 1788 と 1790 と 1792 と 1794 と 1796 と 1798 と 1800 と 1802 と 1804 と 1806 と 1808 と 1810 と 1812 と 1814 と 1816 と 1818 と 1820 と 1822 と 1824 と 1826 と 1828 と 1830 と 1832 と 1834 と 1836 と 1838 と 1840 と 1842 と 1844 と 1846 と 1848 と 1850 と 1852 と 1854 と 1856 と 1858 と 1860 と 1862 と 1864 と 1866 と 1868 と 1870 と 1872 と 1874 と 1876 と 1878 と 1880 と 1882 と 1884 と 1886 と 1888 と 1890 と 1892 と 1894 と 1896 と 1898 と 1900 と 1902 と 1904 と 1906 と 1908 と 1910 と 1912 と 1914 と 1916 と 1918 と 1920 と 1922 と 1924 と 1926 と 1928 と 1930 と 1932 と 1934 と 1936 と 1938 と 1940 と 1942 と 1944 と 1946 と 1948 と 1950 と 1952 と 1954 と 1956 と 1958 と 1960 と 1962 と 1964 と 1966 と 1968 と 1970 と 1972 と 1974 と 1976 と 1978 と 1980 と 1982 と 1984 と 1986 と 1988 と 1990 と 1992 と 1994 と 1996 と 1998 と 2000 と 2002 と 2004 と 2006 と 2008 と 2010 と 2012 と 2014 と 2016 と 2018 と 2020 と 2022 と 2024 と 2026 と 2028 と 2030 と 2032 と 2034 と 2036 と 2038 と 2040 と 2042 と 2044 と 2046 と 2048 と 2050 と 2052 と 2054 と 2056 と 2058 と 2060 と 2062 と 2064 と 2066 と 2068 と 2070 と 2072 と 2074 と 2076 と 2078 と 2080 と 2082 と 2084 と 2086 と 2088 と 2090 と 2092 と 2094 と 2096 と 2098 と 2100 と 2102 と 2104 と 2106 と 2108 と 2110 と 2112 と 2114 と 2116 と 2118 と 2120 と 2122 と 2124 と 2126 と 2128 と 2130 と 2132 と 2134 と 2136 と 2138 と 2140 と 2142 と 2144 と 2146 と 2148 と 2150 と 2152 と 2154 と 2156 と 2158 と 2160 と 2162 と 2164 と 2166 と 2168 と 2170 と 2172 と 2174 と 2176 と 2178 と 2180 と 2182 と 2184 と 2186 と 2188 と 2190 と 2192 と 2194 と 2196 と 2198 と 2200 と 2202 と 2204 と 2206 と 2208 と 2210 と 2212 と 2214 と 2216 と 2218 と 2220 と 2222 と 2224 と 2226 と 2228 と 2230 と 2232 と 2234 と 2236 と 2238 と 2240 と 2242 と 2244 と 2246 と 2248 と 2250 と 2252 と 2254 と 2256 と 2258 と 226

の解を求め、代入すると

$$\sigma^3 + 3r\sigma + \delta = 0. \quad (32)$$

を得る。式(32)の解は

$$\sigma = \alpha \quad (33)$$

$$\text{と} \quad \sigma = -\frac{1}{2}\alpha \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\beta \quad (34)$$

$$\text{と} \quad \alpha = \sqrt[3]{J_+} + \sqrt[3]{J_-}, \quad \beta = \sqrt[3]{J_+} - \sqrt[3]{J_-} \quad (35)$$

$$J_{\pm} = \frac{1}{2}(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4r^3}). \quad (36)$$

である。まず式 $\alpha > 0$ として、上流では

$$h_u = C_1 \exp(\alpha \eta) \quad (37)$$

下流では

$$h_d = C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha\eta\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\beta\eta + \gamma\right) \quad (38)$$

となる。まず h_u を出発して、非線形性のため $\eta = 3$ 程度の積分により、2解を求めると

$$h_i = h_i(\eta) \quad (39)$$

これと h_u に接続すると

$$h_i''(\eta_2) - \lambda h_i'(\eta_2) + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \beta^2\right) h_i(\eta_2) = 0 \quad (40)$$

が得られる。これを $\eta_2 \rightarrow \eta$ の変換式

$$F(c, k, R, W) = 0 \quad (41)$$

が得られる。各々を求めるのは波形を η とし、波の幅 $\delta\eta$ は

$$\delta\eta \sim 1 \quad (42)$$

にある。 $\Delta\xi \sim \mu W^{1/3}$ をその結果として得られ、次の重要な結果が得られる。

$$\frac{l_0 \Delta\xi}{h_0} \sim W^{1/3} \quad (43)$$

つまり、孤立波の幅 $\delta\eta$ は流体膜の厚さ h_0 ではなくて $W^{1/3}$ であるということである。

4. S-解

観測される波と、上に求められた孤立解とを比べるために、孤立解から周期解をつくってみよう。孤立波の周期的解は(40)から λ とし

$$\lambda = 2\pi l_0 \quad (44)$$

と取ると

$$h(\xi) = h(\xi + 2\pi) \quad (45)$$

が成り立つ。(2) の二解の重なりを λ とし、

$$h = \rho^{(n)}, \quad \rho^{(n)} = k + \sum [h^{(n)}(\xi + 2m\pi) - k] \quad (46)$$

を定義する。この λ は元々の波長 λ と

$$\lambda = \frac{1}{h_0} \quad (47)$$

により表わせば

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \mu. \quad (48)$$

この式は波の波数と波長 λ の関係を表わしている。

(2) より、解 $\rho^{(n)}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho^{(n)} d\xi = 1. \quad (49)$$

を導くと

$$k + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [h^{(n)} - k] d\xi = 1 \quad (50)$$

よって

$$\mu = \frac{2\pi(1-k)}{W^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} [h^{(n)}(\eta) - k] d\eta} \quad (51)$$

式(51)に於て, R と μ とは重要な式である。

5. F-解

各々の種之解は, $\Delta \xi \sim \mu W^{1/3}$ or 2π である。今これを $\mu W^{1/3} \ll 2\pi$ と仮定する。

$$\mu W^{1/3} \ll 2\pi \quad (52)$$

であれば, 相互作用を無視してよい。このとき

$$\mu W^{1/3} \sim 2\pi \quad (53)$$

に於ては, 種之解の存在は重なり合う (46) は正しくなる。

このとき解は

$$h = f^{(n)}, \quad f^{(n)} = 1 + \sum a_m^{(n)} e^{im\xi} + \sum a_m^{(n)*} e^{-im\xi} \quad (54)$$

とし表わすのに適当である。運動方程式(20)に代入して

$$\begin{aligned} & im \left[2 - c + im\mu \left(\frac{8}{15} R - \frac{2}{3} m^2 \mu^2 W \right) \right] a_m^{(n)} \\ & = N_m(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}) \end{aligned} \quad (55)$$

を得る。式(55)に表わした未知数は $\mu, c, a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}$ である。これら $2N+1$ 個の未知数 R は独立である。また, $2N+1$ 個の式(55)は $2N$ 個の未知数 a_i に関する方程式である。したがって, a_i (未知数としてとれる)を定めると R の未知数が求まる。

6. 実験との比較

こゝでは特長の長さとして平均厚さ h_0 とし、その結果を求めた。この流体膜の厚さは非常に薄いので、厚さを正しく測定するのは容易でない。そこでこの場合に用いられるのは流量 Q であり、新しい厚さの単位として h_0^* とし

$$Q = \frac{\rho g h_0^{*3}}{3\nu} \quad (56)$$

を定義する。この h_0^* について、三つのパラメータ R - μ - W

$$R^* = \frac{\rho g h_0^{*3}}{2\nu^2}, \quad \mu^* = \frac{h_0^*}{l_0}, \quad W^* = \frac{S}{\rho g h_0^{*2}} \quad (57)$$

を定義する。この時以前定義された R と

$$R^* = R g \quad (58)$$

で与えられる。この式から h_0^* 、 h_0 の比は次のようになる。

$$\frac{h_0^*}{h_0} = f, \quad f = \left(\frac{3}{2} g\right)^{1/3}. \quad (59)$$

さらに

$$W^{**} = 1000 \quad (60)$$

と表示するのを望むしから、さらに R^{**} 、 μ^{**} 、 W^{**} を定義

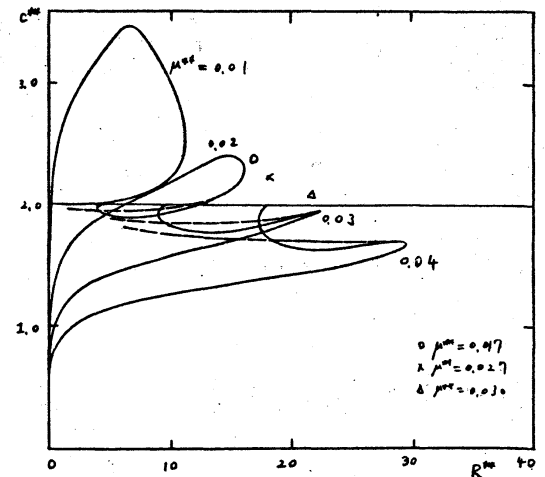
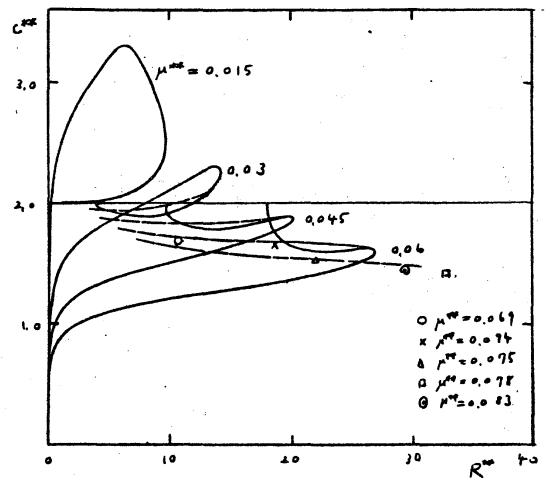
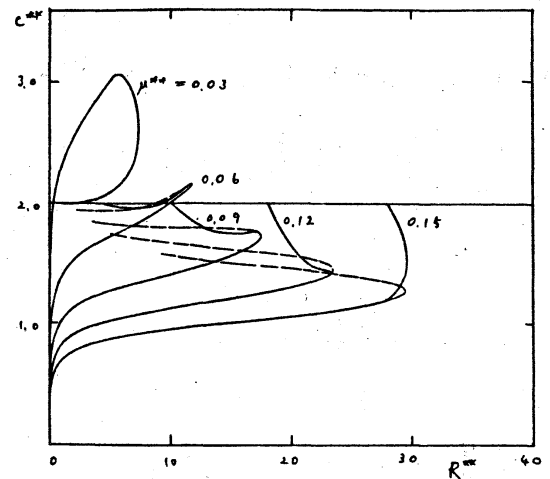
下と。

$$R^{**} = R f^{1/9}, \quad \mu^{**} = \mu f^{1/9}, \quad c^{**} = c \bar{f}^{2/3} \quad (61)$$

で与えられる。

右の図に上から同期解
の第一種、第二種と第三
種について、波の伝達
レシオと波数、角数とし
て表わされている。実験
値とそれらのグラフとを
比較すると第一種、同
期解に対応するものは
その理由は測定された流
量ばかりでなく、その
第一種に対応するカーブ
がないといふことである。

次に第二種の同期解と
比較すると、測定され
たデータは厳密解に対応
したカーブに一致せず、
カーブの漸近解の点と



立解、重ね合せで成る波の速さ一致する。これは一般
正弦波として観測されたものは単一解を重ね合せで考
えられたいということである。最終に波三種、同相解といたす
ことは分る波の波の速さ一致するからである。このことは
一つの山として観測された三つの波といふ波の列は三
つの山の重なった一になつて振動し一致すると考えるべきこ
とである。

7. 紅論

この粘性膜の鉛直壁を流れたとき、流れの解の表面振
つ形成に重要な役割を演じている。特に、流れの解の最も解と
して存在し、その波の幅が厚さの比で $\frac{1}{2}$ の程度であ
る。流れの波の性質を知らなくてはならない現象の一つ
は波の速度の大きさである。これは流れの波の中のうずであ
る。流れの波と実験とを比較する。周期解から流れの解
を用いてつくられる。各々、流れの波解が独立に運動すると
分る。二つの解は正しいか流れの解が重なり合うようにする。
新しい周期解を Fourier の和として求めることが必要であ
る。これは二つの方法を組み合わせると周期解が存在。波の
速さを求められ、実験と理論の結果を比べることが出来る。
正弦波として観測されてくるものは流れの解を重ね合わせるによ

