

Applications of Nagumo-Hukuhara theory
on the boundary value problem for nonlinear differential equations
to the boundary layer equation and the nonlinear Bessel equation.

都立大 理 岩野正宏

まえがき.

非線型 Bessel 方程式に関する問題は 次の境界値問題で、
これは超伝導現象の研究に現われた問題である:

$$(A) \begin{cases} y'' = -x^{-1}y' + \nu^2 x^{-2}y - y + y^3 = f(x, y, y') \\ y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1 \\ 0 < y(x) < 1 \quad \text{for } 0 < x < \infty, \end{cases}$$

$\nu > 0$ は パラメーターである。この境界値問題の解の存在と
一意性とは すくなく遑高性論法によって解決されている。こ
こでは 簡単に説明する 全く異った方法で 解の存在だけを
証明する。

境界層の方程式に関する問題は 次の境界値問題で、粘性
流体の境界層の研究に現われた問題である:

$$(1) \quad \begin{aligned} \varepsilon''' + \varepsilon \varepsilon \varepsilon'' + \varepsilon \lambda (1 - \varepsilon'^2) &= 0, \\ \varepsilon(0) &= 0, \quad \varepsilon'(0) = 0 \end{aligned}$$

$$z'(\infty) = 1.$$

$\lambda < 0$ は パラメーター である。独立変数は t , $'$ は 導関数.

本研究の目的は この境界値問題の解が存在するかどうかを調べることである。Hartman 氏や Serrin 氏 などの研究にも関わらず 私の知る限りでは まだ解が存在するかどうかはわかっていない。この問題に関する最新の結果は、1955 年 Igličić と Kemnitz 両氏の共著の論文で発表されたものである:

与えられた境界条件を少し変えて 新しい境界条件

$$z(0) = \alpha, \quad z'(0) = \beta, \quad z'(\infty) = 1, \quad 0 \leq \beta < 1$$

を考える。

“ $0 \leq \beta < 1$, $\lambda < 0$ なる β, λ を任意に固定する。 λ, β によって定まる 或る number $A \equiv A(\lambda, \beta)$ と $A \leq \alpha$ において定義された狭義単調増加関数 $\gamma(\alpha)$ (ただし $\gamma(A) = 0$) とが存在し, $(\alpha, \beta, z''(0))$ を 初期値とする解が $t = +\infty$ で接続可能 かつ $z'(t) \rightarrow 1$ as $t \rightarrow \infty$ となるための 必要かつ十分条件は $z''(0)$ が 不等式

$$0 \leq z''(0) \leq \gamma(\alpha)$$

を満足することである。”

しかしながら, $A(\lambda, \beta)$ の決め方は 解析的であるために, $A \leq 0$ となるかどうかは不明である。したがって この存在

定理からは 流体力学で解の存在を要請されている境界値問題に解が存在するかどうかの判定はできない。

Hartman 氏は “ $\varepsilon''(0) = \gamma(\alpha)$ となる解は, $\alpha \rightarrow +\infty$ のとき $\varepsilon'(\alpha)$ は 指数関数の order で 1 に近づく. それ以外の解に対しては, $\varepsilon'(\alpha)$ は $\alpha \rightarrow \infty$ のとき power の order で 1 に近づく” ことを証明した。

λ の値は 負であるが, 実験的には λ が $-0.199 < \lambda < 0$ のときに 解の存在がわかればよい. というのは $\lambda = -0.199$ のとき いわゆる separation という現象が起って 境界層が剝離されることになるからである。

境界層の方程式は 3 階であるが, 独立変数を陽に含んでいないので, 2 階の方程式に変換することが出来る. このことについて説明をしよう。

$\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$ は α の関数 ε の 1 階, 2 階, 3 階の導関数である. ε' を ε の関数と考えれば

$$\varepsilon'' = \frac{d\varepsilon'}{d\alpha} = \frac{d\varepsilon'}{d\varepsilon} \varepsilon',$$

$$\varepsilon''' = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{d\varepsilon'}{d\varepsilon} \varepsilon' \right) \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \frac{d^2 \varepsilon'}{d\varepsilon^2} + \varepsilon' \left(\frac{d\varepsilon'}{d\varepsilon} \right)^2$$

とえる. まって与えられた 3 階の方程式は

$$(2) \quad z' \left\{ z' \frac{d^2 z'}{dz^2} + \left(\frac{dz'}{dz} \right)^2 \right\} + 2z z' \frac{dz'}{dz} + 2\lambda (1 - z'^2) = 0$$

となる。 $z=0$ における初期値を

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z'_0, \quad z''(0) = z''_0, \quad z'''(0) = z'''_0$$

と書くことにする。 $z(0) = z'(0) = 0$ より

$$z_0 = 0, \quad z'_0 = 0.$$

これらの値を与方程式に代入すれば

$$z'''_0 = -2\lambda > 0$$

もえる。 $z'(t)$ を z の関数と考え $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{z^\alpha}$ が存在し
かつ 0 と異なる値をとるような $\alpha > 0$ を探してみる。

$$\frac{dz'}{dz} = \frac{z''}{z'}, \quad \frac{dz''}{dz} = \frac{z'''}{z'}$$

よめるから, l'Hospital's rule により

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{z^\alpha} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'' \cdot z'^{-1}}{\alpha z^{\alpha-1}}$$

$$\therefore \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{z^\alpha} \right)^2 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z''}{\alpha z^{2\alpha-1}} \quad \text{when } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{z^\alpha} \neq 0$$

よって $z''_0 \neq 0$ のとき, $\alpha = \frac{1}{2}$ によって

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{\sqrt{z}} = \sqrt{2z''_0} \quad \text{when } z''_0 \neq 0.$$

$z''_0 = 0$ のときは, $z'''_0 > 0$ を考慮して,

$$\left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{z^\alpha}\right)^2 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z''' \cdot z'^{-1}}{\alpha(2\alpha-1)z^{2\alpha-2}},$$

$$\therefore \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{z^\alpha}\right)^3 = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'''}{\alpha(2\alpha-1)z^{3\alpha-2}} \quad \text{when } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{z^\alpha} \neq 0.$$

したがって $\alpha = \frac{2}{3}$ にとるこゝでよい,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{z^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{9}{2} z_0'''} = \sqrt[3]{-9\lambda} \quad \text{when } z_0'' = 0.$$

$z'(\infty) = 1$ より,

$$z \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad z' \rightarrow 1.$$

したがって 新しい方程式(2) に対する境界条件は,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{\sqrt{z}} = \sqrt{2z_0''} \quad \text{when } z_0'' \neq 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z' = 1$$

または

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z'}{\sqrt[3]{z^2}} = \sqrt[3]{-9\lambda} \quad \text{when } z_0'' = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z' = 1$$

となる。

2階の境界値問題に帰着させるために,

$$y = z'^2, \quad x = z$$

をそれぞれ従属変数および独立変数 x とれば, 方程式(2) および対応する境界条件は

$$\sqrt{y} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 4\lambda(1-y) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = 2z_0'' \quad \text{when } z_0'' \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$$

or

$$\sqrt{y} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + 4\lambda(1-y) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\sqrt[3]{x^4}} = -9\lambda \quad \text{when } z_0'' = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 1$$

となる.

両者の場合をまとめて

$$(B) \begin{cases} y'' = -\frac{1}{\sqrt{y}}(2xy' + 4\lambda(1-y)) \equiv f(x, y, y') \\ y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1 \\ 0 < y(x) < 1 \quad \text{for } 0 < x < \infty \end{cases}$$

なる境界値問題が与えられたことになる.

いまから説明する方法では、境界値問題 (A) に関しては、
おぼての $\forall > 0$ の値に対して解の存在 (ただし一意性は
全然考えないことにする) が証明できる。また 境界値問題
(B) に関しては、 λ が

$$-\frac{3}{2}\lambda(3-2\lambda)(5-3\lambda) < 1$$

のとき、したがって $-0.042 \leq \lambda < 0$ のとき、
Algebraic Type の解 (すなわち $x \rightarrow \infty$ のとき $y(x)$ は
 x の power の order で 1 に近づく) の存在が、
また λ が $-0.059 \leq \lambda < 0$ のとき、Exponential
Type の解 (すなわち $x \rightarrow \infty$ のとき $y(x)$ は 指数関数
の order で 1 に近づく) の存在が 証明できたように思わ
れる。

この結果が正しいとしても、物理実験の結果を保証するに
は λ の範囲が あまりにも狭すぎる。改良の見込みは
十分あると思われるが、初等的にはあるけれども可成り面倒な
計算を必要とする。改良の方針については、一通り説明を終
えた段階で述べる。

これらの計算結果の check につき、鹿児島大学の齋藤利彦、
石井一平の両氏に大へんお世話になった。福厚先生には、彼
の理論について 私の理解できなかった若干の箇所を教えて

戴いた。これら 3 人の方々のご好意に感謝する。

§1. 南雲型の存在定理

1939 年 南雲氏は 2 階の非線型常微分方程式の境界値問題の解の存在に関して すぐれた結果をえられた。この結果は、彼の有名な解の単独条件とともに、今日でもしばしば引用されている。 “2 階非線型常微分方程式

$$y'' = f(x, y, y')$$

の右辺の関数 $f(x, y, z)$ は Bergman 領域

$$a \leq x \leq b,$$

$$\underline{\omega}(x) \leq y \leq \overline{\omega}(x),$$

$$\underline{\Omega}(x, y) \leq z \leq \overline{\Omega}(x, y)$$

において (x, y, z) の関数として連続である。

$\underline{\omega}(x), \overline{\omega}(x)$ は $a \leq x \leq b$ において 2 回連続微分可能かつ $\underline{\omega}(a) = \overline{\omega}(a) = A$. $\underline{\Omega}(x, y), \overline{\Omega}(x, y)$ は

$$a \leq x \leq b, \quad \underline{\omega}(x) \leq y \leq \overline{\omega}(x)$$

において 連続な一階の偏導関数をもつ。しかも次の不等式が満足される:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \underline{\omega}''(x) \geq f(x, \underline{\omega}(x), \underline{\omega}'(x)) \\ \overline{\omega}''(x) \leq f(x, \overline{\omega}(x), \overline{\omega}'(x)) \end{cases} \quad a \leq x \leq b$$

$$\begin{aligned}\underline{\Omega}(x, \underline{\omega}(x)) &\leq \underline{\omega}'(x) \leq \overline{\Omega}(x, \underline{\omega}(x)) \\ \underline{\Omega}(x, \overline{\omega}(x)) &\leq \overline{\omega}'(x) \leq \overline{\Omega}(x, \overline{\omega}(x))\end{aligned} \quad a \leq x \leq b$$

$$(1.2) \begin{cases} f(x, y, \underline{\Omega}(x, y)) - \underline{\Omega}_x(x, y) - \underline{\Omega}_y(x, y) \underline{\Omega}(x, y) > 0 \\ f(x, y, \overline{\Omega}(x, y)) - \overline{\Omega}_x(x, y) - \overline{\Omega}_y(x, y) \overline{\Omega}(x, y) < 0 \end{cases}$$

for $a \leq x \leq b, \underline{\omega}(x) \leq y \leq \overline{\omega}(x)$.

これらの条件のもとで, $\underline{\omega}(b) \leq B \leq \overline{\omega}(b)$ となる任意の B に対して, 境界値問題

$$\begin{aligned}y'' &= f(x, y, y') \\ y(a) &= A, \quad y(b) = B\end{aligned}$$

の解が, $a \leq x \leq b, \underline{\omega}(x) \leq y \leq \overline{\omega}(x)$ 内に存在する。”

仮定 (1.1) と (1.2) の役割を示すために この定理の証明の概略を述べよう。

解が存在することを仮定すれば, $y(x), x(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ は次の積分方程式を満足する: まず

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{(b-x)(t-a)}{b-a} & a \leq t \leq x \leq b \\ \frac{(b-t)(x-a)}{b-a} & a \leq x \leq t \leq b \end{cases}$$

とあけは、

$$(1.3) \quad \begin{aligned} y(x) &= \frac{A(b-x) + B(x-a)}{b-a} - \int_a^b G(x,t) f(t, y(t), z(t)) dt \\ z(x) &= \frac{B-A}{b-a} - \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) f(t, y(t), z(t)) dt. \end{aligned}$$

このことは、直接計算によって、 $y'(x) = z(x)$, $z'(x) = f(x, y(x), z(x))$ となることからわかる。

この積分方程式に解の存在することを確認しようとするとき、積分記号のなかの関数 $f(x, y, z)$ の y, z の範囲が制限されていることは不便である。 $\mathbb{R}$ のようにしてこの $f(x, y, z)$ に対して $f^*(x, y, z)$ をつくる：

$\underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x)$ のとき

$$f_1^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, \bar{\Omega}(x, y)) & \text{for } z > \bar{\Omega}(x, y) \\ f(x, y, z) & \text{for } \underline{\Omega}(x, y) \leq z \leq \bar{\Omega}(x, y) \\ f(x, y, \underline{\Omega}(x, y)) & \text{for } z < \underline{\Omega}(x, y) \end{cases}$$

とあけは、 $f_1^*(x, y, z)$ は

$$a \leq x \leq b, \quad \underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x), \quad -\infty < z < +\infty$$

において定義され かつ

$$\max f(x, y, z) = \max f_1^*(x, y, z).$$

$\bar{\omega}(x) < \gamma$ のとき

$$f^*(x, y, z) = f_1^*(x, \bar{\omega}(x), z) + \frac{\gamma - \bar{\omega}(x)}{1 + \gamma - \bar{\omega}(x)},$$

$\gamma < \underline{\omega}(x)$ のとき

$$f^*(x, y, z) = f_1^*(x, \underline{\omega}(x), z) - \frac{\underline{\omega}(x) - \gamma}{1 + \underline{\omega}(x) - \gamma},$$

$\underline{\omega}(x) \leq \gamma \leq \bar{\omega}(x)$ のとき

$$f^*(x, y, z) = f_1^*(x, y, z)$$

と置く. このようにして定義された関数 $f^*(x, y, z)$ は

$$a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < z < +\infty$$

において連続かつ有界となる:

$$|f^*(x, y, z)| \leq M$$

f の代りに f^* で置きかえた積分方程式

$$(1.4) \quad \begin{aligned} y(x) &= \frac{A(b-x) + B(x-a)}{b-a} - \int_a^b G(x, t) f^*(t, y(t), z(t)) dt \\ z(x) &= \frac{B-A}{b-a} - \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x, t) f^*(t, y(t), z(t)) dt \end{aligned}$$

を考える. $a \leq x \leq b$ で連続かつ一様に有界な関数 $y(x), z(x)$:

$$|y(x)| \leq H, \quad |z(x)| \leq H$$

の pair $\{y(x), z(x)\}$ の全体から成る関数の族を $\mathcal{F}$ とする. すると

$$Y(x) = \frac{A(b-x) + B(x-a)}{b-a} - \int_a^b G(x,t) f^*(t, y(t), z(t)) dt,$$

$$Z(x) = \frac{B-A}{b-a} - \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x}(x,t) f^*(t, y(t), z(t)) dt$$

に $\mathcal{F}$ として $\{Y(x), Z(x)\}$ を定義し,

$$T: \{y(x), z(x)\} \rightarrow \{Y(x), Z(x)\}$$

によって写像 T を定義する. $Y(x), Z(x)$ は連続関数であるから, H を適当に定めれば

$$|Y(x)| \leq H, \quad |Z(x)| \leq H$$

となることが証明され, Schauder 型の不動点定理によって (1.4) は解をもつことになる. もし計算すれば H として

$$H = \max \left\{ \frac{(b-a)^2}{8} M + |A|, \frac{(b-a)^2}{8} M + |B|, \frac{|B-A|}{b-a} + \frac{b-a}{4} M \right\}$$

をとればよいことがわかる.

このようにしてえられた解 $\{y(x), z(x)\}$ は境界値問題

$$y'' = f^*(x, y, y')$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

の解である. 不等式 (1.1) は, $y(x)$ は

$$\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x), \quad a \leq x \leq b$$

を満足し, 不等式 (1.2) は $y'(x)$ は

$$\underline{\Omega}(x, y(x)) \leq y'(x) \leq \bar{\Omega}(x, y(x))$$

を満足することの証明に用い^{られ}る。したがって $y(x)$ は与えられた境界値問題の解になる。

南雲氏の存在定理は 安番氏によって もう少し一般的な形で述べられている。

Remark 1

南雲氏は, $\omega(x) \in \text{class } C^2$ と仮定しているが, $\omega(x)$ に関する条件は 次のような 1つとゆるい条件で置き換えられる: “ $\underline{\omega}(x), \bar{\omega}(x)$ は $a \leq x \leq b$ において連続 かつ $a \leq x \leq b$ なる任意の点 $x = \xi$ において, ξ を含む或る区間 I_ξ において定義された $\text{class } C^2$ に属する関数 $\underline{\gamma}(x), \bar{\gamma}(x)$ で”

$$\underline{\gamma}(x) \leq \underline{\omega}(x) \quad \text{on } I_\xi$$

$$\underline{\gamma}''(x) \geq f(x, \underline{\gamma}(x), \underline{\gamma}'(x)) \quad \text{on } I_\xi,$$

$$\bar{\omega}(x) \leq \bar{\gamma}(x) \quad \text{on } I_\xi,$$

$$\bar{\gamma}''(x) \leq f(x, \bar{\gamma}(x), \bar{\gamma}'(x)) \quad \text{on } I_\xi$$

となるものが存在する。” 安番氏は, このような $\underline{\omega}(x), \bar{\omega}(x)$ を

sub-function, super-function と呼んでいる。

Remark 2

$\underline{\Omega}(x, y), \bar{\Omega}(x, y)$ は class C^1 に属すると仮定されている。この条件も、次のようなゆるい条件で置き換えられる：“ $\underline{\Omega}(x, y), \bar{\Omega}(x, y)$ は、 $a \leq x \leq b, \underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x)$ において連続かつ $\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x)$ をみたす 2回連続微分可能な任意の $y(x)$ に対して

$$f(x, y(x), \underline{\Omega}(x, y(x))) - \frac{d}{dx} \underline{\Omega}(x, y(x)) \geq 0$$

$$f(x, y(x), \bar{\Omega}(x, y(x))) - \frac{d}{dx} \bar{\Omega}(x, y(x)) \leq 0$$

を満足する” この条件も安易代りえる。

Remark 3 南型型の存在定理を 目的とする二つの境界値問題 (A), (B) に応用するとき、少し改良しなければならない。その理由は

1° 区間 $a \leq x \leq b$ は 無限区間 $0 \leq x \leq \infty$ である

2° $f(x, y, z)$ は 特異性をもっている。

ために 少し面倒なことが生ずるからである。

区間が有限区間であっても 無限区間であっても 南型の存在定理において仮定されている $\underline{\omega}(x), \bar{\omega}(x), \underline{\Omega}(x, y),$

$\Omega(x, y)$ のまんまにする不等式 さえ成立すれば、少くとも一つは 境界値問題の解 が存在することも示すためには、福原型の存在定理は 極めて有効である。

§2. 福原型の存在定理

1940 年の前後に 南雲, 岡村 両氏によって 2 階常微分方程式の二点境界値問題に関し, beautiful な結果がえられた。南雲氏の結果は §1 に紹介したが。文献は南雲 (函数方程式 No 5 (1939) 27-34, No 6 (1939) 37-44) 岡村 (函数方程式 No 27 (1941) 27-35, No 30 (1941) 14-19, No 31 (1942) 32-40), また Knobloch は 1965 年 Journal of D. Equations 1 (1965) 1-26 に南雲と同じような結果を発表している。福原氏は Kneser の性質を用いて, 境界における条件のみから (しかたして ある条件を満足するように特殊な領域を探さなければならぬが) 解の存在定理を証明することも試み, ついに 南雲, 岡村 Knobloch の結果を 統一的に証明する 全く新しい方法を考案された。先生の original な証明には 難解な部分があるので 他日 証明をわかりやすくしたものを どこかの雑誌に発表する予定である。ここでは 一応 存在定理だけを述べるだけにする。

いろいろな形の存在定理を統一的に取り扱うために、まず第一に、ある条件を満足する関数の族 F (これは (x, y, z) -space におけるグラフで、 $y'' = f(x, y, y')$ の解 $y(x)$ のつくるグラフ $(x, y(x), y'(x))$ と思えばよい) を考える。ある条件とは、 $f(x, y, z)$ がコンパクト集合 D で連続な場合に、その解の集合によって満足されている性質をとりあげて、それらを関数族 F の満足する条件として仮定する。

公理 1° おののおの関数は real line R^1 上のコンパクトな区間 (とくに一点であってもよい) から R^n への連続写像である。ただし 関数が定義される区間は関数に依存する。関数値のとくする空間の次元 n は関数に無関係である。

この公理は、 $y'' = f(x, y, y')$ の解を $y = y(x)$ とするとき、 f の連続性を仮定すれば $y(x), y'(x)$ は x および初期値の連続関数であるという性質に対応する。

公理 2° 関数族に与くする関数の部分はやはり関数族に与くする。

この公理は、解曲線 $(x, y(x), y'(x))$ の部分はやはり解曲線であるという事実に対応する。

公理 3° $R^1 \times R^n$ におけるコンパクトな集合を要素とする集合に Hausdorff の metric を導入した metric space において 関数族はコンパクトな集合である。ここで、 E_1, E_2 を $R^1 \times R^n$ のコンパクト集合とすると、 E_1 と E_2 の Hausdorff の metric は

$$\text{dist}(E_1, E_2) = \inf \{ \rho \mid U_\rho(E_1) \supset E_2, U_\rho(E_2) \supset E_1 \}$$

$U_\rho(E)$ は E からの Euclid の距離が ρ よりも小さい点の集合。

この公理は 本質的な仮定である。 $y'' = f(x, y, y')$ の右辺が連続な場合、解の集合は、同程度連続になるから、関数族としてコンパクトになる。

公理 4° 関数族に属する二つの関数 f, g が $t = \alpha$ で一致するならば、 $t \leq \alpha$ で f と、 $t \geq \alpha$ で g と一致する関数も関数族に属する。

この公理は、解を接続したものはやはり解になるという性質に対応する。

公理 5° 関数族 F に属する曲線によって埋められる集合を F の基本領域といい、 Ω と書く。 F のなかの極大曲

線とは それを真部分集合として含む曲線は $\mathcal{F}$ のなかに含まれていないことをいう。このとき、極大曲線の端点は Ω の境界点である。

この公理は、最大接続可能な解が存在し、端点は方程式の右辺の定義域の境界点であるという事実に対応する。

ついでに注意しておくが、関数族 $\mathcal{F}$ の要素は曲線であり、基本領域 Ω の要素は点となっている。

福原の存在定理を説明するため、基本領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ の点を分類しなければならない。

$\partial\Omega^L$ は基本領域 Ω の左端といい、極大曲線の左端となる点の集り。 $\partial\Omega^R$ は基本領域 Ω の右端といい、極大曲線の右端となる点の集り。

$y'' = f(x, y, y')$ の解曲線で言えば、 $\partial\Omega^L$ の点から左に出る解曲線は、もし接続できれば、必ず Ω の外部にあることを意味する。

$A \in \partial\Omega$ しか $\notin \partial\Omega^L$ とすれば、 A から左に出る曲線 $\in \mathcal{F}$ が存在する。 $\mathcal{L}^-(A)$ は、 A から左に出るすべての曲線によって埋められる点の集りを表わすものとする。このとき

$$\partial\Omega^- = \{A \mid A \text{ は } \partial\Omega \text{ の } \mathcal{L}^-(A) \text{ の集積点とまらない}\}$$

$\mathcal{B}_- = \{A \mid A \text{ は } \mathcal{B} \cap Z^-(A) \text{ の集積点となる}\}$

と置く。同じようにして 左に出る曲線を考えることにし、
 $\mathcal{B}^+$, $\mathcal{B}_+$ が定義される。

$A \in \mathcal{D}$ は $\mathcal{B}^l$ に属する点の集積点でない と仮定する。
 A の左側に, A に十分近い 超平面 $\alpha = \xi$ を考え, これによる
 $Z^-(A)$ の横断面が 連続体であるとき, A は 本来の左 Kneser
 点 と呼ばれる。

C は $\mathcal{D}$ のコンパクト部分とし, F に属する曲線で C と交
 わるものは唯一点で交わる時, C は $\mathcal{D}$ の横断面^{である}という。

次の定理は いわゆる Kneser 定理である:

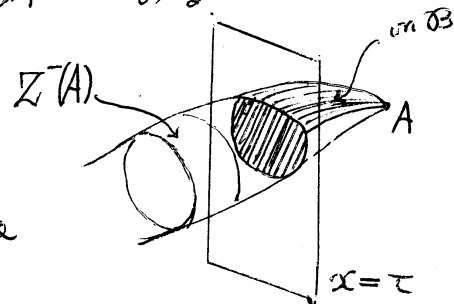
定理 H_1 “ $\mathcal{D}$ の各点は 本来の左 Kneser 点とする。 $E \subset \mathcal{D}$
 は連続体であり, E の各点から 左に出る曲線 $\in F$ によって埋
 められる点の集合, $Z^-(E)$, の横断面は 連続体 である。”

A が 左 Kneser 点であるとは, 次の二つの条件が満足さ
 れるときを言う:

i) $A \notin \mathcal{B}_-$ (A は $\mathcal{B} \cap Z^-(A)$ の孤立点) ならば, A は本来
 の左 Kneser 点。

ii) $A \in \mathcal{B}_-$ (A は $\mathcal{B} \cap Z^-(A)$ の集積点) ならば, A の十

分近く左側にある超平面 $x=\tau$ による $Z^-(A)$ の横断面と $\partial\Omega \cap Z^-(A)$ との合併集合は連続体である。



次の定理は 本来の Kneser 定理, すなわち 定理 H_2 , の拡張である。

定理 H_2 “ Ω の 各点 は 左 Kneser 点 である。

$$\partial\Omega^- \subset \partial\Omega^+$$

$\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$ は 閉集合。

と仮定すれば, $Z^-(E) \cap (\partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-)$ は連続体 である。”

すなわち仮定は, $y'' = f(x, y, y')$ の解曲線については, $A \in \partial\Omega$ のとき, A から左に出る解曲線は, A の十分小さい近傍では点 A を除いて Ω の内部にある ならば, A から右に出る解曲線は もし連続可能であれば すべて Ω の外部にある ことを意味する。

これら二つの定理を用いて, 次の定理に達する。これは 2点境界値問題についての基本的な結果である:

定理 H_3 “ $E \subset \Omega$ は連続体。

$E' \subset \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-$ は連続体。

$E \cap (\mathcal{B}^L \cup \mathcal{B}_-)$ は 少なくとも二つの点を含み, その点
は $\mathcal{B}^L \cup \mathcal{B}_-$ のなかで E' によって分離される
(すなわち, これら二点は, $\mathcal{B}^L \cup \mathcal{B}_- - E'$ の異った連結
成分に属する)

と仮定すれば, E と E' とを結ぶ曲線 $\in F$ が存在する."

§3 福原の定理による南雲型定理の考察

福原の定理の証明をここに紹介する紙数はないので, 証明
を省略してしまつたが, 南雲型定理はどのように取り扱われ
るかを説明しよう。

2階非線型常微分方程式

$$y'' = f(x, y, y')$$

を考える。

非線型 Bessel 方程式 および境界層の方程式の研究に直接役
立つ形で述べる。

存在定理

" $f(x, y, z)$ は (x, y, z) -space の領域

$$0 < x < \infty, \quad \underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x), \quad \underline{\Omega}(x, y) \leq z \leq \bar{\Omega}(x, y)$$

において (x, y, z) の関数として連続である。

(1) $\bar{\omega}(x)$ は $0 \leq x \leq \infty$ で連続かつ単調増加 かつ

$$\bar{\omega}(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\omega}(x) = 1 ;$$

かつ

$$\bar{\omega}(x) = \begin{cases} \bar{\omega}_1(x) & 0 \leq x \leq N_1 \\ \bar{\omega}_2(x) & N_1 \leq x \leq N_2 \\ \bar{\omega}_3(x) & N_2 \leq x < \infty \end{cases}$$

の形に表わされ, ($N_1 = N_2$ の場合も含める)

$\bar{\omega}_1(x)$ は $0 < x \leq N_1$ において $\text{class } C^2$ に属する関数で,

$$\bar{\omega}_1''(x) \leq f(x, \bar{\omega}_1(x), \bar{\omega}_1'(x)) \quad 0 < x \leq N_1 ;$$

$\bar{\omega}_2(x)$ は $N_1 - \varepsilon \leq x \leq N_2$ において $\text{class } C^2$ に属し,

$$\bar{\omega}_2''(x) \leq f(x, \bar{\omega}_2(x), \bar{\omega}_2'(x)) \quad N_1 - \varepsilon \leq x \leq N_2 ;$$

$\bar{\omega}_3(x)$ は $N_2 - \varepsilon \leq x < \infty$ において $\text{class } C^2$ に属し,

$$\bar{\omega}_3''(x) \leq f(x, \bar{\omega}_3(x), \bar{\omega}_3'(x)), \quad N_2 - \varepsilon \leq x < \infty .$$

しかも

$$\bar{\omega}_1(N_1) = \bar{\omega}_2(N_1), \quad \bar{\omega}_1(x) < \bar{\omega}_2(x) \quad N_1 - \varepsilon \leq x < N_1,$$

$$\bar{\omega}_2(N_2) = \bar{\omega}_3(N_2), \quad \bar{\omega}_2(x) < \bar{\omega}_3(x) \quad N_2 - \varepsilon \leq x < N_2 .$$

ε は十分小さい正数.

(2) $\underline{\omega}(x)$ は $0 \leq x \leq +\infty$ において連続かつ単調増加で,

$$\underline{\omega}(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \underline{\omega}(x) = 1$$

かつ

$$\underline{\omega}(x) = \begin{cases} \underline{\omega}_1(x) & 0 \leq x \leq M, \\ \underline{\omega}_2(x) & M \leq x \leq \infty \end{cases}$$

の形に表わされ,

$\underline{\omega}_1(x)$ は $0 < x \leq M$ において $\text{class } C^2$ に属し,

$$\underline{\omega}_1''(x) \geq f(x, \underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_1'(x)), \quad 0 < x \leq M;$$

$\underline{\omega}_2(x)$ は $M-\varepsilon \leq x < \infty$ において class C^2 に属し,

$$\underline{\omega}_2''(x) \geq f(x, \underline{\omega}_2(x), \underline{\omega}_2'(x)) \quad M-\varepsilon \leq x < \infty.$$

しかも

$$\underline{\omega}_1(M) = \underline{\omega}_2(M), \quad \underline{\omega}_1(x) > \underline{\omega}_2(x) \quad M-\varepsilon \leq x < M$$

$$\underline{\omega}_1'(M) = \underline{\omega}_2'(M)$$

(3) $\underline{Q}(x, y), \bar{Q}(x, y)$ は

$$0 < x < \infty, \quad \underline{\omega}_1(x) \leq y \leq \bar{\omega}_2(x)$$

において 1 回連続微分可能で、次の不等式をみたす:

$$\underline{Q}(x, \bar{\omega}_1(x)) \leq \bar{\omega}_1'(x) \leq \bar{Q}(x, \bar{\omega}_1(x)) \quad 0 < x \leq N_1$$

$$\underline{Q}(x, \bar{\omega}_2(x)) \leq \bar{\omega}_2'(x) \leq \bar{Q}(x, \bar{\omega}_2(x)) \quad N_1-\varepsilon \leq x \leq N_2$$

$$\underline{Q}(x, \bar{\omega}_3(x)) \leq \bar{\omega}_3'(x) \leq \bar{Q}(x, \bar{\omega}_3(x)) \quad N_2-\varepsilon \leq x < \infty$$

$$\underline{Q}(x, \underline{\omega}_1(x)) \leq \underline{\omega}_1'(x) \leq \underline{Q}(x, \underline{\omega}_1(x)) \quad 0 < x \leq M$$

$$\underline{Q}(x, \underline{\omega}_2(x)) \leq \underline{\omega}_2'(x) \leq \underline{Q}(x, \underline{\omega}_2(x)) \quad M-\varepsilon \leq x < \infty.$$

しかも 次の不等式が成り立つ:

$$f(x, y, \underline{Q}(x, y)) - \underline{Q}_x(x, y) - \underline{Q}_y(x, y) \underline{Q}(x, y) > 0$$

$$f(x, y, \bar{Q}(x, y)) - \bar{Q}_x(x, y) - \bar{Q}_y(x, y) \bar{Q}(x, y) < 0$$

$$\text{for } 0 < x < \infty, \quad \underline{\omega}(x) \leq y \leq \bar{\omega}(x).$$

これらの条件がすべて満足されるならば

境界値問題

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1$$

$$0 < y(x) < 1 \quad \text{for } 0 < x < \infty$$

は少なくとも一解をもつ。このとき $\underline{w}(x) < y(x) < \bar{w}(x), 0 < x < \infty$ ”

証明

$\{a_n\} \downarrow 0, \quad \{b_n\} \uparrow \infty$ なる二組の点列をとる。

$a_n = a, \quad b_n = b$ とおき,

$$\underline{w}(a) \leq A \leq \bar{w}(a), \quad \underline{w}(b) \leq B \leq \bar{w}(b)$$

なる A, B を適当にえらび、

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$

は解をもつことを証明すればよい。いっさい そのような解の一つを $y(x) = y_n(x)$ とすれば、 $\{y_n(x)\}$ なる解の列をえる。これから適当な部分列をえり、広義一様収束する極限は最初の境界値問題の解である。 n は十分大きくとり

$$a = a_n < \min(N_1, M), \quad b = b_n > \max(N_2, M) \text{ とする。}$$

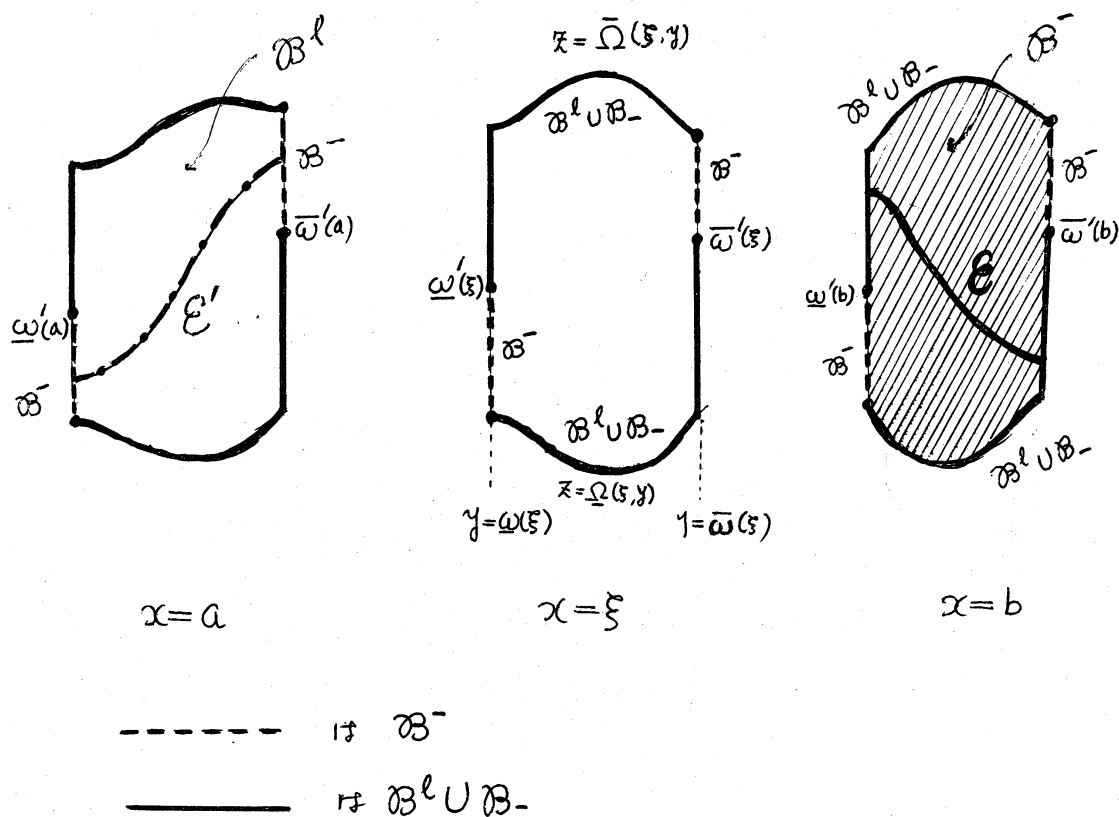
② とし、

$$a \leq x \leq b, \quad \underline{w}(x) \leq y \leq \bar{w}(x), \quad \underline{Q}(x, y) \leq F \leq \bar{Q}(x, y)$$

で表わされる (x, y, F) -space の閉領域をとる。②の任意

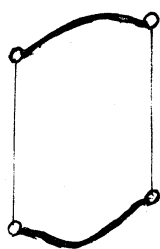
の点を (ξ, η, ζ) とし, $x=\xi$ のとき $y=\eta$, $y'=\zeta$ となる解を $\varphi(x)$ で表わす. F は 解曲線 $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ の全体で $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ が点集合として Ω に属するようなものである. このとき Ω は F の基本領域となる.

Ω の 超平面 $x=a$, $x=\xi$, $x=b$ に関する切口を考える:



もう少し詳しく説明する. 切口は 以下 あげて 超平面 $x=\xi$ 上にあるものと考える.

次の六つの Cases に分けて, Ω の境界点 (つまりは超平面 $x=\xi$ による Ω の切口の境界点) を詳べる.

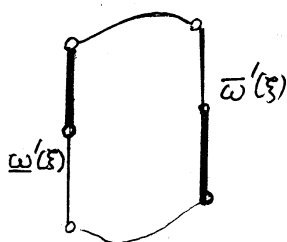


$$\underline{\omega}(\xi) < \eta < \bar{\omega}(\xi), \quad \zeta = \bar{\Omega}(\xi, \eta)$$

or

$$\underline{\omega}(\xi) < \eta < \bar{\omega}(\xi), \quad \zeta = \underline{\Omega}(\xi, \eta)$$

∴ 存在 $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{B}^l$ である。

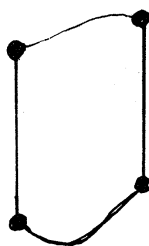


$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \underline{\Omega}(\xi, \eta) < \zeta < \bar{\omega}'(\xi)$$

or

$$\eta = \underline{\omega}(\xi), \quad \underline{\omega}'(\xi) < \zeta < \bar{\Omega}(\xi, \eta)$$

∴ 存在 $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{B}^l$



$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \bar{\omega}'(\xi) < \zeta = \bar{\Omega}(\xi, \eta)$$

or

$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \zeta = \underline{\Omega}(\xi, \eta) < \bar{\omega}'(\xi)$$

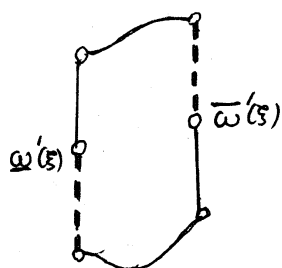
or

$$\eta = \underline{\omega}(\xi), \quad \underline{\omega}'(\xi) < \zeta = \bar{\Omega}(\xi, \eta)$$

or

$$\eta = \underline{\omega}(\xi), \quad \zeta = \underline{\Omega}(\xi, \eta) < \underline{\omega}'(\xi)$$

∴ 存在 $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{B}^l$



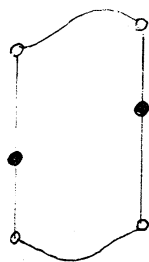
$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \bar{\omega}'(\xi) < \zeta < \bar{\Omega}(\xi, \eta)$$

or

$$\eta = \underline{\omega}(\xi), \quad \underline{\Omega}(\xi, \eta) < \zeta < \underline{\omega}'(\xi)$$

∴ 存在 $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{B}^- \cap \mathcal{B}^+$. このことは

$\mathcal{B}^-$ の点では, $\mathcal{B}^+$ に属する点と見做す。

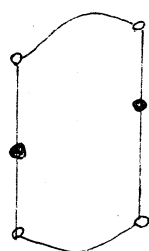


$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \zeta = \bar{\omega}'(\xi), \quad \bar{\omega}''(\xi) < f(\xi, \bar{\omega}(\xi), \bar{\omega}'(\xi))$$

or

$$\eta = \underline{\omega}(\xi), \quad \zeta = \underline{\omega}'(\xi), \quad \underline{\omega}''(\xi) > f(\xi, \underline{\omega}(\xi), \underline{\omega}'(\xi))$$

$$\text{である } (\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{B}^l \cap \mathcal{B}^r$$



$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \zeta = \bar{\omega}'(\xi), \quad \bar{\omega}''(\xi) = f(\xi, \bar{\omega}(\xi), \bar{\omega}'(\xi))$$

or

$$\eta = \underline{\omega}(\xi), \quad \zeta = \underline{\omega}'(\xi), \quad \underline{\omega}''(\xi) = f(\xi, \underline{\omega}(\xi), \underline{\omega}'(\xi))$$

である (ξ, η, ζ) は, $\mathcal{B}^l$ に属しなければ, $\mathcal{B}_-$ に属しかつ左Kneser点である.

最後の命題以外の証明は, やさしいが, 最後命題の証明はむづかしい。

ただし $x = N_1$ or $x = N_2$ のときは

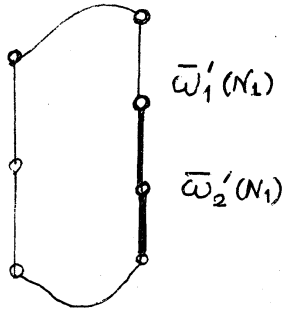
$$\bar{\omega}_1'(N_1) = \lim_{x \rightarrow N_1-0} \bar{\omega}_1'(x) > \bar{\omega}_2'(N_1),$$

$$\bar{\omega}_2'(N_2) = \lim_{x \rightarrow N_2-0} \bar{\omega}_2'(x) \geq \bar{\omega}_3'(N_2),$$

$x = M$ のときは

$$\underline{\omega}_1'(M) = \lim_{x \rightarrow M-0} \underline{\omega}_1'(x) = \underline{\omega}_2'(M)$$

となつてゐるから、 $x=N_1$, $x=N_2$ のときは少し様子が異なる。そこで 例へば $x=N_1$ のときを改めて調べる。



いまこの

$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \underline{\omega}(\xi, \eta) < \zeta < \bar{\omega}'(\xi)$$

なる部分は,

$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \underline{\omega}(\xi, \eta) < \zeta < \bar{\omega}'_2(N_1),$$

$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \zeta = \bar{\omega}'_2(N_1),$$

$$\eta = \bar{\omega}(\xi), \quad \bar{\omega}'_2(N_1) < \zeta < \bar{\omega}'_1(N_1)$$

の三つの部分に分けて調べなければならない。それぞれ、 $\partial^L \cap \partial^+$, ∂^L , $\partial^L \cap \partial^x$, したがつて、やはり ∂^L に属することになる。

宿原の存在定理 H_3 を応用するため、 E として $x=b$ における Δ の切口上の実線 Γ で図示されてゐる一方の $\partial^L \cup \partial_-$ の点と他方の $\partial^L \cup \partial_-$ の点を結ぶ曲線をとる; E' として $x=a$ における Δ の切口上の点線で図示されてゐる ∂^- (二つの連結成分) の二つの点を結ぶ曲線をとる。^{この} $E \cap (\partial^L \cup \partial_-)$ は二点を含む。この二点を Δ の境界 ∂ 上で $\partial^L \cup \partial_-$ のなかで結ぶとすれば、図から明らかであるように、どうしても E' と交わりぬけなければならない。したがつて E と E' との

点を結ぶ曲線 $\in F$ が少なくとも一つは存在する。この曲線に対応する解 $y(x)$ は,

$$\underline{\omega}(x) \leq y(x) \leq \bar{\omega}(x), \quad \underline{\Omega}(x, y(x)) \leq y'(x) \leq \bar{\Omega}(x, y(x)) \\ a \leq x \leq b$$

を満足する。このようにして南雲型の定理は証明される。

§4. 非線型 Bessel 方程式

境界値問題

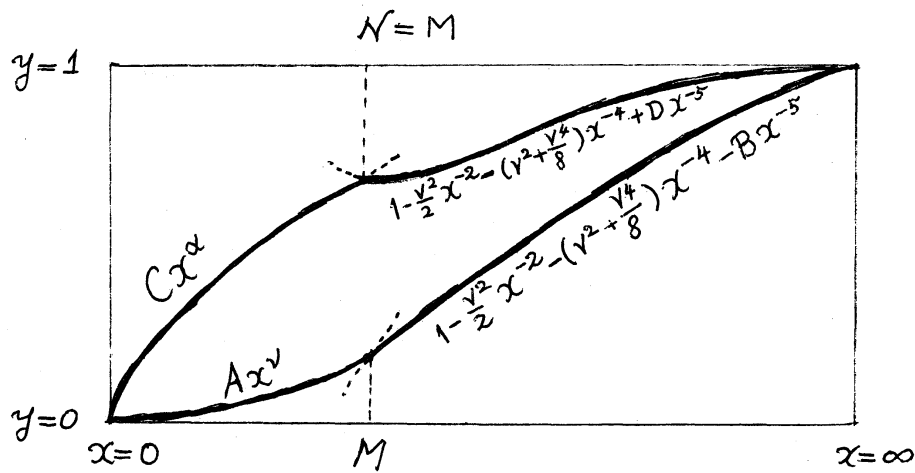
$$y'' = -x^{-1}y' + \nu^2 x^{-2}y + y^3 - y \equiv f(x, y, y')$$

$$y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1$$

$$0 < y(x) < 1 \quad \text{for } 0 < x < \infty$$

を考える。 $\nu > 0$ はパラメーター。

$x=0$ は確定型特異点, $x=\infty$ は不確定型特異点であるから, ここにおける形式解の計算により, $x=0$ では ν を指数とする解が存在し, $x=\infty$ では x^{-2} の整級数に漸近展開される解が存在することがわかる。これらのことを考慮すれば $\underline{\omega}(x), \bar{\omega}(x)$ として何をとればよいかは大体の見当がつく。図は $\nu > 1$ の場合である。もちろん以下の結果は $0 < \nu \leq 1$ のときも正しい。



“

$$\underline{\omega}_1(x) = Ax^\nu, \quad \text{for } 0 < x \leq M + \varepsilon$$

$$\underline{\omega}_2(x) = 1 - \frac{\nu^2}{2}x^{-2} - \left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right)x^{-4} - Bx^{-5} \quad \text{for } M - \varepsilon \leq x < \infty$$

$$\bar{\omega}_1(x) = Cx^\alpha \quad \text{for } 0 < x \leq M + \varepsilon$$

$$\bar{\omega}_2(x) = 1 - \frac{\nu^2}{2}x^{-2} - \left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right)x^{-4} + Dx^{-5} \quad \text{for } M - \varepsilon \leq x < \infty$$

ε は十分小さな正数, A, B, C, D はすべて正数.

$$\bar{\Omega}(x, y) = E x^{\alpha-1} \quad E > 0$$

$$\underline{\Omega}(x, y) = -E x^{\alpha-1}$$

$B \gg 1$ とし, M, A, D, C, α および E を B の関数として適当に定めれば, §3 の存在定理に仮定されたすべての条件が満足される.”

1° まず $y = \underline{\omega}_1(x)$ と $y = \underline{\omega}_2(x)$ とが接するための条件を探る. その条件は

$$Ax^\nu = 1 - \frac{\nu^2}{2}x^{-2} - \left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right)x^{-4} - Bx^{-5},$$

$$\sqrt{A}x^{\sqrt{v}} = \sqrt{v^2}x^{-2} + (4v^2 + \frac{v^4}{2})x^{-4} + 5Bx^{-5}$$

が共通根をもつことをある $Ax^{\sqrt{v}}$ を消去すれば

$$\sqrt{v}x^5 - \sqrt{v^2}(1 + \frac{v}{2})x^3 - 4v^2(1 + \frac{v}{4})(1 + \frac{v^2}{2})x - (5 + v)B = 0.$$

この根が正確に計算できないために 摂動法を用いざるを得ないと思う。

$B \gg 1$ と仮定する。根 M (接点の x 座標) は

$$M = \left(\frac{5+v}{v}\right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{5}(v + \frac{v^2}{2})\left(\frac{v}{5+v}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \dots\right)$$

$\dots$ は $\left(\frac{v}{5+v}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}}$ のべき級数。以下同様

したがって $A = \underline{\omega}_2(M) M^{-\sqrt{v}}$ より

$$A = \frac{5}{5+v} \left(\frac{v}{5+v}\right)^{\frac{v}{5}} B^{-\frac{v}{5}} \left(1 - \frac{1}{10}v^2(5+v)\left(\frac{v}{5+v}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \dots\right).$$

$x = M$ において

$$\underline{\omega}_1(x) = \underline{\omega}_2(x), \quad \underline{\omega}'_1(x) = \underline{\omega}'_2(x)$$

となるが、さらに

$$\underline{\omega}''_1(x) > \underline{\omega}''_2(x) \quad \text{at } x = M$$

が成立つ。だって

$$\underline{\omega}''_1(M) - \underline{\omega}''_2(M) =$$

$$= 5(5+\nu) \left(\frac{\nu}{5+\nu} \right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} \left(1 + \dots \right) > 0 \quad \text{when } B \gg 1$$

このことは

$$\underline{\omega}_1(x) > \underline{\omega}_2(x) \quad M-\varepsilon \leq x \leq M+\varepsilon, \quad x \neq M$$

となっていることを示す。

$$2^\circ \quad \underline{\omega}_1(x) = A x^\nu \quad \text{が}$$

$$\underline{\omega}_1''(x) > f(x, \underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_1'(x))$$

を満足する x の範囲は

$$0 < x < A^{-\frac{1}{\nu}}$$

となることがわかる。よって

$$A^{-\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{5+\nu}{5} \right)^{\frac{1}{\nu}} \left(\frac{5+\nu}{\nu} \right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{1}{10} \nu(5+\nu) \left(\frac{\nu}{5+\nu} \right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \dots \right)$$

よって

$$M < A^{-\frac{1}{\nu}}$$

故に $\underline{\omega}_1(x)$ は $0 < x \leq M+\varepsilon$ において

$$\underline{\omega}_1''(x) > f(x, \underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_1'(x))$$

をみたす。

$$3^\circ \quad \underline{\omega}_2(x) = 1 - \frac{\nu^2}{2} x^{-2} - \left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8} \right) x^{-4} - B x^{-5} \quad \text{が}$$

$$\underline{\omega}_2''(x) > f(x, \underline{\omega}_2(x), \underline{\omega}_2'(x))$$

を満足する x の範囲を求める。直接計算すればすぐわかるように、不等式

$$\begin{aligned}
 (*) \quad & 2B + \frac{3}{64}v^8 x^{-3} + \frac{3}{2}\left(v^2 + \frac{v^4}{8}\right)^2 v^2 x^{-5} \\
 & + 3\left(v^4 + \frac{v^8}{8}\right)B x^{-6} + \left(\frac{3}{2}v^2 B^2 + \left(v^2 + \frac{v^4}{8}\right)^3\right)x^{-7} \\
 & + 3\left(v^2 + \frac{v^4}{8}\right)B x^{-8} + 3\left(v^2 + \frac{v^4}{8}\right)B^2 x^{-9} + B^3 x^{-10} \\
 & > \left(16v^2 + 4v^4 + \frac{v^6}{8}\right)x^{-1} + (25 + 2v^2)B x^{-2} \\
 & + 3v^4 x^{-3} + 6v^2 B x^{-4} + 3B^2 x^{-5}.
 \end{aligned}$$

をみたす x の値に対して $\omega_2'' > f$ が成立つ。よってこの不等式の左辺から $2B + B^3 x^{-10}$ 、右辺から $3B^2 x^{-5}$ なる項をとりだし、

$$2B + B^3 x^{-10} > 3B^2 x^{-5}$$

が成立つ範囲を考える。この範囲は $x = \infty$ までのびていなければならないことから、

$$x > B^{\frac{1}{5}}.$$

よって

$$\left(\frac{5+v}{v}\right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} \leq x$$

にあっては上記の不等式は もちろん成立し、かつ

$$2B + B^3 x^{-10} - 3B^2 x^{-5} \geq \frac{5(10+v)}{(5+v)^2} B \quad \text{for} \quad \left(\frac{5+v}{v}\right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} \leq x$$

しめるに 不等式(*) において, $2B, B^3x^{-10}, 3B^2x^{-5}$ 以外の項の大きさは $O(B^{\frac{3}{5}}) = o(B)$ を超えない。そして, v に関係するが, B を十分大きくとれば 不等式(*) は $(\frac{5+v}{v})^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} \leq x < \infty$ において成立つ。しかも

$$(\frac{5+v}{v})^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} < M.$$

である。

故に $\omega_2(x)$ は $M-\varepsilon \leq x < \infty$ において

$$\omega_2''(x) > f(x, \omega_2(x), \omega_2'(x))$$

をみたす。

4° $y = \omega_2(x)$ は極値をもつことがわかるから, その極値も $x = M$ においてとるから D の値を定める。この極小値は最小値である。極値を与える x は $\omega_2'(x) = 0$ の根であるから, そのような x は

$$v^2 x^3 + (4v^2 + \frac{v^4}{2}) x - 5D = 0$$

の根であり, かつ この方程式は ただ一つの実根 > 0 をもつ。そして

$$D = \frac{1}{5} \left\{ v^2 M^3 + (4v^2 + \frac{v^4}{2}) M \right\}$$

となるから D を定める。このとき

$$D = \frac{v^2}{5} \left(\frac{5+v}{v} \right)^{\frac{3}{5}} B^{\frac{3}{5}} \left(1 + \left(4 + \frac{3v}{5} + \frac{4v^2}{5} \right) \left(\frac{v}{5+v} \right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \dots \right).$$

C において $C = \bar{\omega}_2(M) M^{-\alpha}$ となるように定めれば

$$C = \left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{\alpha}{5}} B^{-\frac{\alpha}{5}} \left(1 - \frac{\nu}{5} \left(\alpha + \frac{3+\alpha}{2}\nu\right) \left(\frac{\nu}{5+\nu}\right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \dots\right)$$

をえる。このとき

$$\bar{\omega}_1'(M) > \bar{\omega}_2'(M) = 0.$$

$$5^\circ \quad \bar{\omega}_2(x) = 1 - \frac{\nu^2}{2} x^{-2} - \left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right) x^{-4} + D x^{-5} \quad \text{が}$$

$$\bar{\omega}_2''(x) < f(x, \bar{\omega}_2(x), \bar{\omega}_2'(x))$$

を満足する x の範囲を探そう。この条件は β_{33} の不等式(*) において B の代わりに $-D$ とおけばえられる。

よって

$$\begin{aligned} (*) \quad & (25+2\nu^2)D x^{-2} + \frac{3\nu^8}{64} x^{-3} + 6\nu^2 D x^{-4} \\ & + \frac{3}{2}\nu^2 \left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right)^2 x^{-5} + \left(\frac{3\nu^2}{2} D^2 + \left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right)^3\right) x^{-7} \\ & + 3\left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right) D^2 x^{-9} \\ & < 2D + \left(16\nu^2 + 4\nu^4 + \frac{\nu^6}{8}\right) x^{-1} + 3\nu^4 x^{-3} + 3D^2 x^{-5} \\ & + 3\left(\nu^4 + \frac{\nu^6}{8}\right) D x^{-6} + 3\left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right)^2 D x^{-8} + D^3 x^{-10}. \end{aligned}$$

この不等式は 次の不等式が同時に成り立つ x の値に於いて成り立つ:

$$(25+2\nu^2)D x^{-2} < D; \quad 9\nu^2 D x^{-4} < D;$$

$$\frac{3}{64}\nu^8 x^{-3} < \frac{\nu^6}{64} x^{-1}; \quad \frac{3\nu^2}{2} \left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right)^2 x^{-5} < \frac{6}{64}\nu^6 x^{-1};$$

$$\left(\nu^2 + \frac{\nu^4}{8}\right)^3 x^{-7} < \frac{\nu^6}{64} x^{-1}; \quad \frac{3\nu^2}{2} D^2 x^{-7} < \frac{3}{4} D^2 x^{-5};$$

$$8(1+2\nu^2+\nu^4)D^2 x^{-9} < 2D^2 x^{-5}.$$

これら 7 個の不等式は $\sqrt{2V^2+25} < x$ において同時に成立つ。ただし $\bar{\omega}_2(x) < 1$ でなければならぬ。したがって

$\bar{\omega}_2(x)=1$ の有限な正根を x_0 とすれば, 不等式(**) は

$$\max\left\{(2V^2+25)^{\frac{1}{2}}, x_0\right\} < x$$

において成立つ。しかるに x_0 は

$$\frac{V^2}{2}x^3 + (V^2 + \frac{V^4}{8})x - D = 0$$

の根である。 $B \gg 1$ のとき $D \gg 1$ であるから,

$$x_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{5+V}{V}\right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} (1 + \dots) < M.$$

よって

$$\bar{\omega}_2(x) \text{ は } M - \varepsilon \leq x < \infty \text{ において}$$

$$\bar{\omega}_2'' < f(x, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2')$$

をみたす。

$$6^\circ \quad \bar{\omega}_1(x) = Cx^\alpha \quad \text{or} \quad \bar{\omega}_1'' < f(x, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1') \text{ を}$$

$0 < x \leq M$ において満足するためには

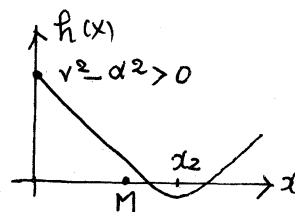
$$h(x) \equiv V^2 - \alpha^2 - x^2 + C^2 x^{2\alpha+2}, \quad 0 < x \leq M$$

が成立てばよいことがわかる。

$h(x)$ の最小値をとる x の値を x_2 とすれば $x_2 = [(1+\alpha)C^2]^{-\frac{1}{2\alpha}}$. よって α を

$$M < x_2, \text{ or } h(M) > 0$$

となるように定める。直接計算によつて α の満足すべき条件は



$$\alpha < \frac{3V^2}{5} \left(\frac{V}{5+V} \right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \dots, \quad \text{かつ} \quad \alpha < \frac{V}{\sqrt{5}}$$

となることがわかる

70 $\underline{\Omega}, \bar{\Omega}$ が §3 の存在定理に述べた条件も満足するため E を十分大きくとればよい. 初等的計算ではあるが紙数を要するので省略する. E は十分大きいといってトビきるだけ精密な値でなければならぬ.

$$E > (V^2 C + V^{2\alpha} C^3) \alpha^{-1}; \quad E > \max(V^{2-\alpha}, M^{2-\alpha}) \alpha^{-1};$$

$$E > VC; \quad E > V^2 M^{-\alpha} \alpha^{-1};$$

$$E > V^2 x^{-\alpha-2} + (4V^2 + \frac{V^4}{2}) x^{-\alpha-4} + 5B x^{-\alpha-5} \quad \text{for } M \leq x < \infty;$$

$$\left(\frac{1-V^2 x^{-2}}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \underline{\omega}_2(x) \quad \text{の根を } S \text{ とすれば}$$

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \right)^{\frac{1}{5}} B^{\frac{1}{5}} \left(1 + \frac{V^2}{10} \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{2}{5}} B^{-\frac{2}{5}} + \dots \right).$$

したがって $V > 5(\sqrt{3}-1)$ ならば $M < S$, $0 < V \leq 5(\sqrt{3}-1)$

ならば $S < M$ となる. $V^2 x^{-2} \underline{\omega}_2(x) + \underline{\omega}_2(x)^3 - \underline{\omega}_2(x) =$
 $= -2V^2 x^{-4} (1 + O(x^{-1}))$ となることにより注意する. したがって

$$E > (-V^2 x^{-2} \underline{\omega}_2(x) - \underline{\omega}_2(x)^3 + \underline{\omega}_2(x)) x^{2-\alpha} \alpha^{-1}$$

for $S \leq x < \infty$ when $V > 5(\sqrt{3}-1)$ or $M \leq x < \infty$ when $V \leq 5(\sqrt{3}-1)$.

および

$$E > \frac{2}{3\sqrt{3}} (1-V^2 S^{-2})^{\frac{3}{2}} \max(M^{2-\alpha}, S^{2-\alpha}) \alpha^{-1}.$$

4つきより 7個の不等式を満足するよう E をとればよい.

§5 境界層の方程式 (Algebraic Type)

foregoing において説明したように, 方程式は

$$y'' = -\frac{1}{\sqrt{y}} (2xy' + 4\lambda(1-y)) \equiv f(x, y, y')$$

$$y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1$$

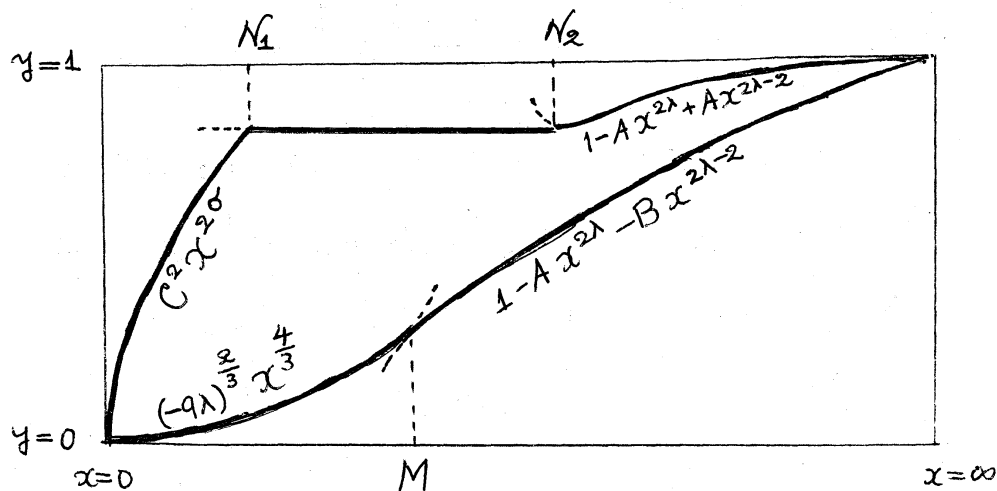
$$0 < y(x) < 1 \quad \text{for } 0 < x < \infty.$$

与えられる.

パラメータ λ は負の数で, 不等式

$$(*) \quad -\frac{3}{2}\lambda(3-2\lambda)(5-3\lambda) < 1$$

を満足する λ である. するに $-0.042 \leq \lambda < 0$.



“

$$u_1(x) = (-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} \quad \text{for } 0 \leq x \leq M+\varepsilon$$

$$u_2(x) = 1 - Ax^{2\lambda} - Bx^{2\lambda-2} \quad \text{for } M-\varepsilon \leq x < \infty$$

$$\bar{\omega}_1(x) = C^2 x^{2\sigma} \quad \text{for } 0 < x \leq N_1$$

$$\bar{\omega}_2(x) = 1 - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^\lambda A \quad \text{for } N_1 - \varepsilon \leq x \leq N_2$$

$$\bar{\omega}_3(x) = 1 - A x^{2\lambda} + A x^{2\lambda-2} \quad \text{for } N_2 - \varepsilon \leq x < \infty$$

$$\bar{\Omega}(x, y) = F \frac{y}{x},$$

$$\underline{\Omega}(x, y) = 0$$

ここで σ は $0 < 2\sigma < 1$ なる任意の数

$$N_1 = \left(1 - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^\lambda A \right)^{\frac{4}{\lambda}} \left(\frac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_2 = \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C^2 = \left(\frac{2(\sigma-\lambda)}{\sigma(1-2\sigma)} \right)^\sigma \left(1 - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^\lambda A \right)^{1-\frac{\sigma}{2}}$$

$\varepsilon > 0$ は十分小なる数.

A, B は

$$(**) \quad \begin{cases} (-q\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} = 1 - A x^{2\lambda} - B x^{2\lambda-2}, \\ \frac{2}{3} (-q\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} = -\lambda A x^{2\lambda} - (\lambda-1) B x^{2\lambda-2} \end{cases}$$

が共通根 $M > 0$ を持つような正の数である

$F > \frac{4}{3}$ なる正の数.

このとき λ が不等式(*) を満足する負数とすれば,
§3の存在定理に仮定された すべての条件が満足される。”

ここでは λ に関する制限(*) がどのようにして与えられた

かを説明したい。方程式(**)が共通根をもつことは、二つの曲線 $y = \omega_1(x)$ と $y = \omega_2(x)$ が接することを意味する。

(**)より $Ax^{2\lambda}$ を消去すれば

$$H(x) \equiv \left(\frac{2}{3} - \lambda\right)(-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} + \lambda - Bx^{2\lambda-2} = 0,$$

また $Bx^{2\lambda-2}$ を消去すれば

$$K(x) \equiv \left(\frac{5}{3} - \lambda\right)(-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} - (1-\lambda) + Ax^{2\lambda} = 0.$$

共通根 $M > 0$ をもつと仮定すれば、 $B > 0$ より

$$M > \left(\frac{(-9\lambda)^{\frac{1}{3}}}{3(2-3\lambda)}\right)^{\frac{3}{4}} \equiv \left(\frac{-3\lambda}{2-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}} (-9\lambda)^{-\frac{1}{2}},$$

また $A > 0$ より $\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}} (-9\lambda)^{-\frac{1}{2}} > M.$

共通根 M を A の関数と考えれば $K(x) = 0$ から、 M は一意的に定まり A の減少関数となることがわかる。

M は B の関数とも考えられる。しかし M は B の増加関数となることが確かめられる。故に A, B のとりうる値は

$$0 < A < \frac{2}{2-3\lambda} \left(\frac{(-9\lambda)^{\frac{1}{3}}}{3(2-3\lambda)}\right)^{-\frac{3\lambda}{2}},$$

$$\frac{2}{5-3\lambda} \left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3-3\lambda}{2}} (-9\lambda)^{-1+\lambda} > B > 0,$$

このとき 共通根 M は次の不等式を満足しなければならない

$$\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}} (-9\lambda)^{-\frac{1}{2}} > M > \left(\frac{-3\lambda}{2-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}} (-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}.$$

逆に上の不等式をみたす M の値に対しては,

$$\left(\frac{2}{3}-\lambda\right)(-9\lambda)^{\frac{2}{3}} M^{\frac{4}{3}} + \lambda > 0, \left(\frac{5}{3}-\lambda\right)(-9\lambda)^{\frac{2}{3}} M^{\frac{4}{3}} - (1-\lambda) > 0$$

となる. したがって $H(M)=0$, $K(M)=0$ となるように $A>0$, $B>0$ は一意的に定まり, かつ上記の不等式をみたすことがわかる.

共通根 M としてどんな値が最適であるかはよくわからないが, ここでは $A>0$ は十分小さいと考えて, $K(x)=0$ の根 M を, 摂動法により求めれば, 次の収束展開式で与えられる:

$$M = \left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}} (-9\lambda)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{3}{4} \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3\lambda}{2}} (-9\lambda)^{-\lambda} A + \dots \right\}$$

... は $\left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3\lambda}{2}} (-9\lambda)^{\lambda} A$ の λ べき級数.

このとき $H(M)=0$ より, B は次の展開式で表わされる:

$$B = \frac{2}{5-3\lambda} \left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3-3\lambda}{2}} (-9\lambda)^{-1+\lambda} \left\{ 1 - \frac{5-3\lambda}{2} \left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda}\right)^{\frac{3\lambda}{2}} (-9\lambda)^{-\lambda} A + \dots \right\}.$$

1° $\underline{\omega}_1(x) = (-9\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}$ は $0 < x < (-9\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ において不等式 $\underline{\omega}_1''(x) > f(x, \underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_1'(x))$ を満足することがわかるから, $0 < x \leq M + \varepsilon$ において不等式

$$\underline{\omega}_1''(x) > f(x, \underline{\omega}_1(x), \underline{\omega}_1'(x))$$

は満足される.

2° $\underline{\omega}_2(x) = 1 - Ax^{2\lambda} - Bx^{2\lambda-2}$ 对 $\underline{\omega}_2''(x) > f(x, \underline{\omega}_2(x), \underline{\omega}_2'(x))$ を満足するためには 次の不等式が成立しなければならない:

$$(\#) \quad (1-\lambda)(3-2\lambda)B < \left(\frac{2B}{\sqrt{1-Ax^{2\lambda}-Bx^{2\lambda-2}}} + \lambda(1-2\lambda)A \right) x^2.$$

この不等式は $M \leq x < \infty$ において成り立つならば連続性により $M-\varepsilon \leq x < \infty$ において満足されることになる。不等式(*)は上記の不等式が $x=M$ において成り立つための条件である。じつさ、 B , $x=M$ の代わりに A に対する展開式を代入し、^(*)の両辺の主要項を比較すればすぐにわかることである。不等式(*)の右辺の導関数の零点を S とすれば、

$$S = \left(\frac{3-\lambda}{5-3\lambda} \right)^{\frac{1}{2-2\lambda}} \left(\frac{3-3\lambda}{5-3\lambda} \right)^{\frac{3}{4}} (-4\lambda)^{-\frac{1}{2}} \{ 1 - \dots \}$$

となる。しかるに $S < M$ であるから、(*)の右辺は $M \leq x < \infty$ において x の単調増加関数である。よって $-\frac{3}{2}\lambda(3-2\lambda)(5-3\lambda) < 1$ なる λ の値に対しては (*) は $M \leq x < \infty$, したがって $\underline{\omega}_2'' > f(\lambda, \underline{\omega}_2, \underline{\omega}_2')$ は $M-\varepsilon \leq x < \infty$ において満足されることになる。

2° $\bar{\omega}_3(x) = 1 - Ax^{2\lambda} + Ax^{2\lambda-2}$ は、 $\left(\frac{3-5\lambda+2\lambda^2}{2-\lambda+2\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} < x < \infty$ において、 $\bar{\omega}_3'' < f(\lambda, \bar{\omega}_3, \bar{\omega}_3')$ を満足すること容易に確かめられる。一方 $y = \bar{\omega}_3(x)$ は $x = \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$ において最小値(極小値)をとることもわかる。このときの最小値は

$$\bar{\omega}_3 \left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{-\lambda}} \right) = 1 - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^{\lambda} A.$$

$-1 < \lambda < 0$ ならば

$$\left(\frac{3-5\lambda+2\lambda^2}{2-\lambda+2\lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。そこで不等式(*)をみたす λ の値 N_2 に対して

$$\bar{\omega}_3(x) \text{ は, } N_2 \equiv \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ とおくとき, } N_2 - \varepsilon \leq x < \infty$$

において $\bar{\omega}_3''(x) < f(x, \bar{\omega}_3(x), \bar{\omega}_3'(x))$ をみたす。

3° $\bar{\omega}_2(x) \equiv \text{const} = D$ は $0 < D < 1$ なる限り, 任意の x に対して $\bar{\omega}_2'' < f(x, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2')$ を満足する。故

$$に, \quad D = 1 - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^{\lambda} A$$

とあければ,

$$\bar{\omega}_2(x) = \bar{\omega}_3(x), \quad \bar{\omega}_2'(x) = \bar{\omega}_3'(x) \quad \text{at } x = N_2,$$

$$\bar{\omega}_2(x) < \bar{\omega}_3(x) \quad \text{for } N_2 - \varepsilon \leq x < N_2.$$

$$4^0. \quad \bar{\omega}_1(x) = C^2 x^{2\sigma}, \quad 0 < 2\sigma < 1, \quad \text{は, } 0 < x \leq \left(\frac{\sigma(1-2\sigma)C}{2(\sigma-\lambda)} \right)^{\frac{1}{2-\sigma}}$$

において, $\bar{\omega}_1''(x) < f(x, \bar{\omega}_1(x), \bar{\omega}_1'(x))$ を満足することになる。

すぐ確かめられる。 $N_1 = \left(\frac{\sigma(1-2\sigma)C}{2(\sigma-\lambda)} \right)^{\frac{1}{2-\sigma}}$ とおき, C を

$$\bar{\omega}_1(N_1) = \bar{\omega}_2(N_1), \quad \text{すなわち } \bar{\omega}_1(N_1) = 1 - \frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{1-\lambda}{-\lambda} \right)^{\lambda} A \quad \text{と}$$

するよう定めれば, N_1 および C^2 の値は最初にあてた

値となる。連続性によって $\bar{\omega}_1''(x) < f(x, \bar{\omega}_1(x), \bar{\omega}_1'(x))$ は

$0 < x \leq N_1 + \varepsilon$ において成り立つことになる。

5° $\bar{\Omega}(x, y) = F \frac{y}{x}$ とおけば

$$\begin{aligned} f(x, y, \bar{\Omega}(x, y)) - \bar{\Omega}_x(x, y) - \bar{\Omega}_y(x, y) \bar{\Omega}(x, y) &= \\ &= -\frac{1}{\sqrt{y}} (2Fy + 4\lambda(1-y)) - (F^2 - F) \frac{y}{x^2} \end{aligned}$$

となる。 $F > 1$ ならば、右辺の y に関する偏導関数は負である。 従って $f(x, y, \bar{\Omega}) - \bar{\Omega}_x - \bar{\Omega}_y \bar{\Omega}$ は、各 x の値に対して、 y の単調減少関数となる。 $F > \frac{4}{3}$ にとれば、 §3 の存在定理に仮定された $\bar{\Omega}(x, y)$ に関する すべての条件は満足される。

$\bar{\Omega}(x, y) = 0$ であるから、これに対しては §3 のなかで示された条件が満足されることは 簡単に確かめられる。

§6 境界層の方程式 (Exponential Type)

方程式は、前 § にあけると同様に、

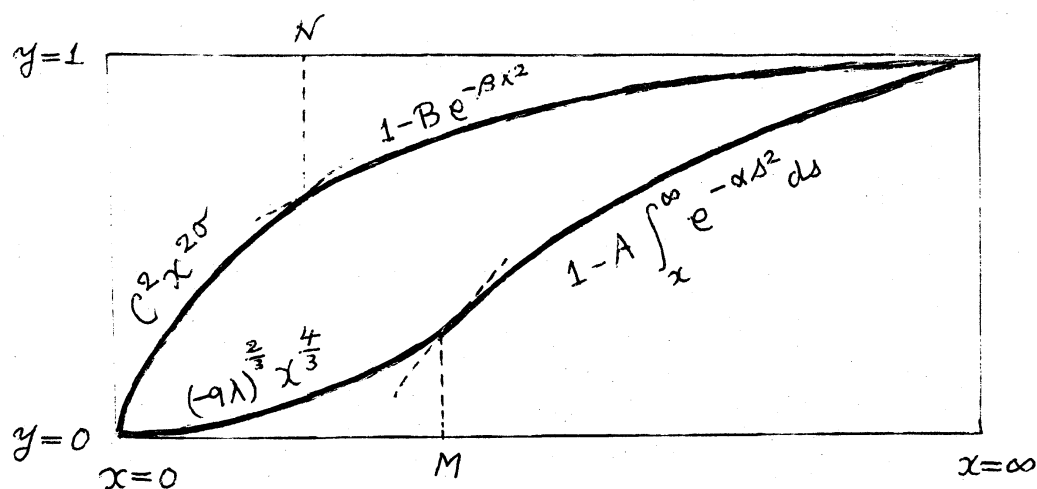
$$y'' = -\frac{1}{\sqrt{y}} (2xy' + 4\lambda(1-y)) \equiv f(x, y, y')$$

$$y(0) = 0, \quad y(\infty) = 1$$

$$0 < y(x) < 1 \quad \text{for } 0 < x < \infty$$

の形をもつ。

$-0.059 \leq \lambda < 0$ と仮定する。 このとき $\underline{\omega}(x), \bar{\omega}(x)$, $0 < x < \infty$, を図示すれば図のようになる。



$$\begin{aligned} \underline{\omega}_1(x) &= (-q\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} & \text{for } 0 < x \leq M + \varepsilon \\ \underline{\omega}_2(x) &= 1 - A \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds, & \text{for } M - \varepsilon \leq x < \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1(x) &= C^2 x^{2\sigma} & \text{for } 0 < x \leq N + \varepsilon, \\ \bar{\omega}_2(x) &= 1 - B e^{-\beta x^2} & \text{for } N - \varepsilon \leq x < \infty \end{aligned}$$

$$\bar{\Omega}(x, y) = F \frac{y}{x}$$

$$\underline{\Omega}(x, y) = 0.$$

ここで σ は $0 < 2\sigma < 1$ なる任意の数

$$\alpha = \frac{1}{3},$$

$$\beta > \frac{2(\sigma - \lambda)(1 - \sigma)^{\frac{1}{2}}}{\sigma(1 - 2\sigma)}$$

M は λ の超越方程式の正根:

$$g(x) = x^{\frac{4}{3}} - (-q\lambda)^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x^2}{3}} \int_x^\infty e^{-\frac{s^2}{3}} ds = 0.$$

A は次式で与えられる:

$$A = \frac{4}{3} (-q\lambda)^{\frac{2}{3}} M^{\frac{1}{3}} e^{\frac{M^2}{3}} = \left(1 - (-q\lambda)^{\frac{2}{3}} M^{\frac{4}{3}}\right) \left(\int_M^\infty e^{-\frac{1}{3}s^2} ds\right)^{-1}.$$

また

$$N = \left(\frac{1-\sigma}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C^2 = \left(\frac{\beta}{1-\sigma}\right)^\sigma (1-\sigma)$$

$$B = \sigma e^{1-\sigma},$$

F は 次の四つの不等式を同時にみたす数:

$$F > \frac{4}{3}; \quad F > A \sqrt{3} e^{-1} (-q\lambda)^{-\frac{2}{3}} M^{-\frac{4}{3}};$$

$$F > -2\lambda ((-q\lambda)^{-\frac{2}{3}} M^{-\frac{4}{3}} - 1); \quad F > \frac{2\sigma}{1-\sigma} e^{-\sigma}.$$

λ が $-0.05q \leq \lambda < 0$ を満足するならば, §3 の存在定理のなかで仮定された すべての条件は満足される”

λ に関する表記の制限が どのようにして与えられたかを説明する. そうすれば $\alpha = \frac{1}{3}$ となる理由も明らかになる.

1° 二つの曲線 $y = \omega_1(x)$, $y = \omega_2(x)$ が接するところに A を定める. 接するための条件は, 接点の x 座標 M が方程式

$$g(x) \equiv x^{\frac{4}{3}} - (-q\lambda)^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} e^{\alpha x^2} \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds = 0$$

の根となることである。しかるに

$$g'(x) = \left(\frac{8\alpha}{3} x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{9} x^{-\frac{2}{3}} \right) e^{\alpha x^2} \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds > 0$$

であるから、 $g(x)=0$ は たた一つの正根 M を持つ。

$g((-q\lambda)^{-\frac{1}{2}}) > 0$, $g(0) < 0$ であるから、

$$M < (-q\lambda)^{-\frac{1}{2}}.$$

正根を計算することはつかしいから、 M の下端を求める

ことにする。不等式

$$(x) \quad e^{\alpha x^2} \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

を利用すれば、 M は

$$h(x) \equiv x^{\frac{4}{3}} - (-q\lambda)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} x^{\frac{1}{3}} = 0$$

のたた一つの正根よりも 大きい ことがわかる。

M が決まれば、 A は自動的に定まる。

2° $\omega_1(x) = (-q\lambda)^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}}$ は、 $0 < x < (-q\lambda)^{-\frac{1}{2}}$ において、

したがって $0 < x \leq M + \varepsilon$ において

$$\omega_1''(x) > f(x, \omega_1(x), \omega_1'(x))$$

を満足することは 容易に確かめられる。

3° λ が $-0.059 \leq \lambda < 0$ をみたすならば、 $\alpha = \frac{1}{3}$ に

よめば $\underline{\omega}_2(x) = 1 - A \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds$ は, $M - \varepsilon \leq x < \infty$ において $\underline{\omega}_2''(x) > f(x, \underline{\omega}_2(x), \underline{\omega}_2'(x))$ をみたすことも証明する。

このために $\underline{\omega}_2(x)$ が $\underline{\omega}_2'' > f(x, \underline{\omega}_2, \underline{\omega}_2')$ を満足するための条件を求める。この不等式が成立するのは, x が

$$-2\lambda e^{\alpha x^2} \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds < x \left\{ 1 - \alpha \left(1 - A \int_x^\infty e^{-\alpha s^2} ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

を満足するときに限ることが、直接計算によってわかる。後者の不等式は 十分大きい x に対して成立することは, $\alpha < 1$ なる限り自明である, その範囲を正確に求めることはできないように思われる。そこで 前頁の不等式(*)を用いれば、すぐわかるように、不等式

$$-\lambda \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \leq x(1-\alpha)$$

を満足する x は上記の不等式をみたす。この範囲をできるだけ広くするために, $0 < \alpha < 1$ なる α を動かしてみれば

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{ のとき, 上記の区間は } -\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\lambda \leq x < \infty$$

となって、これが最大区間である。このとき

$$-\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\lambda \leq M$$

となる必要がある。(あるいは十分であると言うほうが適

加かもしれない). この不等式は $h(x)$ が $x = -\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\lambda$ のとき負の値をとれば確かに満たされる. かくして λ の範囲は $-0.059 \leq \lambda < 0$, の制限を受ける. これは大雑把な λ の範囲であるが, $g(x)$ が $x = -\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\lambda$ のとき負の値をとるという条件を求めるのは容易でないように思われる. 連続性により

$$\underline{\omega}_2(x) = 1 - A \int_x^\infty e^{-\frac{1}{3}s^2} ds \quad \text{は, } M - \varepsilon \leq x < \infty \quad \text{において}$$

$$\underline{\omega}_2'' > f(x, \underline{\omega}_2, \underline{\omega}_2')$$

を満足する.

4° C, B は二つの曲線 $y = C^2 x^{2\sigma}$, $y = 1 - B e^{-\beta x^2}$ が接する σ に定める. その条件は, $C > 0, B > 0, \alpha > 0$ に対し,

$$2\sigma C^2 x^{2\sigma-1} = 2\beta B x e^{-\beta x^2}, \quad C^2 x^{2\sigma} = 1 - B e^{-\beta x^2}$$

が共通根 N を持つことである. これから $B e^{-\beta x^2}$ を消去すれば,

$$h(x) \equiv \beta C^2 x^2 - \beta x^{2-2\sigma} + \sigma C^2 = 0$$

が二根を持つことになる. これが等根を持つ σ に C を定める. そうすれば, 等根 N , パラメーター C, B の値は定理のなかに述べられたものになることがわかる. このとき

$$\bar{\omega}_1(N) = \bar{\omega}_2(N), \quad \bar{\omega}_1'(N) = \bar{\omega}_2'(N), \quad \bar{\omega}_1''(N) = \bar{\omega}_2''(N), \quad \bar{\omega}_1'''(N) > \bar{\omega}_2'''(N)$$

となる. 2位の接触をしているが, 最後の不等式は

$$\bar{\omega}_1(x) < \bar{\omega}_2(x), \quad N - \varepsilon \leq x < N; \quad \bar{\omega}_1(x) > \bar{\omega}_2(x), \quad N < x \leq N + \varepsilon$$

となっていることを示す.

5° $\bar{\omega}_1(x) = C^2 x^{2\sigma}$ は, $0 < x \leq \left\{ \frac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)} C \right\}^{\frac{1}{2-\sigma}}$ において, 不等式 $\bar{\omega}_1''(x) < f(x, \bar{\omega}_1(x), \bar{\omega}_1'(x))$ を満足することゝが直接代入して確かめられる。 C^2 の値はすでに定まっているから, それを代入することにより, もし

$$\beta \geq \frac{2(\sigma-\lambda)(1-\sigma)^{\frac{1}{2}}}{\sigma(1-2\sigma)} \quad \text{ならば,} \quad \left(\frac{\sigma(1-2\sigma)}{2(\sigma-\lambda)} C \right)^{\frac{1}{2-\sigma}} \geq N = \left(\frac{1-\sigma}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}}$$

が成立つことがわかる。そこで $\bar{\omega}_1(x)$ は, $0 < x \leq N + \varepsilon$ において $\bar{\omega}_1'' < f(x, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1')$ を満足する。

6° $\bar{\omega}_2(x) = 1 - B e^{-\beta x^2}$ with $B = \sigma e^{1-\sigma}$ は, x が不等式

$$(*) \quad \beta - 2\beta^2 x^2 < \frac{-2\beta x^2 - 2\lambda}{\sqrt{1 - B e^{-\beta x^2}}} \quad \text{or} \quad (**) \quad \frac{1}{2\beta} \frac{\beta \sqrt{1 - B e^{-\beta x^2}} + 2\lambda}{\beta \sqrt{1 - B e^{-\beta x^2}} - 1} < x^2$$

を満足する範囲において, 不等式 $\bar{\omega}_2'' < f(x, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2')$ をみたすことが, 簡単な計算によってわかる。

不等式(*)の右辺は, x の単調増加関数である。左辺の関数は, 少し計算すればわかるように, $0 < -2\lambda \leq 1$ ならば x の単調減少関数, $-2\lambda > 1$ ならば x の単調増加関数となる。そこで $0 < -2\lambda \leq 1$ のときは, $x = N$ において不等式(*)が満足されていれば, $N \leq x < \infty$, したがって連続性によって $N - \varepsilon \leq x < \infty$ において(*)は満足されることになる。じつは $\beta > 2(1-\sigma+\lambda)(1-\sigma)^{-\frac{1}{2}}(1-2\sigma)^{-1}$ ならば

不等式(*) は $x=N$ において成立つ。 λ に関する両側の仮定から, $0 < -2\lambda \leq 1$ の場合だけ考えればよいが, ついでに $-2\lambda > 1$ の場合を説明しておく。 B の決め方から

$$1-B = 1 - \sigma e^{1-\sigma} > 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{e}} = 1 - 0.82436 > 0 \quad \text{for } 0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$$

であるから, (*) の左辺の関数は $0 \leq x < \infty$ において $\frac{1}{2B}$ より小さい値をとらない。右辺は, $N \leq x < \infty$ において $\frac{1-\sigma}{\beta}$ より小さい値をとらない。よって $1 < 2(1-\sigma)$ ならば (*) は $N \leq x < \infty$ において成立つ。しかるに $1 > 2\sigma$ であるから たしかに $1 < 2(1-\sigma)$ 。したがって $-2\lambda > 1$ のときは, β に関する制限なしに不等式(*) は $N-\varepsilon \leq x < \infty$ において満足される。

$$\begin{aligned} 70 \quad & f(x, y, \bar{\Omega}(x, y)) - \bar{\Omega}_x(x, y) - \bar{\Omega}_y(x, y) \bar{\Omega}(x, y) \\ &= -2F y^{\frac{1}{2}} - 4\lambda(1-y) y^{-\frac{1}{2}} - (F^2 - F) y x^{-2} \\ &\equiv \mathcal{F}(x, y) \quad \text{と書く。} \end{aligned}$$

$F > 1$ ならば $\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F}(x, y) < 0$ であるから, $\mathcal{F}(x, y)$ は各 x に対して y の単調減少関数となる。したがって

$\mathcal{F}(x, \underline{\omega}(x)) < 0$ for $0 < x < \infty$ であることも言えればよい。この不等式は F を十分大きくとれば満足されることはすぐわかる。初等的な計算により 定理のなかに入っている 4個の不等式が同時に満足されるように F をとればよいのである。

あとがき

いくつかの問題点を指摘しておこう。

§4 において, $\nu > 1$ のとき $\alpha > 1$ となつてしまふようであるが, α に関する制限からわかるように, $B \gg 1$ であるから α は十分小さくなる. これは M の値を $B \gg 1$ のとき摂動法によつて求めたからである. M をきめぬ方程式 (431) の根を できるだけ正確に計算する方法はないか? $B \gg 1$ の仮定なしに §4 の計算をうまく行う方法はないか? そうすれば α に関する制限はもっとゆるくなる.

§5 において, A の値のとり方を変えることによつて, λ の有効な範囲を もっと広くすることはできないか?

$x \rightarrow \infty$ のとき $y-1$ が x のべきの order で小さくなると仮定すれば $y \sim \omega_2(x)$ ($\sim$ は order が同じことを意味する) でなければならぬが, $\omega_2(x)$ のとり方を変えて, せめて 物理実験の結果を保証するだけの λ の有効範囲を与えることは できないか? 例えは $0 < -2\lambda \leq 1$ なる λ の値に対して 有効な関数 $\omega_2(x)$ をみつけることはできないか?

§6 において, $g(x) = 0$ の根 M を $0 < \alpha < 1$ なる α の関数として 求めることはできないか? もし これがうまくできれば, λ のとりうる範囲が もっと広くなつて

物理実験の結果が保証されるようなことになるかもしれない。
 $\overline{\omega}_2(x)$, $\overline{\omega}_1(x)$ を別の関数でおきかえて、 λ の有効な範囲を
 もっと広げることはいかないか?

すなわち で説明したように 解が存在すれば $\alpha \rightarrow 0$ の
 とき $y(x)/x$ は有限な値をとる。したがって $\overline{\omega}_1(x)$ とし
 て, $\overline{\omega}_1(x)/x$ が $\alpha \rightarrow 0$ のとき 有限な値になるものはい
 ないか?

Wasano さんの来日を記念して

1974年 盛夏