

収束のおそい級数の計算についての
2 ~ 3 の数値例の紹介

電総研 戸田英雄

まえおき

収束のおそい級数の計算に 数値計算の大家は どのような工夫をしたか? をある具体的な問題(下記の書物及び文献)で その精神を紹介する。

研究集会で、清野氏(京大)から文献を頂いたので追加した。実際の数値計算の経過の一端と公式の誘導は附録にまとめた。

— 文献 —

- [1] 林桂一 数値計算 岩波書店(昭和16) pp.100-103.
- [2] 森口繁一 極板の抵抗を考へに入れた電解槽電流分布の計算 応用力学 第1巻 第6号 (1948)
pp.181-186.
- [3] 山内二郎 正規母集団からの標本範囲の分布関数
慶応義塾大学百年記念論文集(1958) pp.818-837.

[4] 清野 武 抵抗測定法による電気探鉱の

理論的根拠 (昭和18)

電気学会関西支部第五回電気工学

専門講習会予稿 P7, PP.12-13.

1. Kummer の変形法を用いる例

1.1 $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ と $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ の計算と誤差の漸近評価

$$(1) \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

の値は $\frac{\pi^2}{6}$ と知られているが、(1)のような級数の和として計算すると収束がおそいので、Euler-Maclaurin の公式

$$(2) \quad S_2 = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \sum_{l=1}^{M-1} (-1)^{l-1} \frac{B_l}{N^{2l+1}}$$

で求めることがよく行われている。

(B_l は Bernoulli 数で、 $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_4=-\frac{1}{30}$, $B_6=\frac{1}{42}$, ...))

ここでは Kummer の変形法を用いて、 M 項までの和を計算したときの誤差を漸近的に見積り、数値実験と比較して見た。すなわち、よく知られているように、

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1$$

なので、

$$S_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$$

となり, (1) のまゝよりは収束が速くなる. これと更に進めて

$$(4) \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} + N! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\cdots(n+N)}$$

を得る. ([1] 林桂一)

(4) を用いて, M 項までの和で打ち切ると,

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} + N! \sum_{n=1}^M \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\cdots(n+N)} + R_2$$

$$(5) \quad R_2 = N! \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\cdots(n+N)}$$

は打ち切り誤差で, この漸近的な評価は次の式となる.

$$(6) \quad R_2 = \frac{N!}{N+1} \cdot \frac{1}{M^{N+1}} + O\left(\frac{1}{M^{N+2}}\right) \quad [\text{附録 1}]$$

$M=100$ で N を種々かえて, 数値実験の結果と (6) を比較したのが 表-1 である.

表-1 R_2 の理論値と実験値

N	R_2 ((6)式による)	R_2 の実験値	N	R_2 ((6)式による)	R_2 の実験値
1	$(1/2) \times 10^{-4}$	0.492×10^{-4}	6	1.03×10^{-12}	0.83×10^{-12}
2	$(2/3) \times 10^{-6}$	0.642×10^{-6}	7	0.63×10^{-13}	0.48×10^{-13}
3	$(3/2) \times 10^{-8}$	0.140×10^{-7}	8	0.45×10^{-14}	0.33×10^{-14}
4	0.48×10^{-9}	0.43×10^{-9}	9	0.36×10^{-15}	0.44×10^{-15}
5	0.20×10^{-10}	0.17×10^{-10}	10	0.33×10^{-16}	0.44×10^{-15}

$$(7) \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \div 1.20205690315959 \dots$$

の場合は, Kummer の変形法で 種々な公式が作れるが, ここでは 林 桂一 [1] の式を用いた. (附録 3)

$$(8) \quad S_3 = \frac{9}{8} + \frac{25}{2^2 \cdot 3^4} - \frac{4}{3} \sum_{n=1}^M \frac{1}{(n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3} + R_3$$

$$(9) \quad R_3 = -\frac{4}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3}$$

が M 項までの和で打ち切ったときの誤差である.

$$(10) \quad R_3 = -\frac{1}{6} \frac{1}{(M+2)^8} + \frac{2}{3} \frac{1}{(M+2)^9} - \frac{7}{5} \frac{1}{(M+2)^{10}} + 2 \frac{1}{(M+2)^{11}} - \frac{5}{2} \frac{1}{(M+2)^{12}} + \dots \quad [\text{附録 4}]$$

と求められる. 数値実験の結果は表-2 となる.

表-2 R_3 の理論値と実験値

M	R_3 (10式による)	R_3 の実験値	M	R_3 (10式による)	R_3 の実験値
1	$.8656 \times 10^{-5}$	$.7140 \times 10^{-5}$	9	$.5425 \times 10^{-9}$	$.5424 \times 10^{-9}$
2	$.1007 \times 10^{-5}$	$.9672 \times 10^{-6}$	10	$.2786 \times 10^{-9}$	$.2786 \times 10^{-9}$
3	$.1980 \times 10^{-6}$	$.1956 \times 10^{-6}$	15	$.1891 \times 10^{-10}$	$.1892 \times 10^{-10}$
4	$.5187 \times 10^{-7}$	$.5163 \times 10^{-7}$	20	$.2537 \times 10^{-11}$	$.2539 \times 10^{-11}$
5	$.1651 \times 10^{-7}$	$.1648 \times 10^{-7}$	40	$.1565 \times 10^{-13}$	$.2021 \times 10^{-13}$
6	$.6074 \times 10^{-8}$	$.6069 \times 10^{-8}$	80	$.7765 \times 10^{-16}$	$.4663 \times 10^{-14}$
7	$.2498 \times 10^{-8}$	$.2496 \times 10^{-8}$	90	$.3109 \times 10^{-16}$	$.4441 \times 10^{-14}$
8	$.1123 \times 10^{-8}$	$.1122 \times 10^{-8}$	100	$.1368 \times 10^{-16}$	$.4441 \times 10^{-14}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n+k}$ の計算 ([2] 森口繁一による)

極板の抵抗を考えに入れた電解槽電流分布の計算 [2] によると、電流密度の計算で、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n+k}$ の値を求める必要がある、収束を速めた 次の式を与えた：

$$\begin{aligned}
 k \leq 1 \quad \text{のときは,} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n+k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{k}{n^2} + \frac{k^2}{n^2(n+k)} \right) \cos nu \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n} - k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n^2} + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n^2(n+k)} \\
 &= -\log \left(2 \sin \frac{u}{2} \right) - k \frac{\pi^2}{4} \left\{ \left(1 - \frac{u}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{3} \right\} + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n^2(n+k)}
 \end{aligned}$$

k が非常に大きいときは、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nu}{n+k} &= -\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k^2} \left(\frac{1}{1-\cos u} - \frac{2}{u^2} \right) \\
 &\quad + \cos ku (-C_i ku) + \sin ku \left(\frac{\pi}{2} - S_i ku \right) \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{k^4}\right) \quad [[2] \text{ の p183 参照 }]
 \end{aligned}$$

と、 z'' 、

$$S_i x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad C_i x = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

がある。

1.3
$$f(\Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{1+n^2\Delta^2}} \quad \text{の計算 (4) 清野武による)}$$

地下に埋没した理想導体の球の探査についての抵抗測定法による電気探鉱の理論的根拠 [4] によると, $\Delta < 1$ で収束の早い $f(\Delta)$ の計算がけ要となり, Kummer の方法で次のように収束を速める例がある:

$$\begin{aligned} f(\Delta) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{1+n^2\Delta^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\Delta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{n^2\Delta^2} + \frac{3}{8} \frac{1}{n^4\Delta^4} - \frac{5}{16} \frac{1}{n^6\Delta^6} \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+n^2\Delta^2}} - \frac{1}{n\Delta} + \frac{1}{2} \frac{1}{n^3\Delta^3} + \frac{3}{8} \frac{1}{n^5\Delta^5} - \frac{5}{16} \frac{1}{n^7\Delta^7} \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta} R(1) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^3} R(3) + \frac{3}{8} \frac{1}{\Delta^5} R(5) - \frac{5}{16} \frac{1}{\Delta^7} R(7) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+n^2\Delta^2}} - \frac{1}{n\Delta} + \frac{1}{2} \frac{1}{n^3\Delta^3} + \frac{3}{8} \frac{1}{n^5\Delta^5} - \frac{5}{16} \frac{1}{n^7\Delta^7} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ただし } R(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \log 2 = 0.693147180559945$$

$$R(3) = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots = 0.901542677369606$$

$$R(5) = 1 - \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} - \dots = 0.972119770446909$$

$$R(7) = 1 - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \dots = 0.992593819922830$$

Δ が大きいときは, 無限級数の部分を省略した近似式でよい

2. 正規分布からの大きさ n の場合の標本範囲の分布の

数値計算 ([3] 山内 = 即ちによる)

正規母集団からの大きさ n の標本範囲 W の分布は,

$$(2-1) \quad f_n(w) = n^{(2)} \int_{-\infty}^{\infty} du \phi(u + \frac{w}{2}) \phi(u - \frac{w}{2}) \cdot \left[\int_{u - \frac{w}{2}}^{u + \frac{w}{2}} \phi(t) dt \right]^{n-2}$$

ここで,

$$(2-2) \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

W の分布関数 $F_n(w)$ は

$$(2-3) \quad F_n(w) = \int_0^w f_n(t) dt$$

がある. $n=2, 3$ のときは簡単な式で与えられるが, $n \geq 4$ の場合の数値計算用の近似式を [3] 山内 が工夫した.

たとえば $n=4$ のときは,

$$(2-4) \quad f_4(w) = 4! \sqrt{2} (2\pi)^{-1} \phi(w/\sqrt{2}) \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} - \int_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} d\theta \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{12} \sec^2 \theta\right) \right\}$$

$$(2-5) \quad F_4(w) = 1 - 12 \int_{w/\sqrt{2}}^{\infty} \phi(u) du + \frac{12\sqrt{3}}{\pi} \int_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} d\theta \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\tan^2 \theta}} \cdot \int_{w/\sqrt{2}}^{\infty} \frac{\phi(u) du}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\tan^2 \theta}}$$

がある.

これらの公式で, W の大きい所でも数値計算に便利な展開式を山内が更に計算した.

2.1 $f_4(w)$ の場合

(2-4) の積分の項は

$$\int_{-\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}} + \int_{\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\tan^{-1} \sqrt{2}}$$

と分けて，特に後者の積分は，上限と下限における $\sec^2 \theta$ の値の平均値を引き去った残りの部分について，項別積分を行って，収束を速くしてある。

すなわち，

$$\begin{aligned} (2-6) \quad & \int_{\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\tan^{-1} \sqrt{2}} d\theta \cdot \exp \left\{ -\frac{w^2}{12} \sec^2 \theta \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{w^2}{12} \left(1 + \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{2})^2}{2} \right) \right\} \cdot \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} dt \frac{1}{1+t^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{w^2}{12} \left(t^2 - \frac{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\sqrt{2})^2}{2} \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{w^2}{12} \left(1 + \frac{5}{4} \right) \right\} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-)^{\lambda} \frac{1}{\lambda!} \left(\frac{w^2}{12} \right) I'_{\lambda} \end{aligned}$$

$$(2-7) \quad I'_{\lambda} = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} dt \left(t^2 - \frac{5}{4} \right)^{\lambda-1} - \left(1 + \frac{5}{4} \right) \cdot I'_{\lambda-1}$$

$$I'_0 = \tan^{-1} \sqrt{2} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad I'_1 = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(1 + \frac{5}{4} \right) I'_0,$$

...

となる。前者の積分は

$$(2-8) \int_{-\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}} d\theta \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{12} \sec^2 \theta\right)$$

$$= 2 \exp\left(-\frac{w^2}{12}\right) \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-)^{\lambda} \frac{1}{\lambda!} \left(\frac{w^2}{12}\right)^{\lambda} I_{\lambda}''$$

$$(2-9) \quad I_{\lambda}'' = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{1+t^2} t^{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2\lambda-1} - I_{\lambda-1}''$$

∴, 結局 次の山の近似式が求められる:

$$(2-10) \quad f_4(w) = 6\sqrt{2} \phi\left(\frac{w}{\sqrt{2}}\right) - \frac{24\sqrt{2}}{\pi} \phi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}w\right) \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-)^{\lambda} \frac{1}{\lambda!} \left(\frac{w^2}{12}\right)^{\lambda} I_{\lambda}'' \\ - \frac{12\sqrt{2}}{\pi} \phi\left(\frac{\sqrt{2}}{8}w\right) \cdot \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-)^{\lambda} \frac{1}{\lambda!} \left(\frac{w^2}{12}\right)^{\lambda} I_{\lambda}'$$

表-3 (2-10)の係数

λ	$\sqrt{2} I_{\lambda}''$	$\sqrt{2} I_{\lambda}'$
0	0.870 419 752 358	0.480 601 966 679
1	-1.29 580 247 642	- 8.13 544 250 285 10^{-2}
2	3.70 864 180 248 10^{-2}	9.97 141 229 807 10^{-2}
3	1.29 135 819 752 10^{-2}	- 2.85 234 433 732 10^{-2}
4	4.94 356 088 191 10^{-3}	3.51 598 904 469 10^{-2}
5	2.00 088 356 253 10^{-3}	- 1.17 114 400 135 10^{-2}
6	8.40 025 528 377 10^{-4}	1.44 812 076 531 10^{-2}
7	3.61 897 548 546 10^{-4}	- 5.19 644 788 975 10^{-3}
8	1.58 935 784 785 10^{-4}	6.43 813 754 444 10^{-3}
9	7.08 436 269 771 10^{-5}	- 2.41 579 069 919 10^{-3}
10	3.19 524 256 544 10^{-5}	2.99 757 845 858 10^{-3}

2.2 $F_4(w)$ の場合(2-5) の二重積分は X とすると,

$$(2-11) \quad X = \frac{12\sqrt{3}}{\pi} \int_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta}} \int_{w\sqrt{\frac{2}{3}}+w\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta}-1)}^{\infty} \phi(u) du$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \int_{w\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\infty} du \phi(u) I_0 - \phi(w\sqrt{\frac{2}{3}}) (w\sqrt{\frac{2}{3}}) \frac{1}{1!} I_1 \right. \\ \left. - \phi^{(1)}(w\sqrt{\frac{2}{3}}) (w\sqrt{\frac{2}{3}})^2 \frac{1}{2!} I_2 - \phi^{(2)}(w\sqrt{\frac{2}{3}}) (w\sqrt{\frac{2}{3}})^3 \frac{1}{3!} I_3 - \dots \right\}$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \int_{w\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\infty} du \phi(u) \cdot I_0 + \phi(w\sqrt{\frac{2}{3}}) \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1} (w\sqrt{\frac{2}{3}})^{\lambda-1} G_{\lambda} \right\}$$

$$(2-12) \quad I_{\lambda} = \int_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{4}\tan^2\theta} - 1 \right)^{\lambda}, \quad \lambda=0, 1, 2, \dots$$

$$(2-13) \quad G_{\lambda} = \frac{1}{\lambda!} I_{\lambda} + \frac{2!}{2^2 1!} \binom{\lambda}{2} \frac{1}{(\lambda+1)!} I_{\lambda+1} + \frac{4!}{2^2 2!} \binom{\lambda+1}{4} \frac{1}{(\lambda+2)!} I_{\lambda+2} \\ + \dots + \frac{(2\lambda-2)!}{2^{\lambda-1} (\lambda-1)!} \binom{2\lambda-2}{2\lambda-2} \frac{1}{(2\lambda-1)!} I_{2\lambda-1}$$

$$(2-14) \quad I_0 = J_{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) \Big|_{-\tan^{-1}\sqrt{2}}^{\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(2-15) \quad J_0 = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} + \tan^{-1} \sqrt{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$(2-16) \quad I_1 = J_0 - J_{-\frac{1}{2}}$$

$$I_2 = J_{\frac{1}{2}} - 2J_0 + J_{-\frac{1}{2}}$$

$$I_3 = J_1 - 3J_{\frac{1}{2}} + 3J_0 - J_{-\frac{1}{2}}$$

$$I_4 = J_{\frac{3}{2}} - 4J_1 + 6J_{\frac{1}{2}} - 4J_0 + J_{-\frac{1}{2}}$$

...

ここで J_m は次の漸化式で定められる:

$$(2-17) \quad J_m = \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt (1 + \frac{t^2}{4})^{m-1} + \frac{3}{4} J_{m-1} = \frac{1}{4} K_{m-1} + \frac{3}{4} J_{m-1}$$

とおく.

$$(2-18) \quad K_m = \int_{-\sqrt{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dt (1 + \frac{1}{4} t^2)^m$$

$$= \frac{1}{2m+1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{9}{8} \right)^m + \sqrt{2} \left(\frac{3}{2} \right)^m \right] + \frac{2m}{2m+1} K_{m-1}$$

$$(2-19) \quad K_{\frac{1}{2}} = \log 2 - \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 \log (\sqrt{3}+1)$$

(2-19) と (2-18) から K_m を求め, (2-17) で J_m を

とし (2-16) で I_λ をとし (2-13) で G_λ を求める.

このようにして,

$$(2-20) \quad 1 - F_4(w) = 12 \int_{w/\sqrt{2}}^{\infty} \phi(u) du - 10 \int_{w/\sqrt{3}}^{\infty} \phi(u) du$$

$$+ \frac{12\sqrt{3}}{\pi} (w/\sqrt{3}) \cdot \phi(w/\sqrt{3}) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda-1} (w/\sqrt{3})^{2\lambda-2} \cdot G_\lambda$$

G_λ の表は次に示す:

表-4 (2-20) の係数 G_λ と (2-12) の I_λ の値

λ	G_λ	I_λ
1	5.92968 5660 10^{-2}	5.92968 5660 10^{-2}
2	3.17288 1831 10^{-3}	6.05768 8623 10^{-3}
3	1.62511 3758 10^{-4}	8.64225 1229 10^{-4}
4	7.31747 9883 10^{-6}	1.42710 8216 10^{-4}
5	2.85897 0377 10^{-7}	2.54001 0564 10^{-5}
6	9.77011 1723 10^{-9}	4.72761 3856 10^{-6}
7	2.95578 2471 10^{-10}	9.06666 7346 10^{-7}
8	8.00832 1756 10^{-12}	1.77679 3839 10^{-7}
9	1.96282 2369 10^{-13}	3.53956 3734 10^{-8}
10	4.38964 8484 10^{-15}	7.14272 6659 10^{-9}
11	9.02365 3778 10^{-17}	1.45646 8191 10^{-9}
12	1.71587 2738 10^{-18}	2.79547 8444 10^{-10}
13	3.03470 3423 10^{-20}	6.20522 1132 10^{-11}
14	5.01594 0772 10^{-22}	1.29332 1748 10^{-11}
15	7.78071 9394 10^{-24}	2.70984 1638 10^{-12}

(数値例) $\int_{w_{0.25}}^{\infty} f_4(w) dw = 0.25$ とする $w_{0.25}$ は

求める。

(2-21) $f_4'(w) = -\frac{1}{2} w f_4(w) + \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}} \phi(\sqrt{3}w) \int_{-w/\sqrt{3}}^{w/\sqrt{3}} f(u) du$

$$(2-22) \quad f_4''(w) = -f_4(w) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}w^2\right) - \frac{2}{6}wf_4'(w) \\ + \frac{2}{\pi}\phi\left(\sqrt{\frac{3}{4}}w\right) + \frac{4}{\pi}\phi(w)$$

$$(2-23) \quad w_{0.25} \text{ の } 1 \text{ 近似 } w_{0.25}^{(1)} = 4.0 \text{ とし}$$

$$F_4(w_{0.25}^{(1)} = 4.0) = 0.024183315391$$

$$f_4(w_{0.25}^{(1)} = 4.0) = 0.050352524$$

$$f_4'(w_{0.25}^{(1)} = 4.0) = -0.0914906503$$

$$f_4''(w_{0.25}^{(1)} = 4.0) = 0.1340332522$$

から

$$w_{0.25}^{(2)} = 3.984$$

$$w_{0.25}^{(3)} = 3.984014631$$

$$(2-24) \quad F_4(w_{0.25}^{(3)}) = 0.0249999999802$$

となる。なお、統計数値表 JSA (1972) p61 から

$$w_{0.25} = 3.984$$

である。

(注) Harter (1959) は

$$F_n(w) = n \int_0^\infty dx \phi(x) \left[\int_x^{x+w} \phi(t) dt + \int_{-x}^{-x+w} \phi(t) dt \right]^{n-1}$$

で $n = 2(1)40(5)50(10)100$ の表を与えている。

また Pearson-Hartley (1942) は

$$F_n(w) = \left[\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \phi(t) dt \right]^n + 2n \int_{\frac{w}{2}}^{\infty} \phi(t) \left[\int_{t-w}^t \phi(x) dx \right]^{n-1} dt$$

で $n=2(1)(20)$ の表を与えた。

3. まとめ

収束のよい級数の和を求めるのに、和が求めやすい関数と近似して、残りの部分の級数の収束を速める方法 (Kummer の変換) が [2], [3], [4] の論文では自然に用いられていることが分かる。

(2-10), (2-20) の山の近似式は $n=4$ のときしか使えないが、一たん誰かが作っておけば実用的には便利である。しかし n が大きいときは範囲の分布を級数展開で求める方法はかなり困難である。

附錄 1 (6) の導出

$$\begin{aligned}
 R_2 &= \frac{1}{N!} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)(n+2)\cdots(n+N)} \\
 &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=M+1}^{\infty} \cdot \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \cdot \binom{N}{p} / n + \sum_{n=M+1}^{\infty} \cdot \sum_{p=1}^N (-)^{p-1} \frac{1}{p} \binom{N}{p} / (n+p) \\
 &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \cdot \binom{N}{p} + \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \sum_{n=M+2}^{\infty} \frac{1}{n} \\
 &\quad + \binom{N}{1} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \binom{N}{2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} \binom{N}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \\
 &\quad - \dots \\
 &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} + \sum_{p=2}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \binom{N}{2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} \binom{N}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+3} - \dots \\
 &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} + \frac{1}{M+2} \sum_{p=2}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \\
 &\quad + \sum_{p=2}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \sum_{n=M+2}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \binom{N}{2} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \\
 &\quad + \frac{1}{3} \binom{N}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+3} - \dots \\
 &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} + \frac{1}{M+2} \sum_{p=2}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \\
 &\quad + \sum_{p=3}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{3} \binom{N}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+3} - \dots \\
 &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} + \frac{1}{M+2} \sum_{p=2}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \\
 &\quad + \frac{1}{M+3} \sum_{p=3}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} + \sum_{p=3}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \sum_{n=M+2}^{\infty} \frac{1}{n+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \binom{N}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n+3} - \dots \\
= & \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M+1} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} + \frac{1}{M+2} \sum_{p=2}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \\
& + \frac{1}{M+3} \sum_{p=3}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} + \frac{1}{M+4} \sum_{p=4}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} + \dots + \\
& + \frac{1}{M+N} \sum_{p=N}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \\
= & \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{M+j} \sum_{p=j}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \\
= & \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{j=1}^N \sum_{p=j}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i \binom{j}{M}^i \\
= & \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{i=0}^{\infty} (-)^i \left(\frac{1}{M}\right)^{i+1} \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^p (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} j^i \\
= & \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M} \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^p (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} (-)^i \left(\frac{1}{M}\right)^{i+1} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \sum_{j=1}^p j^i \\
= & \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{M} (-1) \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} (-)^i \left(\frac{1}{M}\right)^{i+1} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^{i+1}}{i+1} + \frac{1}{2} p^i \right. \\
& \left. + \frac{B_2}{2!} i \cdot p^{i-1} + \frac{B_3}{3!} i^{(2)} p^{i-2} + \frac{B_4}{4!} i^{(3)} p^{i-3} + \dots \right\} \\
= & \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{M} + (-) \frac{1}{M^2} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^2}{2} + \frac{p}{2} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-)^2 \frac{1}{M^3} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^3}{3} + \frac{p^2}{2} + B_2 \cdot p \right\} \\
& + (-)^3 \frac{1}{M^4} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^4}{4} + \frac{p^3}{2} + \frac{B_2 \cdot 3}{2} p^2 + B_3 \cdot p \right\} \\
& + (-)^4 \frac{1}{M^5} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^5}{5} + \frac{p^4}{2} + \frac{B_2 \cdot 4}{2!} p^3 + \frac{B_3 \cdot 4 \cdot 3}{3!} p^2 + B_4 \cdot p \right\} \\
& + \dots \\
& + (-)^N \frac{1}{M^{N+1}} \sum_{p=1}^N (-)^p \frac{1}{p} \binom{N}{p} \cdot \left\{ \frac{p^{N+1}}{N+1} + \frac{p^N}{2} + \frac{B_2 \cdot N}{2!} p^{N-1} + \frac{B_3 \cdot N^{(2)}}{3!} p^{N-2} + \dots \right. \\
& \quad \left. + \frac{B_N \cdot N^{(N-1)}}{N!} \cdot p \right\}
\end{aligned}$$

$$= z'', \quad \sum_{p=1}^N (-)^p \binom{N}{p} = -1$$

$$\sum_{p=1}^N (-)^p p^k \binom{N}{p} = 0 \quad (1 \leq k \leq N-1 \text{ の整数})$$

$$\sum_{p=1}^N (-)^p p^N \binom{N}{p} = (-)^N N!$$

を用いると

$$\begin{aligned}
R_2 = \left[\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right] &= \frac{1}{M} - \frac{1}{M^2} \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{M^3} (-B_2) - \frac{1}{M^4} (-B_3) + \frac{1}{M^5} (-B_4) - \\
&+ (-)^N \frac{1}{M^{N+1}} \cdot \left\{ \frac{(-)^N N!}{N+1} - B_N \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{M} + \frac{1}{M^2} B_1 + \frac{1}{M^3} B_2 + \frac{1}{M^4} B_3 + \frac{1}{M^5} B_4 + \dots + \frac{1}{M^{N+1}} B_N \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{M} - \frac{1}{M^2} B_1 - \frac{1}{M^3} B_2 + \frac{1}{M^4} B_3 - \frac{1}{M^5} B_4 + \dots + \frac{1}{M^{N+1}} \left\{ (-)^{N+1} B_N \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{N!}{N+1} \right\} \right] \\
&= \frac{\left(\frac{N!}{N+1} \right)}{M^{N+1}} + O\left(\frac{1}{M^{N+1}} \right)
\end{aligned}$$

附録 2 $\sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{M^{n+1}}$ の誘導

$$(2-1) \quad \Gamma(\Delta) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\Delta-1} du$$

$$u = nx \quad \text{と おく と}$$

$$(2-2) \quad \frac{1}{n^{\Delta}} = \frac{1}{\Gamma(\Delta)} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{\Delta-1} dx$$

$$\text{したがって}$$

$$\begin{aligned} (2-3) \quad \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{\infty} e^{-nx} x dx \\ &= \int_0^{\infty} x dx \cdot \sum_{n=M+1}^{\infty} e^{-nx} \\ &= \int_0^{\infty} x dx \cdot e^{-(M+1)x} [1 + e^{-x} + e^{-2x} + \cdots] \\ &= \int_0^{\infty} x dx \cdot \frac{e^{-(M+1)x}}{1 - e^{-x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2-4) \quad \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} &= \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} \left\{ \frac{x}{e^x - 1} \right\} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

$$(2-5) \quad B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

$$B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \quad \cdots \quad \text{など}$$

$$B_{2n+1} = 0 \quad (n=1, 2, \cdots)$$

$$(2-5) \text{ を 用 い て,}$$

$$\begin{aligned}
 (2-4) \quad \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \int_0^{\infty} x dx \cdot e^{-Mx} \frac{1}{x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \int_0^{\infty} dx e^{-Mx} x^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{M^{n+1}} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{M^{n+1}}
 \end{aligned}$$

附録 3 林 桂一の (8) の誘導

$$\begin{aligned}
 (3-1) \quad \frac{1}{n^3} + \frac{\frac{4}{3}}{(n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3} \\
 &= \frac{(n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3 + \frac{4}{3} n^3}{n^3 (n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3} \\
 &= \frac{1}{n^3} + \frac{\frac{1}{6}}{(n+1)^3} + \frac{(-\frac{4}{3})}{(n+2)^3} + \frac{\frac{1}{6}}{(n+3)^3} \\
 &\quad + \frac{(-\frac{3}{4})}{(n+1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(n+3)^2} \\
 &\quad + \frac{2}{n+1} + \frac{(-4)}{n+2} + \frac{2}{n+3}
 \end{aligned}$$

と部分分数にわけられる。したがって

$$\begin{aligned}
 (3-2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} + \frac{\frac{4}{3}}{(n+1)^3 (n+2)^3 (n+3)^3} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^3} + \frac{(-1)}{(n+1)^3} + \frac{\frac{7}{6}}{(n+1)^3} + \frac{(-\frac{7}{6})}{(n+2)^3} + \frac{(-\frac{1}{6})}{(n+2)^3} + \frac{\frac{1}{6}}{(n+3)^3} \right. \\
 &\quad + \frac{(-\frac{3}{4})}{(n+1)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(n+2)^2} + \frac{(-\frac{3}{4})}{(n+2)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(n+3)^2} \\
 &\quad \left. + \frac{2}{n+1} + \frac{(-2)}{n+2} + \frac{(-2)}{n+2} + \frac{2}{n+3} \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1^3} + \frac{\frac{7}{6}}{2^3} + \frac{(-\frac{1}{6})}{3^3} - \left(\frac{\frac{3}{4}}{2^2} + \frac{\frac{3}{4}}{3^2} \right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

$$= 1 + \frac{262}{2^4 \cdot 3^4} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{100}{2^4 \cdot 3^4}$$

$$= \frac{9}{8} + \frac{25}{2^2 \cdot 3^4}$$

附録 4 (10) の誘導

$$R_3 = -\frac{4}{3} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3(n+2)^3(n+3)^3}$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{(-\frac{1}{6})}{(n+1)^3} + \frac{\frac{8}{6}}{(n+2)^3} + \frac{(-\frac{1}{6})}{(n+3)^3} \right]$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{\frac{3}{4}}{(n+1)^2} + \frac{(-\frac{3}{4})}{(n+3)^2} \right]$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{-2}{n+1} + \frac{4}{n+2} + \frac{(-2)}{n+3} \right]$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{(-\frac{1}{6})}{(n+1)^3} + \frac{\frac{1}{6}}{(n+2)^3} + \frac{\frac{1}{6}}{(n+2)^3} + \frac{(-\frac{1}{6})}{(n+3)^3} \right] + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^3}$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{\frac{3}{4}}{(n+1)^2} + \frac{(-\frac{3}{4})}{(n+2)^2} + \frac{\frac{3}{4}}{(n+2)^2} + \frac{(-\frac{3}{4})}{(n+3)^2} \right]$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{\infty} \left[\frac{(-2)}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \frac{(-2)}{n+3} \right]$$

$$= \left\{ \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^3} \right\} - \frac{1}{6} \left[\frac{1}{(M+2)^3} - \frac{1}{(M+3)^3} \right] + \frac{3}{4} \left[\frac{1}{(M+2)^2} - \frac{1}{(M+3)^2} \right] \\ - 2 \left[\frac{1}{M+2} - \frac{1}{M+3} \right]$$

$$\begin{aligned}
(4-1) \quad & \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^3} \\
&= \sum_{t=M+3}^{\infty} \frac{1}{t^3} = \sum_{t=M+3}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(3)} \int_0^{\infty} e^{-tx} \cdot x^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 dx \cdot \frac{e^{-(M+3)x}}{1 - e^{-x}} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x dx \cdot e^{-(M+2)x} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} \int_0^{\infty} x e^{-(M+2)x} dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot B_n}{(M+2)^{n+2}}
\end{aligned}$$

2. 例 11.2

$$\begin{aligned}
R_3 &= \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{(M+2)^2} + \frac{(-\frac{1}{2})}{(M+2)^3} + \frac{\frac{1}{4}}{(M+2)^4} + \frac{0}{(M+2)^5} + \frac{(-\frac{1}{12})}{(M+2)^6} + \frac{0}{(M+2)^7} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1}{12}}{(M+2)^8} + \frac{0}{(M+2)^9} + \frac{(-\frac{3}{20})}{(M+2)^{10}} + \frac{0}{(M+2)^{11}} + \frac{\frac{5}{12}}{(M+2)^{12}} + \dots \right\} \\
&\quad + \left[\frac{(-\frac{1}{2})}{(M+2)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{(M+2)^3} + \frac{-\frac{1}{4}}{(M+2)^4} + \frac{0}{(M+2)^5} + \frac{\frac{1}{12}}{(M+2)^6} + \frac{0}{(M+2)^7} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(-\frac{1}{4})}{(M+2)^8} + \frac{\frac{2}{3}}{(M+2)^9} + \frac{(-\frac{5}{4})}{(M+2)^{10}} + \frac{2}{(M+2)^{11}} + \frac{-\frac{35}{12}}{(M+2)^{12}} + \dots \right] \\
&= \frac{(-\frac{1}{6})}{(M+2)^8} + \frac{\frac{2}{3}}{(M+2)^9} + \frac{-\frac{7}{5}}{(M+2)^{10}} + \frac{2}{(M+2)^{11}} + \frac{-\frac{5}{2}}{(M+2)^{12}} + \dots
\end{aligned}$$