

長波長表面波列の線形安定性

神戸大学大学院・工学研究科・機械工学専攻 片岡 武 (Takeshi Kataoka)

Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Engineering

Kobe University

要旨

水面波列の長波長極限（振幅は有限）における線形安定性を，オイラー方程式を基に調べた．小振幅極限における線形安定性は既に多くの研究[1-4]が成され，共鳴不安定性の存在することが知られている[1,5,6]．本研究ではこの共鳴不安定性が長波長極限においても現れることを示す．波数のずれが基本波の整数倍である 2 攪乱の振動数が一致するという共鳴条件より，まずは共鳴曲線を具体的に求めた．次いでこの共鳴条件を満たす攪乱が時間とともに増幅する事実を，長波長極限の漸近理論を用いた安定性解析により証明する．

1. 緒言

水面波列の線形安定性を Euler 方程式系を基に調べる．ただし表面張力は無視する．本研究では長波長極限における共鳴条件と不安定性について論じる．2 種類の共鳴が存在する．1 つは通常の線形攪乱同士の共鳴を表す（タイプ I）．これは小振幅極限において現れるタイプのものと類似である．もう 1 つは新しいタイプで，基本波の峰が歪められることにより発生する振動と通常の線形攪乱との共鳴を表す（タイプ II）．2 節で基礎方程式，3 節で共鳴条件，4 節でタイプ II 共鳴のもとでの安定性解析，5 節で理論解析のまとめ，6 節で数値的検証，7 節で結言を述べる．

2. 基礎方程式

一様な重力加速度が働く系において，平らな底の上に横たわる水の運動を考える．ただし水は非圧縮性完全流体として扱い，表面張力は無視し，流れは渦なしとする．これ以降，変数はすべて重力加速度と，後に示す代表長さ（(2.7)の後を見よ）により無次元化してある．底が $z=0$ と一致するような空間直交座標 x, y, z を導入すると（図 1 参

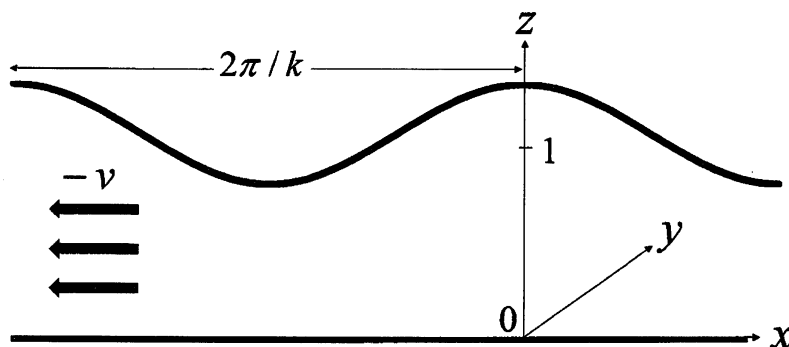


図 1 概略図．

照), 支配方程式系は,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{for } 0 < z < \eta, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{at } z = \eta, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \eta = f \quad \text{at } z = \eta, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (2.4)$$

ただし, t は時間, $\phi(x, y, z, t)$ は速度ポテンシャル, $\eta(x, y, t)$ は底からの自由表面の高さ, f は水表面における全ヘッドを表す.

(2.1)-(2.4)を満たす解として, まずは水面波列解を求めよう. y, t に依らず, x に関して周期的な次の形の解 (Φ, H) を探す:

$$\phi = -vx + \Phi(x, z), \quad \eta = H(x). \quad (2.5a, b)$$

周期条件は,

$$\Phi(-\pi/k, z) = \Phi(\pi/k, z), \quad H(-\pi/k) = H(\pi/k). \quad (2.6)$$

ただし v と k は正のパラメータであり, それぞれ水面波列の波速および波数を表す (図 1 参照). f は

$$f = 1 + v^2/2, \quad (2.7)$$

により与える. 然らば, (2.5) は無次元波長が $2\pi/k$, 水表面における全ヘッドが $1 + v^2/2$ であるような波が, x 方向流速 $-v$ の一様流れに逆らって定常的に伝播する様子を表わす. 水表面の無次元全ヘッドを $1 + v^2/2$ としたので, 本問題の代表長さは, 水表面における全ヘッドから一様流速の運動エネルギー分を差し引いたものとなる. (2.5) を (2.1)-(2.4) に代入すると,

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi = 0 \quad \text{for } 0 < z < H, \quad (2.8)$$

$$\left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{dH}{dx} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{at } z = H, \quad (2.9)$$

$$-v \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + H = 1 \quad \text{at } z = H, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (2.11)$$

が得られる. ただし,

$$\nabla_{\perp}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (2.12)$$

であり, (2.8)-(2.11) と (2.6) が (Φ, H) に対する方程式系を構成する. この方程式系を満たす水面波列解の存在 [7, 8] およびその一意性 [9] は既に厳密に証明されている. 水面波列解は 2 つの独立なパラメータにより特徴づけられるが, 本研究では視覚的に分かり易い観点から,

$$a = \max(H) - \min(H), \quad (2.13)$$

により定義される波高 a と波数 k を採用する. 然らば波速 v は a と k の従属関数として $v = v(a, k)$ により与えられる. なお, $k = 0$ の極限において, 上記水面波列解は孤立波解 (Φ_0, H_0) (波速は $v_0 \equiv v(a, 0)$) に一致する.

これ以降は, (2.8)-(2.12), (2.6) を満たす水面波列解のうち, k の小さい長波長の解を対象とする. そのような解を $k \rightarrow 0$ の漸近解として求めよう. 通常の漸近解析により $x = \pm\pi/k$ における周期条件(2.6)を満たす解を求めるよりも, 以下の手法を用いると便利である. つまり, 新しいパラメータ U を導入し, 周期条件(2.6)の代わりに十分遠方 $x \rightarrow \pm\infty$ における境界条件:

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \rightarrow U, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \rightarrow 0, \quad H^* \rightarrow 1 + v^* U - \frac{U^2}{2} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty, \quad (2.14)$$

を満たす解 (Φ^*, H^*) を考え, この解が $x = \pm\pi/k$ において周期的となるような U の値を探るのである. (Φ^*, H^*) の特徴は補遺に整理してある. (A13a) より,

$$\Phi^*(x, z) - \Phi^*(-x, z) \rightarrow 2Ux + C^*, \quad H^*(x) - H^*(-x) \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

を満たすので, $2\pi U/k = -C^*$ であるような U を選べば, (Φ^*, H^*) は周期条件(2.6)を満たす. そのような U は

$$U = U_0 \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^n \left[\frac{\partial^{n-1} (-C^*)^n}{\partial U^{n-1}} \right]_{U=0}, \quad (2.16)$$

により与えられる. したがって求める解 (Φ, H) は, $U = U_0$ における (Φ^*, H^*) であり, 次の k の冪級数形で表わされる:

$$\Phi = \Phi_0 + k\Phi_1 + k^2\Phi_2 + \dots, \quad H = H_0 + kH_1 + k^2H_2 + \dots, \quad (2.17a, b)$$

$$v = v_0 + kv_1 + k^2v_2 + \dots. \quad (2.17c)$$

ここに (Φ_0, H_0) は波速 $v_0 \equiv v(a, 0)$ の孤立波解であり,

$$(\Phi_n, H_n) = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial U^{n-1}} \left((-C^*)^n \frac{\partial(\Phi^*, H^*)}{\partial U} \right) \right]_{U=0}, \quad v_n = \frac{1}{(2\pi)^n n!} \left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial U^{n-1}} \left((-C^*)^n \frac{\partial v^*}{\partial U} \right) \right]_{U=0}, \quad (2.18)$$

により与えられる. (2.18) は孤立波解 (Φ_0, H_0) のみを用いて表すことができる. 例えば $n=1$ のとき,

$$\Phi_1 = -\frac{C}{2\pi} \left[x + v_0 \left(\frac{3}{2} \Phi_0 - x \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - z \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right) \right], \quad H_1 = -\frac{C}{2\pi} v_0 \left(H_0 - x \frac{dH_0}{dx} \right),$$

$$v_1 = -\frac{C}{2\pi} \left(\frac{v_0^2}{2} + 1 \right). \quad (2.19)$$

ここに, C は(A7a)により定義される量である.

次に長波長水面波列解(2.17)の線形安定性を(2.1)-(2.4)を基に調べよう. (2.1)-(2.4)の解を以下の形に置く.

$$\phi = -vx + \Phi + \hat{\phi}(x, z) \exp[i(\omega t - K_x x - K_y y)], \quad (2.20a)$$

$$\eta = H + \hat{\eta}(x) \exp[i(\omega t - K_x x - K_y y)]. \quad (2.20b)$$

ただし K_x, K_y は攪乱の波数を表す与えられた実定数, ω と $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ はそれぞれ未知定数および未知関数である. (2.20) を(2.1)-(2.4)に代入し, $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ に関して線形化し, $x = \pm\pi/k$

において周期条件を課すと, $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ に対する次の線形方程式系が得られる.

$$\nabla_{\perp}^2 \hat{\phi} = \left(2iK_x \frac{\partial}{\partial x} + K_x^2 + K_y^2 \right) \hat{\phi} \quad \text{for } 0 < z < H, \quad (2.21)$$

$$L_K[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = iK_x \left[\left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \hat{\eta} + \frac{dH}{dx} \hat{\phi} \right] - i\omega \hat{\eta} \quad \text{at } z = H, \quad (2.22)$$

$$L_D[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = iK_x \left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \hat{\phi} - i\omega \hat{\phi} \quad \text{at } z = H, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (2.24)$$

$$\hat{\phi}(-\pi/k, z) = \hat{\phi}(\pi/k, z), \quad \hat{\eta}(-\pi/k) = \hat{\eta}(\pi/k). \quad (2.25)$$

ただし L_K と L_D は以下に定義される線形演算子である.

$$L_K[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{dH}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi} + \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \frac{dH}{dx} + \left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{d}{dx} \right] \hat{\eta}, \quad (2.26a)$$

$$L_D[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left[\left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\phi} + \left[\left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 1 \right] \hat{\eta}. \quad (2.26b)$$

上の方程式系(2.21)-(2.25)は, 固有値 ω , 固有関数 $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ の固有値問題を構成する. この固有値問題が負の虚部をもつ固有値 ω を解としてもつとき, 水面波列は不安定である.

3. 共鳴条件

水面波列解(2.17)は, $k=0$ のとき孤立波解 (Φ_0, H_0) (波速は v_0) となる. これに対する線形攪乱解は, 長波という条件のもとで次の2種類に分けられる. 1つは未定定数 β を用いて,

$$\hat{\phi} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \beta, \quad \hat{\eta} = \frac{dH_0}{dx}, \quad \omega = \omega_L(K_x, K_y) \equiv -vK_x \pm \sqrt{K_x^2 + K_y^2}, \quad (3.1a-c)$$

により与えられる解であり, 波数ベクトル (K_x, K_y) , 角振動数 ω_L の通常の線形長波を表す. ここで $(\partial \Phi_0 / \partial x, dH_0 / dx)$ は, 線形長波との相互作用により生じる孤立波の位相のずれを表す. もう1つは, (A7d)により定義される孤立波のエネルギー $E(v_0)$ を用いて,

$$\hat{\phi} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \quad \hat{\eta} = \frac{dH_0}{dx}, \quad \omega = \omega_s(K_y) \equiv \pm \sqrt{\frac{v_0 E K_y^2}{dE/dv_0}}, \quad (3.2a-c)$$

により与えられる解である[10]. これは, 峰に沿って波数 K_y で歪められた孤立波に伴う角振動数 $\omega_s(K_y)$ の振動に対する攪乱を表す. いずれの攪乱解(3.1), (3.2)も波数 K_x , K_y (あるいは K_y のみ) をパラメータとして含む.

$k=0$ の孤立波に対する上記攪乱解(3.1), (3.2)から, $k>0$ の水面波列に対する攪乱解を近似的に構築しよう. (3.1), (3.2)において $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ の $x \rightarrow -\infty$ および $x \rightarrow \infty$ における値が指数関数的に急速に同一値へ近づくので $(\partial \Phi_0 / \partial x, H_0)$ は $x \rightarrow \pm\infty$ で指数関数的に0に近づく; (A6)とそれに続く記述を見よ), $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ の $-\pi/k < x < \pi/k$ の部分を取り出して次々とつなぎ合わせることで, そのような攪乱解を作ることができる. このようにして得ら

れた複数の峰をもつ水面波列に対する攪乱は、共鳴によって攪乱が成長すること、つまり不安定性の生じることが期待される。そのような共鳴条件は、波数ベクトル (K_x, K_y) の差違が水面波列のその整数倍 $(mk, 0)$ (m は整数)となる2攪乱の角振動数 ω が一致することである。近似的に $k=0$ における ω の表式(3.1c), (3.2c)を用いれば、共鳴条件は以下の2種類に表される。

<共鳴条件 I>

$$\omega_L(K_x, K_y) = \omega_L(K_x - mk, K_y). \quad (3.3)$$

これは通常の線形長波同士の共鳴を表す。 $m > 0$ のとき、 $\omega_L(K_x, K_y)$ と $\omega_L(K_x - mk, K_y)$ の複号をそれぞれ正、負にとれば (ただし $m < 0$ のときは負、正にとる),

$$\left(K_x - \frac{mk}{2}\right)^2 + \frac{v_0^2}{v_0^2 - 1} K_y^2 = \frac{m^2 k^2 v_0^2}{4}, \quad (3.4)$$

を満たす解 (K_x, K_y) が存在する。このとき ω_L は、

$$\omega_L = \frac{v_0^2 - 1}{v_0} \left(\frac{mk}{2} - K_x \right). \quad (3.5)$$

<共鳴条件 II>

$$\omega_S(K_y) = \omega_L(K_x, K_y). \quad (3.6)$$

これは峰方向に歪められた孤立波の振動と通常の線形長波との共鳴を表す。(3.6)は、

$$K_x = \pm \frac{v_0 + b}{\sqrt{(v_0^2 - 1)(b^2 - 1)}} K_y, \quad (3.7)$$

を満たす解 (K_x, K_y) が存在する。ただし b は、(A7d)で定義される孤立波のエネルギー E を用いて、

$$b = \begin{cases} -\sqrt{1 + \frac{v_0^2 - 1}{v_0 E} \frac{dE}{dv_0}} & (\omega_S(K_y) \text{と} \omega_L(K_x, K_y) \text{の複号が同一のとき}), \\ \sqrt{1 + \frac{v_0^2 - 1}{v_0 E} \frac{dE}{dv_0}} & (\omega_S(K_y) \text{と} \omega_L(K_x, K_y) \text{の複号が異なるとき}), \end{cases} \quad (3.8)$$

により与えられ、このとき $\omega_S = \omega_L$ は、

$$\omega_S = \omega_L = \frac{1 - v_0^2}{v_0 + b} K_x. \quad (3.9)$$

共鳴条件Iより得られる(3.4)は、波数平面 $K_x - K_y$ 上において、中心が $(K_x, K_y) = (mk/2, 0)$ に位置し、 K_x 方向長さ mkv_0 の長軸と K_y 方向長さ $mk\sqrt{v_0^2 - 1}$ の短軸をもつ楕円である。図2に水面波列の振幅が $a = 0.1, 0.4, 0.7$ に対する共鳴曲線($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$)を実線および点線で示した。各楕円の $|K_x|$ の大きい半円部分と小さい半円部分をそれぞれ実線および点線で示した。これは、 $m > 0$ に対する共鳴曲線と $m < 0$ に対する共鳴曲線が物理的には同一であることから、物理的に重なる部分の二重表記を避け、かつ図が対称性を保つように必要部分のみを実線で示したものである。

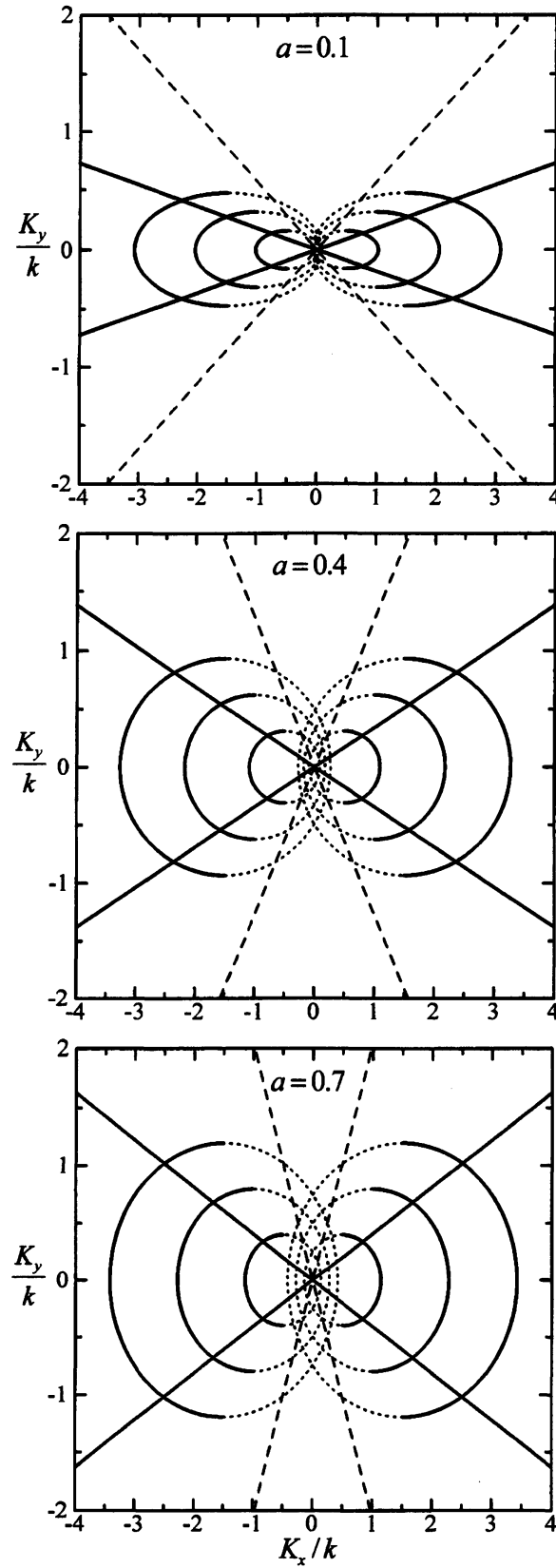


図2 $a=0.1, 0.4, 0.7$ の水面波列に対する長波長極限 $k \rightarrow 0$ における共鳴曲線。楕円は(3.4)の $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ (実線部: $|K_x| > mk/2$, 点線部: $|K_x| < mk/2$)を, 直線は(3.7)(実線: $b > 0$, 破線: $b < 0$)を表す。

共鳴条件 II より得られる(3.7)は、波数平面 $K_x - K_y$ 上において4本の直線となる。このうちの2本が $b > 0$ 、残りの2本が $b < 0$ に対する共鳴直線であり、それぞれ実線および破線で示した。4節の理論解析で示すように、前者 $b > 0$ の共鳴直線上においてのみ不安定性が現れ、後者 $b < 0$ の共鳴直線上からは不安定性は生じない。

以下では共鳴条件IIを満たす場合をとりあげ、漸近理論による安定性解析を4節に示す。共鳴条件Iを満たす場合についての解析は紙面の都合上省略するが、5節で結果を述べる。

4. 漸近解析<共鳴条件 II (3.6) を満たす場合>

(2.21)-(2.25)の $k \rightarrow 0$ の漸近解を、攪乱の波数 (K_x, K_y) が水面波列のそれ k と同程度 ($K_x = O(k)$, $K_y = O(k)$) であり、かつ共鳴条件(3.6)(つまりは(3.7))を $O(k^{3/2})$ 内のいずれで満たす場合

$$K_x = kp_1 + k^{3/2}p_{3/2}, \quad K_y = kq_1 + k^{3/2}q_{3/2}, \quad (4.1)$$

について求める。ただし p_1 と q_1 は

$$p_1 = \pm \frac{v_0 + b}{\sqrt{(v_0^2 - 1)(b^2 - 1)}} q_1, \quad (4.2)$$

を満たす $O(1)$ の定数(b は(3.9)で定義される)であり、 $p_{3/2}$ と $q_{3/2}$ は $O(1)$ の与えられた定数である。

4.1. 近接場の解

(2.21)-(2.24)の解のうち、まずは x, z に関して単位量の範囲で有意の変化 [$\partial \hat{\phi} / \partial x = O(\hat{\phi})$, $\partial \hat{\phi} / \partial z = O(\hat{\phi})$, $d\hat{\eta}/dx = O(\hat{\eta})$] をするものを次の $k^{1/2}$ の冪級数の形で求める：

$$\hat{\phi}_C = \hat{\phi}_{C0} + k^{1/2}\hat{\phi}_{C1/2} + k\hat{\phi}_{C1} + \dots, \quad \hat{\eta}_C = \hat{\eta}_{C0} + k^{1/2}\hat{\eta}_{C1/2} + k\hat{\eta}_{C1} + \dots, \quad (4.3a, b)$$

$$\omega = k\omega_1 + k^{3/2}\omega_{3/2} + k^2\omega_2 + \dots. \quad (4.3c)$$

ただし0次と1/2次の解および ω_1 は、未定定数 β を用いて次のように表わされる。

$$(\hat{\phi}_{C0}, \hat{\eta}_{C0}) = \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \frac{dH_0}{dx} \right), \quad (\hat{\phi}_{C1/2}, \hat{\eta}_{C1/2}) = (\beta, 0), \quad \omega_1 = \frac{1 - v_0^2}{v_0 + b} p_1. \quad (4.4a-c)$$

添え字 C は近接場の解(core solution)であることを示す。(4.3), (4.4)の展開の妥当性は、以下の解析が矛盾なく進むことにより確かめられる。(2.17), (4.1)-(4.4)を(2.21)-(2.24)に代入して $k^{1/2}$ について整理すると、 $(\hat{\phi}_{Cn}, \hat{\eta}_{Cn})$ に対する次の方程式系が得られる：

$$\nabla_{\perp}^2 \hat{\phi}_{Cn} = F_n \quad \text{for } 0 < z < H_0, \quad (4.5)$$

$$L_{K0}[\hat{\phi}_{Cn}, \hat{\eta}_{Cn}] = G_n \quad \text{at } z = H_0, \quad (4.6)$$

$$L_{D0}[\hat{\phi}_{Cn}, \hat{\eta}_{Cn}] = I_n \quad \text{at } z = H_0, \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{Cn}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (4.8)$$

$$(n = 1, 3/2, 2, \dots)$$

ここに、

$$F_n = \begin{cases} 2ip_1 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} & (n=1), & 2ip_{3/2} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2} & (n=3/2), \\ 2ip_1 \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} + (p_1^2 + q_1^2) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} & (n=2), \\ 2i \left(p_1 \frac{\partial \hat{\phi}_{C3/2}}{\partial x} + p_{3/2} \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \right) + (p_1^2 + q_1^2) \beta + 2(p_1 p_{3/2} + q_1 q_{3/2}) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} & (n=5/2), \dots, \end{cases} \quad (4.9a)$$

$$G_n = \begin{cases} -L_{K1} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \frac{dH_0}{dx} \right] + ip_1 \left(-v_0 + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \frac{dH_0}{dx} - i\omega_1 \frac{dH_0}{dx} & (n=1), \\ ip_1 \frac{dH_0}{dx} \beta + ip_{3/2} \left(-v_0 + 2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \frac{dH_0}{dx} - i\omega_{3/2} \frac{dH_0}{dx} & (n=3/2), \\ -L_{K1} [\hat{\phi}_{C1}, \hat{\eta}_{C1}] - L_{K2} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \frac{dH_0}{dx} \right] \\ + ip_1 \left[\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \hat{\eta}_{C1} + \left(\hat{\phi}_{C1} - v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) \frac{dH_0}{dx} + \frac{dH_1}{dx} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right] \\ + ip_{3/2} \frac{dH_0}{dx} \beta - i\omega_1 \hat{\eta}_{C1} - i\omega_2 \frac{dH_0}{dx} & (n=2), \\ -L_{K1} [\hat{\phi}_{C3/2}, \hat{\eta}_{C3/2}] + ip_1 \left\{ \left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \hat{\eta}_{C3/2} + \frac{dH_0}{dx} \hat{\phi}_{C3/2} + \frac{dH_1}{dx} \beta \right\} \\ + ip_{3/2} \left\{ \left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \hat{\eta}_{C1} + \left(\hat{\phi}_{C1} - v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) \frac{dH_0}{dx} + \frac{dH_1}{dx} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right\} \\ - i\omega_1 \hat{\eta}_{C3/2} - i\omega_{3/2} \hat{\eta}_{C1} - i\omega_{5/2} \frac{dH_0}{dx} & (n=5/2), \dots, \end{cases} \quad (4.9b)$$

$$I_n = \begin{cases} -L_{D1} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \frac{dH_0}{dx} \right] + ip_1 \left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - i\omega_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} & (n=1), \\ ip_1 \left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \beta + ip_{3/2} \left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - i\omega_1 \beta - i\omega_{3/2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} & (n=3/2), \\ -L_{D1} [\hat{\phi}_{C1}, \hat{\eta}_{C1}] - L_{D2} \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \frac{dH_0}{dx} \right] \\ + ip_1 \left[\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \left(\hat{\phi}_{C1} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) + \left(-v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right] \\ + ip_{3/2} \left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \beta - i\omega_1 \left(\hat{\phi}_{C1} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) - i\omega_{3/2} \beta - i\omega_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} & (n=2), \\ -L_{D1} [\hat{\phi}_{C3/2}, \hat{\eta}_{C3/2}] + ip_1 \left[\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \hat{\phi}_{C3/2} + \left(-v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) \beta \right] \\ + ip_{3/2} \left[\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \left(\hat{\phi}_{C1} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) + \left(-v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right] \\ - i\omega_1 \hat{\phi}_{C3/2} - i\omega_{3/2} \left(\hat{\phi}_{C1} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) - i\omega_2 \beta - i\omega_{5/2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} & (n=5/2), \dots, \end{cases} \quad (4.9c)$$

また, L_{K_n} と L_{D_n} は $z = H (= H_0 + kH_1 + \dots)$ 上で評価した線形演算子 L_K と L_D の $O(k^n)$ 成分である. とくに, $n=0, 1$ のとき,

$$L_{K0}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left(-\frac{\partial}{\partial z} + \frac{dH_0}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi} + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dH_0}{dx} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \hat{\eta} \right], \quad (4.10a)$$

$$L_{D0}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left[\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right] \hat{\phi} + \left[\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} + 1 \right] \hat{\eta}, \quad (4.10b)$$

$$L_{K1}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dH_0}{dx} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[H_1 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \left(-v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) \hat{\eta} \right] - H_1 \nabla_{\perp}^2 \hat{\phi}, \quad (4.10c)$$

$$L_{D1}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] = \left[\left(-v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} H_1 \right) \frac{\partial}{\partial z} + H_1 \left(\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \hat{\phi} \\ + \hat{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(-v_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) \left(-v_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x \partial z} H_1 \right) + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} H_1 \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right]. \quad (4.10d)$$

上記方程式系(4.5)-(4.8)は線形非同次である. その同次部分は $x \rightarrow \pm\infty$ で指数関数的に減衰する解 $(\hat{\phi}_c, \hat{\eta}_c) = (\partial \Phi_0 / \partial x, dH_0 / dx)$ をもち, $z=0$ で $\partial \hat{\phi} / \partial z = 0$ なる関数に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{H_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \nabla_{\perp}^2 \hat{\phi} dz + \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} L_{K0}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] - \frac{dH_0}{dx} L_{D0}[\hat{\phi}, \hat{\eta}] \right]_{z=H_0} \right\} dx = 0, \quad (4.11)$$

を満たす. ただし $\int_{z=H_0}$ は, 括弧内の量を $z = H_0$ 上で評価することを意味する. したがって, 非同次方程式系(4.5)-(4.8)が $x \rightarrow \pm\infty$ で指数関数的に発散しない解をもつためには, その非同次項 F_n, G_n, I_n が次の可解条件を満たさなければならない:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{H_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} F_n dz + \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} G_n - \frac{dH_0}{dx} I_n \right]_{z=H_0} \right\} dx = 0 \quad (n=1, 3/2, 2, \dots). \quad (4.12)$$

$n=1$ および $3/2$ のとき, (4.12)は恒等的に満たされ, (4.5)-(4.8)の解は

$$\hat{\phi}_{c1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + ip_1 x \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - i\omega_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_0}, \quad \hat{\eta}_{c1} = \frac{dH_1}{dx} + ip_1 x \frac{dH_0}{dx} - i\omega_1 \frac{\partial H_0}{\partial v_0}, \quad (4.13a,b)$$

$$\hat{\phi}_{c3/2} = ip_{3/2} x \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - i\omega_{3/2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_0} + i(p_1 x - \omega_1 \Phi_p) \beta - \frac{2\pi}{C} \left[\Phi_1 + \left(\frac{v_0^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial \Phi_0}{\partial v_0} \right] \gamma, \quad (4.14a)$$

$$\hat{\eta}_{c3/2} = ip_{3/2} x \frac{dH_0}{dx} - i\omega_{3/2} \frac{\partial H_0}{\partial v_0} - i\omega_1 H_p \beta - \frac{2\pi}{C} \left[H_1 + \left(\frac{v_0^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial H_0}{\partial v_0} \right] \gamma. \quad (4.14b)$$

ただし γ は新たな未定定数であり, $[\]$ 内は同次解を, また (Φ_p, H_p) は非同次項が $F_n = G_n = 0, I_n = 1$ で与えられる場合の(4.5)-(4.8)の特解である:

$$\Phi_p = \frac{3}{2} \Phi - \frac{v}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial v} - x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - z \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad H_p = H - \frac{v}{2} \frac{\partial H}{\partial v} - x \frac{dH}{dx}. \quad (4.15a,b)$$

なお(4.13), (4.14)は周期条件(2.25)を満たさない, というのも Φ_0 の v_0 による微分 $\partial \Phi_0 / \partial v_0$ は, $x \rightarrow \infty$ と $x \rightarrow -\infty$ において異なる値をとるからである. 周期条件(2.25)を満たす解を構成するには, x に関して縮められた座標系 $X = kx$ を導入し, x への依存性が緩やかな解を求めなければならない. この解を遠方場の解と呼ぶ. 近接場の解(4.3a,b)と遠方場

の解とをつなぎあわせることにより，周期条件(2.25)を満たす解を構成するのである．この作業は後の 4.2, 4.3 節で行い，本節(4.1 節)ではまず近接場の解を求める．

$n=2$ のとき，可解条件(4.12)は恒等的に満たされ， $n=5/2$ のときは次式に帰着する：

$$-\frac{2\omega_1\omega_{3/2}}{v_0}\frac{dE}{dv_0}+2Eq_1q_{3/2}=\left[\omega_1^2\left(\frac{dM}{dv_0}-v_0\frac{dC}{dv_0}\right)-v_0Mq_1^2\right]\beta-i(v_0^2-1)\omega_1\frac{dC}{dv_0}\gamma. \quad (4.16)$$

ここに C, M, E は(A7a,b,d)により定義される量である．(4.13a)より， $x \rightarrow \pm\infty$ における $\hat{\phi}_{C1}$ は

$$\left[\hat{\phi}_{C1}\right]_{x \rightarrow -\infty} = \left[\hat{\phi}_{C1}\right]_{x \rightarrow \infty} + i\omega_1\frac{dC}{dv_0}, \quad (4.17)$$

を満たし， $n=2$ の(4.5)を x, z に関して積分すると，2 次の量について

$$\left[\hat{u}_{C2}\right]_{x \rightarrow -\infty} = \left[\hat{u}_{C2}\right]_{x \rightarrow \infty} + \omega_1^2\frac{dM}{dv_0} - v_0Mq_1^2, \quad (4.18)$$

の関係があることが分かる．ただし $\hat{u}_{C2}$ は次式で定義される量である．

$$\hat{u}_{C2} = \int_0^{H_0} \left(\frac{\partial \hat{\phi}_{C2}}{\partial x} - ip_1 \hat{\phi}_{C1} \right) dz - v_0 \hat{\eta}_{C2}. \quad (4.19)$$

4.2. 遠方場の解

x に関して縮められた座標系

$$X = kx, \quad (4.20)$$

を導入し，(2.21)-(2.25)の解として X, z に関して単位量の範囲で有意の変化 $[\partial \hat{\phi} / \partial X = O(\hat{\phi}), \partial \hat{\phi} / \partial z = O(\hat{\phi}), d\hat{\eta} / dX = O(\hat{\eta})]$ をするものを次の $k^{1/2}$ の冪級数の形で求める：

$$\hat{\phi}_F(X, z) = k^{1/2} \hat{\phi}_{F1/2} + k \hat{\phi}_{F1} + k^{3/2} \hat{\phi}_{F3/2} + \cdots, \quad (4.21a)$$

$$\hat{\eta}_F(X) = k^{3/2} \hat{\eta}_{F3/2} + k^2 \hat{\eta}_{F2} + k^{5/2} \hat{\eta}_{F5/2} + \cdots. \quad (4.21b)$$

ここに添え字 F は遠方場の解(far-field solution)を示す． $\hat{\phi}_F, \hat{\eta}_F$ の級数がそれぞれ $O(k^{1/2}), O(k^{3/2})$ から始まるのは， $x \rightarrow \pm\infty$ における近接場の解がこれらのオーダーから零でない値をもつからである ((4.4b), (4.14b)を見よ)．(2.17), (4.1), (4.20), (4.21)を(2.21)-(2.25)に代入し， $k^{1/2}$ について整理すると， $\hat{\phi}_{Fn}$ ($n=1/2, 1, 3/2, \dots$) に対する方程式系が得られる． $n=1/2, 1, 3/2, 2$ のとき，同次方程式系 ($\partial^2 \hat{\phi}_{Fn} / \partial z^2 = 0$ for $0 < z < 1$, $\partial \hat{\phi}_{Fn} / \partial z = 0$ at $z=0, 1$) となり， z に依らない解をもつ：

$$\hat{\phi}_{Fn} = \hat{\phi}_{Fn}(X) \quad (n=1/2, 1, 3/2, 2). \quad (4.22)$$

ただし $X = \pm\pi$ 上の周期条件が課される：

$$\hat{\phi}_{Fn}(-\pi) = \hat{\phi}_{Fn}(\pi). \quad (4.23)$$

一方， $n=5/2$ と 3 のときは，次の非同次方程式系となる：

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{Fn}}{\partial z^2} = J_n \equiv \left[q_1^2 - \left(\frac{d}{dX} - ip_1 \right)^2 \right] \hat{\phi}_{Fn-2} + 2 \left[ip_{3/2} \left(\frac{d}{dX} - ip_1 \right) + q_1 q_{3/2} \right] \hat{\phi}_{Fn-5/2} \quad \text{for } 0 < z < 1, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{Fn}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z=0, \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{Fn}}{\partial z} = L_n \equiv \left[i\omega_1 - v_0 \left(\frac{d}{dX} - ip_1 \right) \right] \hat{\eta}_{Fn-1} + i(\omega_{3/2} + v_0 p_{3/2}) \hat{\eta}_{Fn-3/2} \quad \text{at } z=1, \quad (4.26)$$

$$\hat{\phi}_{Fn}(-\pi, z) = \hat{\phi}_{Fn}(\pi, z). \quad (4.27)$$

ただし $\hat{\phi}_{F0} = \hat{\eta}_{F1} = 0$ であり, $\hat{\eta}_{Fn-1}$ は,

$$\hat{\eta}_{Fn-1} = - \left[i\omega_1 - v_0 \left(\frac{d}{dX} - ip_1 \right) \right] \hat{\phi}_{Fn-2} - i(\omega_{3/2} + v_0 p_{3/2}) \hat{\phi}_{Fn-5/2}, \quad (4.28)$$

により与えられる. 上の非同次方程式系(4.24)-(4.27)が解をもつには, その非同次項 J_n と L_n が次の可解条件を満たさなければならない:

$$\int_0^1 J_n dz = L_n \quad (n = 5/2, 3). \quad (4.29)$$

$n = 5/2$ のとき, (4.29)は周期条件(4.23)および $n = 1/2$ の近接場解(4.4b)との接合により,

$$\hat{\phi}_{F1/2} = \beta, \quad (4.30)$$

を与える. $\hat{\eta}_{F3/2}$ は(4.28)より,

$$\hat{\eta}_{F3/2} = -i(\omega_1 + v_0 p_1) \beta. \quad (4.31)$$

$n = 3$ のとき, (4.29)は周期条件(4.23)のもとで $\hat{\phi}_{F1}(X)$ の関数形を次のように定める:

$$\hat{\phi}_{F1} = \frac{-\omega_{3/2} + c_x p_{3/2} + c_y q_{3/2}}{c_x} i\chi(X) \beta + \bar{\beta} \exp \left[\frac{2b\omega_1}{1-v_0^2} i\chi(X) \right]. \quad (4.32)$$

ただし $\bar{\beta}$ は新たな未定定数, $\chi(X)$ は

$$\chi(X) = \begin{cases} X + \pi & \text{for } -\pi < X < 0, \\ X - \pi & \text{for } 0 < X < \pi, \end{cases} \quad (4.33)$$

により定義される関数, (c_x, c_y) は波数ベクトル $(K_x, K_y) = (kp_1, kq_1)$ の線形波がもつ (x, y) 方向群速度である:

$$c_x \equiv \left[\frac{\partial \omega_L(K_x, K_y)}{\partial K_x} \right]_{(K_x, K_y) = (kp_1, kq_1)} = -\frac{v_0 \omega_1 + (v_0^2 - 1)p_1}{\omega_1 + v_0 p_1} (< 0), \quad (4.34a)$$

$$c_y \equiv \left[\frac{\partial \omega_L(K_x, K_y)}{\partial K_y} \right]_{(K_x, K_y) = (kp_1, kq_1)} = \frac{q_1}{\omega_1 + v_0 p_1}, \quad (4.34b)$$

$\hat{\eta}_{F2}$ は(4.28)より,

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{F2} = & \left[(\omega_1 + v_0 p_1) \frac{-\omega_{3/2} + c_x p_{3/2} + c_y q_{3/2}}{c_x} \chi(X) + i \frac{-p_1 \omega_{3/2} + v_0 q_1 q_{3/2}}{b\omega_1} \right] \beta \\ & - i \left[\omega_1 + v_0 \left(p_1 - \frac{2b\omega_1}{1-v_0^2} \right) \right] \bar{\beta} \exp \left[\frac{2b\omega_1}{1-v_0^2} i\chi(X) \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.3. 解の接合

近接場の解($\hat{\phi}_C, \hat{\eta}_C$)と遠方場の解($\hat{\phi}_F, \hat{\eta}_F$)を接合する. 近接場($|X| < 1$)においては遠方場の解を $X(=kx)$ に関して以下のように展開する:

$$\hat{h}_{Fn} = (\hat{h}_{Fn})_0 + kx \left(\frac{\partial \hat{h}_{Fn}}{\partial X} \right)_0 + \frac{k^2 x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{h}_{Fn}}{\partial X^2} \right)_0 + \dots$$

ここに $\hat{h}$ は $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$ を表し, $(\dots)_0$ は括弧内の量を $X=0$ 上で評価することを意味する. この展開後, $(\hat{\phi}_F, \hat{\eta}_F)$ を $k^{1/2}$ について再整理すると, 再構成関数 $(\hat{\phi}_{Fn}^*, \hat{\eta}_{Fn}^*)$ が得られる. その上で, $(\hat{\phi}_{Fn}^*, \hat{\eta}_{Fn}^*)$ と近接場解 $(\hat{\phi}_{Cn}, \hat{\eta}_{Cn})$ を接合するのである. 接合条件は,

$$[\hat{\phi}_{Cn}]_{x \rightarrow \pm\infty} = \hat{\phi}_{Fn}^*, \quad [\hat{\eta}_{Cn}]_{x \rightarrow \pm\infty} = \hat{\eta}_{Fn}^*, \quad (4.36)$$

と表される.

$n=1/2$ のとき, 接合条件は(4.4b)と(4.30)により既に満たされている. 一方 $n=1$ のとき, $\hat{\phi}_{F1}^* = (\hat{\phi}_{F1})_0$ であるから(4.32)より,

$$[\hat{\phi}_{C1}]_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm \pi i \frac{\omega_{3/2} - c_x p_{3/2} - c_y q_{3/2}}{c_x} \beta + \bar{\beta} \exp\left(\pm i \frac{2\pi b \omega_1}{v^2 - 1}\right) \quad (\text{複号同順}). \quad (4.37)$$

$n=3/2, 2$ のとき, $\hat{\phi}_{Fn}^* = (\hat{\phi}_{Fn})_0 + x(d\hat{\phi}_{Fn-1}/dX)_0$ であるから, x に依らない項と x に比例する項が現れる. この段階での未知定数の決定には後者に対する接合条件が必要となる. $n=3/2$ のとき(4.30)より,

$$\left[\frac{\partial \hat{\phi}_{C3/2}}{\partial x} \right]_{x \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (4.38)$$

これは(4.14a)を用いて単一の条件:

$$\gamma = -ip_1 \beta, \quad (4.39)$$

に帰着する. $n=2$ のとき, (4.32), (4.35)より,

$$[\hat{u}_{C2}]_{x \rightarrow \pm\infty} = \left[-i \frac{\omega_{3/2}}{b} + i \frac{(1-v_0^2)q_1}{b\omega_1} q_{3/2} \pm \pi b \omega_1 \frac{\omega_{3/2} - c_x p_{3/2} - c_y q_{3/2}}{c_x} \right] \beta + ib\omega_1 \bar{\beta} \exp\left(\pm i \frac{2\pi b \omega_1}{v_0^2 - 1}\right). \quad (4.40)$$

(複号同順)

ただし(4.19)で定義した $\hat{u}_{C2}$ を用いて表した. 結局, 8 つの未知数 $\omega_{3/2}$, β , $\bar{\beta}$, γ , $[\hat{\phi}_{C1}]_{x \rightarrow \pm\infty}$, $[\hat{u}_{C2}]_{x \rightarrow \pm\infty}$ が 8 つの式(4.16)-(4.18), (4.37), (4.39), (4.40)により決まる. 結果を $\omega_{3/2}$ に対してのみ示す:

$$\omega_{3/2} = \omega_1 \frac{q_{3/2}}{q_1} + \begin{cases} \frac{1}{2} (\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + \Delta_{cr}^2}) & \text{for } b < 0 \\ \frac{1}{2} (\Delta \pm i \sqrt{-\Delta^2 + \Delta_{cr}^2}) & \text{for } b > 0 \text{ and } |\Delta| < \Delta_{cr}, \text{ (複号任意)} \\ \frac{1}{2} (\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - \Delta_{cr}^2}) & \text{for } b > 0 \text{ and } |\Delta| > \Delta_{cr}. \end{cases} \quad (4.41)$$

ただし,

$$\Delta = c_x p_{3/2} + c_y q_{3/2} - \omega_1 \frac{q_{3/2}}{q_1} = c_x \left(p_{3/2} - p_1 \frac{q_{3/2}}{q_1} \right), \quad \Delta_{cr} = \sqrt{\frac{\Gamma^2 q_1^2}{2\pi E} \left| \frac{c_x}{b} \right|}, \quad (4.42a, b)$$

$$\Gamma = -\frac{\omega_1 [v_0 \omega_1 + (v_0^2 - 1) p_1]}{q_1^2} \frac{dC}{dv_0} + \frac{\omega_1^2}{q_1^2} \frac{dM}{dv_0} - v_0 M. \quad (4.42c)$$

(4.41)より,

$$b > 0 \text{ and } |\Delta| < \Delta_{cr}, \quad (4.43)$$

のとき $\omega_{3/2}$ は負の虚部をもつ。つまり $K_x - K_y$ 平面上において、 $b > 0$ の共鳴直線(3.7)に沿って不安定領域が幅 $O(k^{3/2})$ で存在することが証明された。この不安定性を伴う共鳴直線を、図2に実直線で示してある。

5. 理論解析のまとめ

3節において、共鳴条件が(3.3)と(3.6)により表されることを示した。前者から得られる共鳴曲線は、攪乱の波数平面上において楕円となる(共鳴タイプ I)。一方、後者から得られる共鳴曲線は4本の直線となる(共鳴タイプ II)。4節では、後者の共鳴に対して長波長極限における漸近安定性解析をおこない、4本の共鳴直線のうち、2直線上($b > 0$)で不安定性が誘起され、残りの2直線上($b < 0$)で中立安定となることを理論的に示した。前者(タイプ I)に対しての安定性解析は紙面の都合上省略したが、解析結果は共鳴曲線となるすべての楕円上において $O(k^2)$ の幅の不安定領域が存在することを示している。

6. 数値的検証

固有値問題(2.21)-(2.25)を数値的に解くことにより、前節までに得られた理論解析結果の検証を行う。まずは水面波列解(2.5)の計算手法を記述しておく。孤立波解の計算用に開発された Tanaka[11]の方法を、以下のように波列解用に修正して利用した。水面上の $x - \Phi/v$ を独立変数 ($x = \Phi = 0$ が峰) として採用し、半波長に相当する $0 \leq x - \Phi/v \leq \pi/k$ の範囲で

$$x - \frac{\Phi}{v} = \frac{\pi}{k} \left[P\gamma_i + (1-P) \left(\gamma_i - \frac{\sin \pi \gamma_i}{\pi} \right) \right], \quad (6.1)$$

により定義される $N+1$ 離散点上 $\gamma_i = i/N$ ($i=0,1,2,\dots,N$) で未知関数を定義する。ただし P は正の定数である。(6.1)により、 $d(x - \Phi/v)/d\gamma_i$ は対称条件および周期条件の課される $x - \Phi/v = 0$ および π/k 上も含めて、 γ_i に関して無限回微分可能となる。この座標系を用いること以外は計算手法についてとくに変更がないので、残りは文献[11]を参照されたい。

固有値問題(2.21)-(2.25)は以下のようにして解いた。まず、 $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2 - K_y^2)G = -2\pi\delta(x-x', z-z')$ (δ はディラックのデルタ関数)および底面 $z=0$ での境界条件 $\partial G/\partial z = 0$ を満たす変形ヘルムホルツ方程式のグリーン関数 G を導入する。

$$G(x, z, x', z') = K_0(K_y r) + K_0(K_y \bar{r}). \quad (6.2)$$

ただし K_0 は0次の第2種変形ベッセル関数であり、

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2}, \quad \bar{r} = \sqrt{(x-x')^2 + (z+z')^2}, \quad (6.3)$$

である。然らば $\hat{\phi}e^{-iK_y x}$ は、

$$\hat{\phi}e^{-iK_y x} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s') G(x, z, x'(s'), z'(s')) e^{iK_y x'(s')} ds', \quad (6.4)$$

により定義される。ただし s は水面波列の表面 $z=H$ に沿った弧長 ($x=0$ において $s=0$)、 $(x(s), z(s))$ はその水表面の空間座標、 $\sigma(s)$ は新たな未知関数である。すると

$\hat{\phi}e^{-iK_x x}$ の表面に沿っての s 微分および法線方向 n 微分は,

$$\frac{\partial \hat{\phi}e^{-iK_x x}}{\partial s} = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s') \frac{\partial G}{\partial s} e^{-iK_x x'(s')} ds', \quad (6.5a)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}e^{-iK_x x}}{\partial n} = \pi \sigma e^{-iK_x x} + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s') \frac{\partial G}{\partial n} e^{-iK_x x'(s')} ds', \quad (6.5b)$$

(PV はコーシーの主値) と表されるので, $\hat{\phi}(x, z)$ と $\hat{\eta}(x)$ に対する固有値問題 (2.19)–(2.25) は, 水表面上で定義される $\hat{\eta}(s)$ と $\sigma(s)$ に対する次の積分微分方程式系に帰着する.

$$\lambda \hat{\eta} = \frac{1}{\cos \theta} \left[\pi \sigma + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s') \frac{\partial G}{\partial n} ds' + \frac{d(q \cos \theta \hat{\eta})}{ds} \right] - iK_x q \hat{\eta} \cos \theta, \quad (6.6)$$

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s') G ds' = q \times \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s') \frac{\partial G}{\partial s} ds' - \left[q \frac{d(q \sin \theta)}{ds} + 1 \right] \hat{\eta}. \quad (6.7)$$

ただし $x(s) = \pm \pi/k$ 上において周期条件が課される. また $q(s)$ と $\theta(s)$ は水表面上における水面波列の流速の大きさおよび水表面と水平面とのなす角度を表す.

$$q(s) = \left[\left(-v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2}_{(x,z)=(x(s),z(s))}, \quad \theta(s) = \arctan \left(\frac{dH}{dx} \right). \quad (6.8a,b)$$

上記固有値問題(6.5), (6.6)と周期条件を, 水表面上の $-\pi/k < x - \Phi/v < \pi/k$ の範囲で新たに導入した $2N$ 離散点, つまり(6.1)の $\gamma_{i-1/2} = (i-1/2)/N$ ($i = -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N$) において評価することで数値的に解く.

式(6.7)に現れる 2 つの積分 $\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s') \frac{\partial G}{\partial s} ds'$, $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(s') G ds'$ は, $s' = s$ 上でそれぞれ一位の特異性と対数特異性をもつ. 前者については, 独立変数 s の関数を離散点 $\gamma_{i-1/2}$ 上で, 独立変数 s' の関数を γ_i 上で評価し, 積分を台形則により評価する. 後者については, まず対数特異性を含む積分 $-\int_{\gamma_{i-2}}^{\gamma_{i+1}} \sigma(s') \ln|s' - s(\gamma_{i-1/2})| ds'$ をとりだし, $\sigma(s')$ を s' の 3 次方程式により近似する.

$$\sigma(s') = a_3 s'^3 + a_2 s'^2 + a_1 s' + a_0. \quad (6.9)$$

ただし a_0, a_1, a_2, a_3 は(6.9)を 4 離散点 $s' = s(\gamma_{i-2}), s(\gamma_{i-1}), s(\gamma_i), s(\gamma_{i+1})$ 上で評価することにより決まる. 残りの特異性を含まない積分は, 通常のシンプソン則で解く. 結局, (6.6)の微分 $d\hat{\eta}/ds$ を 4 次中心差分により評価し, 4 次ラグランジュ内挿関数を利用すると, (6.6)と(6.7)は $\{\hat{\eta}, \sigma\} \equiv (\hat{\eta}(\gamma_{-N+1}), \dots, \hat{\eta}(\gamma_N), \sigma(\gamma_{-N+1}), \dots, \sigma(\gamma_N))$ に対する $4N$ 個の代数方程式に帰着する.

$$\lambda [\mathbf{Y}] \begin{Bmatrix} \hat{\eta} \\ \sigma \end{Bmatrix} = [\mathbf{Z}] \begin{Bmatrix} \hat{\eta} \\ \sigma \end{Bmatrix}. \quad (6.10)$$

ただし $[\mathbf{Y}]$ と $[\mathbf{Z}]$ は $4N \times 4N$ の係数行列である. $4N \times 4N$ 行列 $[\mathbf{Y}^{-1} \mathbf{Z}]$ の固有値は λ は, QR 法により数値的に求められる[12].

上記数値手法により得られた $a = 0.4, 0.7$ および $k = 0.05, 0.2$ に対する不安定領域の結果を, 図 3 の実線で囲まれた領域により示した. 対称性より $K_x - K_y$ 平面における第一象限のみを表示してある. 一方, 破線は不安定性を伴う $k \rightarrow 0$ の共鳴曲線であり, 物理

的に重なる部分の二重表記を避けた形で示した．具体的には(3.4) ($|K_x| > mk/2$) および (3.7) ($b > 0$) を表す．図3より，数値的に求められた不安定領域（実線で囲まれた領域）は，理論的に求めた共鳴曲線（破線）上もしくはその近傍に存在していることが分かる．とくに $k=0.05$ においては，数値解と共鳴曲線は非常によい一致を示しており，前節までに得られた理論解析結果が検証されたといえる． $k=0.2$ のときは， $|K_x|/k$ および $|K_y|/k$ が大きめの値をとる場合に数値解が共鳴曲線から外れている．一般に，数値解と共鳴曲線との一致は， k ， $|K_x|$ および $|K_y|$ が小さいほどよい．これは4節までの $k \rightarrow 0$ の理論的議論において， k の小ささと伴に $|K_x|$ と $|K_y|$ の小ささも仮定しているためである．なお，不安定領域の数値解により興味のある方は，文献[13]を参照されたい．

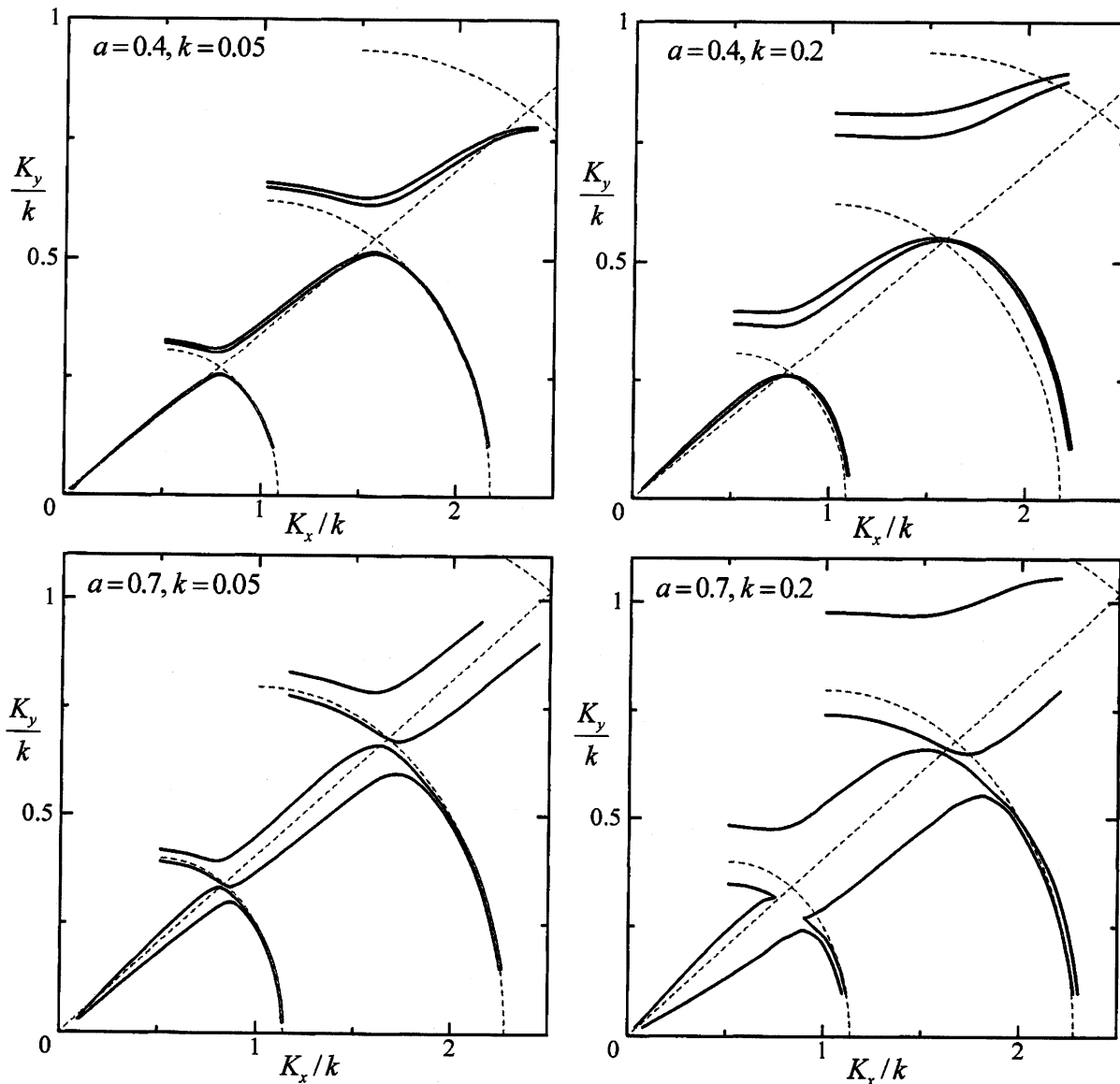


図3 $a=0.4, 0.7$ および $k=0.05, 0.2$ の水面波列に対する不安定領域の数値解(実線で囲まれた領域)．破線は不安定性を伴う共鳴曲線であり，具体的には(3.4)の $|K_x| > mk/2$ および(3.7)の $b > 0$ を表す．

補遺. 孤立波解とその拡張された解

(2.1)-(2.4)を満たす解として, y と t に依らない次の形の解を探す:

$$\phi = -v_0 x + \Phi_0(x, z), \quad \eta = H_0(x). \quad (\text{A1a,b})$$

ただし v_0 は正のパラメータであり, $\partial\Phi_0/\partial x$, $\partial\Phi_0/\partial z$, $H_0 - 1$ はいずれも $x \rightarrow \pm\infty$ において減衰する. この解は x 方向に関して局所的な波が, x 方向流速 $-v_0$ の一様流れに逆らって定常的に伝播する様子を表しており, 孤立波解と呼ばれる. (A1)を(2.1)-(2.4)に代入すると, Φ_0 と H_0 に対する以下の方程式系が得られる.

$$\nabla_{\perp}^2 \Phi_0 = 0 \quad \text{for } 0 < z < H_0, \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, \quad (\text{A3})$$

$$\left(-v_0 + \frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\right) \frac{dH_0}{dx} = \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \quad \text{at } z = H_0, \quad (\text{A4})$$

$$-v_0 \frac{\partial\Phi_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \right)^2 \right] + H_0 = 1 \quad \text{at } z = H_0, \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \rightarrow 0, \quad H_0 \rightarrow 1 \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{A6})$$

上記孤立波解の存在は理論的に証明されており[14], 数値解はHunter & Vanden-Broeck [15]をはじめとして多くの研究者により求められている[11,16,17]. それによると, 孤立波解は $1 < v_0 \leq 1.2942$, つまりは $0 < a \leq 0.83332$ (a は最大波高) の範囲で存在し, 次の特徴を持つことが知られている. 表面変位 $H_0(x) - 1$ は常に正であり, 峰と呼ばれる極大値 x はただ1点である. さらに $x = 0$ を峰に設定すれば, $\Phi_0(x, z) - \Phi_0(0, z)$ は x に関して奇関数, $H_0(x)$ は偶関数となり, (A6)で表される遠方の値へ指数関数的に急速に近づく. ちなみに Φ_0 自身は, $x \rightarrow \infty$ および $x \rightarrow -\infty$ において次の差をもつ.

$$C(v_0) \equiv [\Phi_0]_{x \rightarrow \infty} - [\Phi_0]_{x \rightarrow -\infty} = v_0 M - \frac{2T}{v_0}. \quad (\text{A7a})$$

ここに最右辺は McCowan [18]により最初に導かれた. また C および

$$M(v_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (H_0 - 1) dx, \quad T(v_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{H_0} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial z} \right)^2 \right] dz, \quad (\text{A7b,c})$$

により定義される M , T は, それぞれ孤立波の循環, 質量, 運動エネルギーを表す. ちなみに孤立波の全エネルギー E は,

$$E(v_0) = T(v_0) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (H_0 - 1)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{H_0} \left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x} \right)^2 dz, \quad (\text{A7d})$$

により定義され, 最右辺は最初 Starr [19]により導出された(文献[20]の Appendix A も参照).

孤立波解(A1)を, 新たなパラメータ U を含む以下の形へと拡張しよう.

$$\phi = -v^* x + \Phi^*(x, z), \quad \eta = H^*(x). \quad (\text{A8a,b})$$

ただし,

$$\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} \rightarrow U, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \rightarrow 0, \quad H^* \rightarrow 1 + v^* U - \frac{U^2}{2} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{A9})$$

を満たすものとする。この解は x 方向に関して局所的な波が、深さ $1 + v^* U - U^2/2$, x 方向流速 $-v^* + U$ の一様流れに逆らって定常的に伝播する様子を表す。この解を拡張された孤立波解と呼ぼう。次の変換：

$$v_0 \rightarrow \frac{v^* - U}{\sqrt{h}}, \quad (x, z) \rightarrow \frac{1}{h}(x, z), \quad \Phi_0 \rightarrow \frac{\Phi^* - Ux}{h^{3/2}}, \quad H_0 \rightarrow \frac{H^*}{h}, \quad (\text{A10})$$

ただし、

$$h = 1 + v^* U - \frac{U^2}{2}, \quad (\text{A11})$$

を(A2)-(A6)に代入すれば、波速 v^* の拡張された孤立波解 (Φ^*, H^*) に対する方程式系が得られる。したがって、 (Φ^*, H^*) は孤立波解 (Φ_0, H_0) を用いて

$$\Phi^*(x, z; v^*, U) = Ux + h^{3/2} \Phi_0\left(\frac{x}{h}, \frac{z}{h}; \frac{v^* - U}{\sqrt{h}}\right), \quad H^*(x; v^*, U) = h H_0\left(\frac{x}{h}; \frac{v^* - U}{\sqrt{h}}\right), \quad (\text{A12a,b})$$

と表すことができる。ただし

$$v^* = U + v_0 \sqrt{h}. \quad (\text{A12c})$$

この拡張された孤立波解は $1 < (v^* - U)/\sqrt{h} \leq 1.2942$ の範囲で存在し、(A9)で表される遠方値へ指数関数的に急速に近づく。ちなみに $\Phi^* - Ux$ 自身は、 $x \rightarrow \pm\infty$ において次の差をもつ異なる一定値へと近づく。

$$C^*(v^*, U) \equiv [\Phi^* - Ux]_{x \rightarrow \infty} - [\Phi^* - Ux]_{x \rightarrow -\infty} = \frac{1}{h} \left[(v^* - U) M^* - \frac{2T^*}{v^* - U} \right] = h^{3/2} C \left(\frac{v^* - U}{\sqrt{h}} \right). \quad (\text{A13a})$$

ここに、

$$M^*(v^*, U) = \int_{-\infty}^{\infty} (H^* - h) dx, \quad (\text{A13b})$$

$$T^*(v^*, U) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{H^*} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial x} - U \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right)^2 \right] dz. \quad (\text{A13c})$$

参考文献

- [1] Phillips, O. M. 1960 On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part 1. The elementary interactions. *J. Fluid Mech.* **9**, 193-217.
- [2] Benjamin, T. B. & Feir, J. E. 1967 The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory. *J. Fluid Mech.* **27**, 417-430.
- [3] Zakharov, V. E. 1968 Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **2**, 190-194.
- [4] Crawford, D., Lake, B. M., Saffman, P. G. & Yuen, H. C. 1981 Stability of weakly nonlinear deep-water waves in two and three dimensions. *J. Fluid Mech.* **105**, 177-191.
- [5] Mclean, J. W. 1982 Instabilities of finite-amplitude water waves. *J. Fluid Mech.* **114**, 315-330.
- [6] Mclean, J. W. 1982 Instabilities of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth. *J. Fluid Mech.* **114**, 331-341.
- [7] Krasovskii, Yu. P. 1961 On the theory of steady state waves of large amplitude, *U.S.S.R. Comput. Maths. and Math. Phys.* **1**, 996-1018.
- [8] Keady, G. & Norbury, J. 1978 On the existence theory for irrotational water waves, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **83**, 137-157.

- [9] Garabedian, P. 1965 Surface waves of finite depth, *J. d'Anal. Math.* **14**, 161-169.
- [10] Kataoka, T. & Tsutahara, M. 2004 Transverse instability of surface solitary waves. *J. Fluid Mech.* **512**, 211-221.
- [11] Tanaka, M. 1986 The stability of solitary waves. *Phys. Fluids* **29**, 650-655.
- [12] Wilkinson, J. H. 1965 *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon, Oxford.
- [13] Francius, M. & Kharif, C. 2006 Three-dimensional instabilities of periodic gravity waves in shallow water. *J. Fluid Mech.* **561**, 417-437.
- [14] Amick, C. J. & Toland, J. F. 1981 On solitary water-waves of finite amplitude. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **76**, 9-95.
- [15] Hunter, J. K. & Vanden-Broeck, J. M. 1983 Accurate computations for steep solitary waves, *J. Fluid Mech.* **136**, 63-71.
- [16] Byatt-Smith, J. G. & Longuet-Higgins, M. S. 1976 On the speed and profile of steep solitary waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* **350**, 175-189.
- [17] Longuet-Higgins, M. S. & Tanaka, M. 1997 On the crest instabilities of steep surface waves. *J. Fluid Mech.* **336**, 51-68.
- [18] McCowan, J. 1891 On the solitary wave. *Phil. Mag.* (Ser. 5) **32**, 45-58.
- [19] Starr, V. T. 1947 Momentum and energy integrals for gravity waves of finite height. *J. Mar. Res.* **16**, 175-193.
- [20] Kataoka, T. 2008 Transverse instability of interfacial solitary waves. *J. Fluid Mech.* **611**, 255-282 .