

コロケート格子有限体積法による マクスウェル流体の構成式の離散化手法

永野 浩大¹・鳥生 大祐²・牛島 省³

¹学生員 京都大学大学院 工学研究科 修士課程 (〒 615-8540 京都府京都市西京区京都大学桂)

E-mail: nagano.koudai.33a@st.kyoto-u.ac.jp

²正会員 博 (工) 京都大学 学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail: toriu.daisuke.8v@kyoto-u.ac.jp

³正会員 工博 京都大学 学術情報メディアセンター (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail: ushijima.satoru.3c@kyoto-u.ac.jp

本研究では、粘弾性流体を表すモデルの一つである非圧縮性マクスウェル流体の基礎方程式を2次元コロケート格子上で有限体積法により計算する手法を検討した。著者らが提案したコロケート格子を用いる非圧縮性ニュートン流体の解法を改良し、マクスウェル流体の構成式を基礎方程式に加え、運動方程式中の応力項を計算する際の流速の参照点を空間的にコンパクトにする手法を提案し、非物理的な数値振動を抑制できることを数値実験により確認した。さらに、流速の発散を制御可能なC-HSMAC法を圧力解法に用いることにより、通常のSMAC法で発生する可能性のある応力の数値振動を抑制できることを確認した。最後に、簡単な数値実験を通じて、提案された計算手法によりマクスウェル流体の弾性的な挙動を定性的に再現できることを示した。

Key Words: FVM, collocated grid, discretization method, Maxwell fluid, constitutive equation, numerical stability, C-HSMAC method

1. 緒言

粘弾性流体¹⁾の挙動を予測、制御することは様々な分野で重要な研究課題となっており^{2),3)}、その数値解法に関しても多くの研究がなされている^{4),5),6)}。本研究では、粘弾性流体を表すモデルの一つである、非圧縮性の上対流マクスウェルモデル¹⁾(以下、マクスウェル流体と表記)の数値解法について検討を加える。

本研究の解法は、コロケート格子有限体積法による非圧縮性ニュートン流体の解法⁷⁾を改良したものであり、マクスウェル流体の構成式を新たに基礎方程式に加え、この構成式から計算される応力を運動方程式に用いて流体計算を行う。マクスウェル流体の構成式中には応力の時間微分項が存在するため、構成式を離散化し、応力を時間発展させる必要がある。既往の研究では、粘弾性流体の応力を計算する際、応力を弾性応力と粘性応力に分解するEVSS法⁸⁾がよく用いられる^{9),10),11)}。EVSS法では、運動方程式中の粘性項を計算する際、隣接する計算セル上に定義される流速のみを用いて運動方程式中の粘性項を計算することが可能である。しかし、EVSS法を用いると、構成式中に流速勾配の時間微分項や流速勾配の移流項などが加わり、計算が複雑になる。この複雑さを回避するため、本研究ではEVSS法を用いず、運動方程式中の応力項が参照する流速の空間分布がコンパクトになる手法を提案する。また、平行平板

間で流速の初期値に振動を与える数値実験を行い、提案手法の数値安定性を検討する。

本研究では、非圧縮性マクスウェル流体の計算において、圧力解法が計算結果に与える影響についても検討を行う。非圧縮性流体の計算では、流速の発散 $D(=\partial u_j/\partial x_j)$ が十分0に近い値となる必要がある。そこで、 D をしきい値により制御するC-HSMAC法¹²⁾と、そのような制御がなされない従来のSMAC法¹³⁾を用いて正方形閉領域内のマクスウェル流体の一部に外力を作用させる数値実験を行い、緩和時間を変えた場合の流速や流速の発散 $D(=\partial u_j/\partial x_j)$ 、応力成分などの時間変化を比較する。加えて、新たに提案した構成式の離散化手法とC-HSMAC法を用いて、平行平板間のマクスウェル流体に非定常な外力を作用させる数値実験を行う。この数値実験により、緩和時間を変化させた場合に得られる非圧縮性マクスウェル流体の粘弾性的な挙動について考察を加える。

2. 数値解析手法

(1) 基礎方程式

非圧縮性マクスウェル流体の基礎方程式は非圧縮条件、運動方程式、構成式である。まず、構成式は次のように表される¹⁾。

$$\tau_{ij} + \lambda \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - (L_{ik} \tau_{jk} + \tau_{ik} L_{jk}) \right] = \mu (L_{ij} + L_{ji}) \quad (1)$$

ここで、 t は時間、 x_i は直交座標系における座標成分、 λ は緩和時間、 μ は粘性係数、 u_i は流速ベクトルの x_i 成分、 τ_{ij} は x_i に直交する面に働く x_j 方向の応力成分、 L_{ij} は $\partial u_i / \partial x_j$ で表される速度勾配テンソル成分である。また、特に断りがない場合、本文に示す式中的変数の添え字には総和の規約を用いる。式 (1) から分かるように、マクスウェル流体の構成式は τ_{ij} の時間微分項を含むため、本研究では式 (1) を時間方向に離散化し τ_{ij} を時間発展させる。

本研究では有限体積法を用いて離散化するため、基礎方程式をそれぞれ積分形で表示する。非圧縮マクスウェル流体の基礎方程式である、非圧縮条件、運動方程式、構成式をそれぞれ積分形で表示すると、以下のようになる。

$$\int_S u_j n_j ds = 0 \quad (2)$$

$$\int_V \frac{\partial u_i}{\partial t} dv = \int_V f_{vi} dv - \int_S u_i u_j n_j ds - \frac{1}{\rho} \int_S p n_i ds + \frac{1}{\rho} \int_S \tau_{ji} n_j ds \quad (3)$$

$$\int_V \tau_{ij} dv + \lambda \left[\int_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} dv + \int_S \tau_{ij} u_k n_k ds - \int_V (L_{ik} \tau_{jk} + \tau_{ik} L_{jk}) dv \right] = \mu \int_V (L_{ij} + L_{ji}) dv \quad (4)$$

ここで、 V は検査体積、 S は V の境界面、 ρ は密度、 p は圧力、 n_i は S 上の外向き単位法線ベクトルの x_i 成分、 f_{vi} は体積力の x_i 成分である。なお、本研究において基礎方程式中の変数は全て無次元化されているものとする。

(2) 構成式の離散化手法

運動方程式 (3) を計算する際には、計算セル境界上に空間内挿された応力 τ_{ijB} を利用する。本研究では、この τ_{ijB} を求めるための 2 種類の計算手法を示し、それらを比較する。両者を区別するために、便宜的に NCD (Non-Compact Discretization) 法、CD (Compact Discretization) 法と表記する。各計算手法の概要は以下のとおりである。

- NCD 法：図-1 の左図に示すように、セル中心で定義される応力 τ_{ijC}^{n+1} の相加平均をとることでセル境界上の応力 τ_{ijB}^{n+1} を定める。ここで上添え字は時間ステップであり、下添え字は C がセル中心で定義される変数を、 B がセル境界で定義される変数を表す。

- CD 法：図-1 の右図のように、応力 τ_{ijB} をセル境界上で直接計算する項 (R_{ij}) と、セル中心で計算して空間内挿する項 (T_{ij}) に分解する ($\tau_{ijC}^{n+1} = T_{ijC} + R_{ijC}$)。実際の計算では、セル中心で T_{ijC} のみを計算し、これを空間内挿した後に、セル境界上で計算した R_{ijB} を加えることにより、 τ_{ijB}^{n+1} を定める。なお、 T_{ij} と R_{ij} はそれぞれ粘性および弾性に関する項を含み、物理的な意味の上で違いはない。

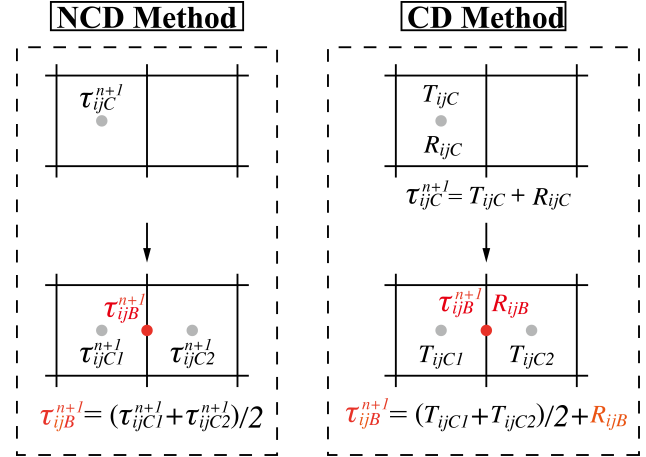


図-1 NCD 法および CD 法による応力 τ_{ijB}^{n+1} の計算手順概要図

ここで、 T_{ij} および R_{ij} は次式のように表される。

$$T_{ijC} = \frac{\lambda}{\lambda + \Delta t} \tau_{ijC}^n - \frac{\lambda \Delta t}{\lambda + \Delta t} C T_{ijC}^n + \frac{\lambda \Delta t}{\lambda + \Delta t} [L_{ijC}^n \tau_{jjC}^n + \tau_{ijC}^n L_{jjC}^n] + \frac{\mu \Delta t}{\lambda + \Delta t} L_{ijC}^n \quad (5)$$

$$R_{ijB} = \frac{\lambda \Delta t}{\lambda + \Delta t} [L_{iiB}^n \tau_{ijB}^n + \tau_{iiB}^n L_{jiB}^n] + \frac{\mu \Delta t}{\lambda + \Delta t} L_{jiB}^n \quad (6)$$

ここで Δt は時間刻み幅、 $C T_{ij}^n$ は保存形式表示された τ_{ij}^n の移流項であり、移流項の計算には一次の風上法¹⁴⁾を用いる。また、式 (5), (6) の右辺の下添え字 i に関しては総和の規約を適用しない。

NCD 法と CD 法を比較すると、 τ_{ijB} の計算方法の違いにより、式 (3) で与えられる運動方程式の応力項に含まれる $\partial R_{ji} / \partial x_j$ を離散化する際に用いる流速の参照点が異なる。まず、簡単のために 1 次元の場合について NCD 法による $\partial R_{ji} / \partial x_j$ の離散化式を示す。

$$\frac{\partial R_{ji(I)}}{\partial x_j} \simeq \frac{\lambda \Delta t}{\lambda + \Delta t} \frac{A_{NCD}}{(2\Delta x_1)^2} + \frac{\mu \Delta t}{\lambda + \Delta t} \frac{B_{NCD}}{(2\Delta x_1)^2} \quad (7)$$

$$A_{NCD} = \tau_{11(I+1)}^n u_{1(I+2)}^n - \tau_{11(I+1)}^n u_{1(I)}^n - \tau_{11(I-1)}^n u_{1(I)}^n + \tau_{11(I-1)}^n u_{1(I-2)}^n \quad (8)$$

$$B_{NCD} = u_{1(I+2)}^n - 2u_{1(I)}^n + u_{1(I-2)}^n \quad (9)$$

ここで I は図-2 のように定義されるセル中心点番号である。上記の離散化式より、NCD 法では $\partial R_{ji}/\partial x_j$ を計算する際に図-2 (a) 中の色付きセル中心点上に定義される流速を参照し、隣接するセル上に定義される流速を参照しないことがわかる。次に、CD 法による $\partial R_{ji}/\partial x_j$ の離散化式は次のように表される。

$$\frac{\partial R_{ji(I)}}{\partial x_j} \simeq \frac{\lambda \Delta t}{\lambda + \Delta t} \frac{A_{CD}}{(\Delta x_1)^2} + \frac{\mu \Delta t}{\lambda + \Delta t} \frac{B_{CD}}{(\Delta x_1)^2} \quad (10)$$

$$A_{CD} = \tau_{11(I+1/2)}^n u_{1(I+1)}^n - \tau_{11(I+1/2)}^n u_{1(I)}^n - \tau_{11(I-1/2)}^n u_{1(I)}^n + \tau_{11(I-1/2)}^n u_{1(I-1)}^n \quad (11)$$

$$B_{CD} = u_{1(I+1)}^n - 2u_{1(I)}^n + u_{1(I-1)}^n \quad (12)$$

上記の離散化式より、CD 法で $\partial R_{ji}/\partial x_j$ を計算する際には、図-2 (b) のように隣接する色付きのセル中心点上に定義される流速を用いていることが分かる。

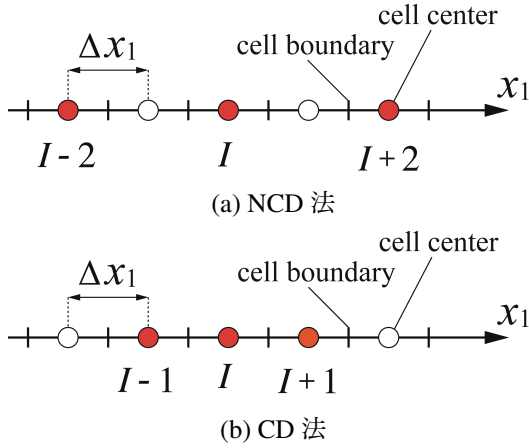


図-2 1次元で $\partial R_{ji(I)}/\partial x_j$ を計算する際の流速の参照点 (色付きセル中心点を参照)

2次元の場合にも同様の手順により、NCD 法および CD 法で $\partial R_{ji}/\partial x_j$ を計算する際の流速の参照点を確認することができる (図-3)。図-3 に示されるように2次元の場合でも CD 法は NCD 法に比べて流速の参照点の空間分布がコンパクトになる。本研究ではこの参照点の違いが数値安定性に与える影響を検討する。

(3) 圧力計算手法

本研究の解法は、コロケート格子を利用する非圧縮性ニュートン流体の解法⁷⁾を改良したものであり、図-4 に示すような手順で計算が行われる。最初に、マクスウェル流体の構成式 (4) を時間方向に離散化して応力計算を行う。次に、運動方程式 (3) を時間方向に離散化した次式により仮の流速 $\hat{u}_i$ を計算する。

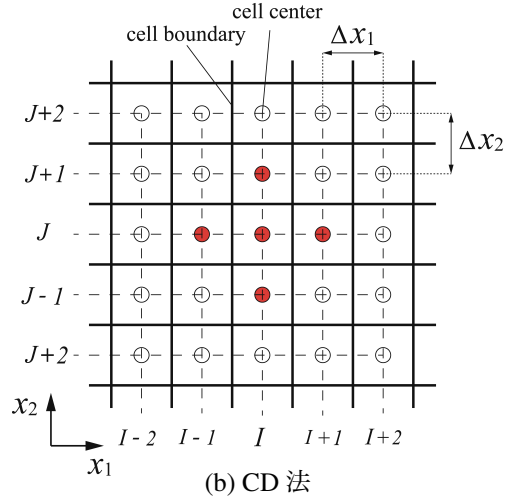
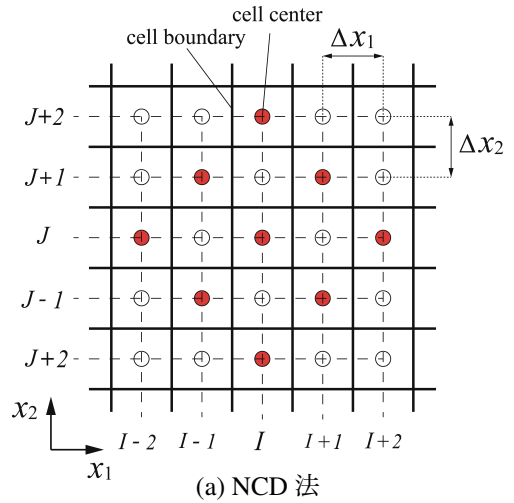


図-3 2次元で $\partial R_{ji}/\partial x_j$ を計算する際の流速の参照点 (色付きセル中心点を参照)

$$\begin{aligned} \hat{u}_i = & u_i^n + f_{vi} \Delta t + C_i^n \Delta t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \Delta t \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} \Delta t + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R_{ji}}{\partial x_j} \Delta t \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 C_i^n は保存形表示された u_i^n の移流項であり、この計算には一次の風上法¹⁴⁾を用いる。

$\hat{u}_i$ の計算後、本研究では C-HSMAC 法¹²⁾に基づき圧力計算、流速の修正、流速の発散の評価が行われる (図-4 中の色付き部分)。C-HSMAC 法¹²⁾における圧力計算式と流速の修正式を以下に示す。

$$\frac{\partial^2 \phi^k}{\partial x_j^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \hat{D}^k \quad (14)$$

$$p^{k+1} = p^k + \phi^k \quad (15)$$

$$\hat{u}_i^{k+1} = \hat{u}_i^k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi^k}{\partial x_i} \Delta t \quad (16)$$

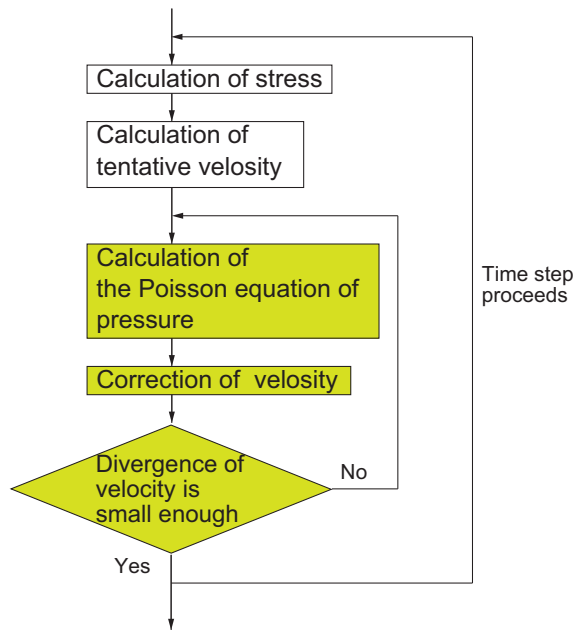


図-4 計算手順概要

ここで、上付き添え字 k は C-HSMAC 法の反復ステップ数、 $\hat{D}^k$ は流速の発散 $\partial \hat{u}_j^k / \partial x_j$ を表す。また、 p^k 、 $\hat{u}_i^k$ 、 ϕ^k の初期値はそれぞれ $p^0 = p^n$ 、 $\hat{u}_i^0 = \hat{u}_i$ 、 $\phi^0 = 0$ である。 ϕ^k は式 (14) を空間方向に離散化して得られる連立一次方程式を解くことで得られ、この ϕ^k を用いて式 (15) および式 (16) より p と $\hat{u}_i$ を更新する。C-HSMAC 法では、計算領域内のすべてのセルにおいて、次式が満たされるまで内部反復が行われる。

$$|\hat{D}^k| < \varepsilon_c \quad (17)$$

ここで ε_c は流速の発散に対する収束判定のしきい値であり、要求する精度に応じて任意の値を設定できる。上式が満足されない場合には、得られた流速を式 (14) の右辺に用いて、次式により更新される連立一次方程式の求解法のしきい値 ε_s^k を用いて、上記の計算を繰り返す。

$$\varepsilon_s^{k+1} = \alpha \varepsilon_s^k \quad (18)$$

ここで、 α は $0 < \alpha < 1$ となるパラメータであり、 ε_s^k の初期値 ε_s^0 には適当な値を設定しておく。既往の研究では、式 (14) を空間方向に離散化し得られる連立一次方程式の求解に Bi-CGSTAB 法を用いた場合もあるが¹⁵⁾、本研究では簡単のため SOR 法を用いる。また、本研究では C-HSMAC 法の有効性を確認するために従来の SMAC 法との比較を行うが、本研究で扱う SMAC 法は上記の C-HSMAC 法の反復計算を行わず、反復回数を 1 とした解法に相当する¹³⁾。

3. CD 法と NCD 法の数値安定性

CD 法と NCD 法の数値的な安定性を比較するために数値実験を行った。計算領域を図-5 に示す。図-5 に示されるように、計算領域は各辺の長さ L が 1.0 の正方形領域で、上下の壁面において流速にはノンスリップ条件を、圧力には $\partial p / \partial x_2 = 0$ を課した。また、左右の境界には周期境界条件を課した。

流速の初期条件は、図-5 に示されるように、 $x_2 = 0.5$ の水平断面 H 上にのみ、大きさが等しく正負が交互に逆となる鉛直方向流速 u_2 を与え、他の領域の流速は 0 とした。なお、 H 上では $|u_2| = 1.0$ とした。各方向の計算セル数は 20×21 、計算の時間増分 Δt は 1.0×10^{-2} とし、CD 法と NCD 法を用いて流れが定常になるまで計算を行った。なお、圧力計算には C-HSMAC 法を用い、 ε_s^0 、 ε_c および α はそれぞれ $\varepsilon_s^0 = 1.0 \times 10^{-6}$ 、 $\varepsilon_c = 1.0 \times 10^{-10}$ 、 $\alpha = 0.1$ とした。

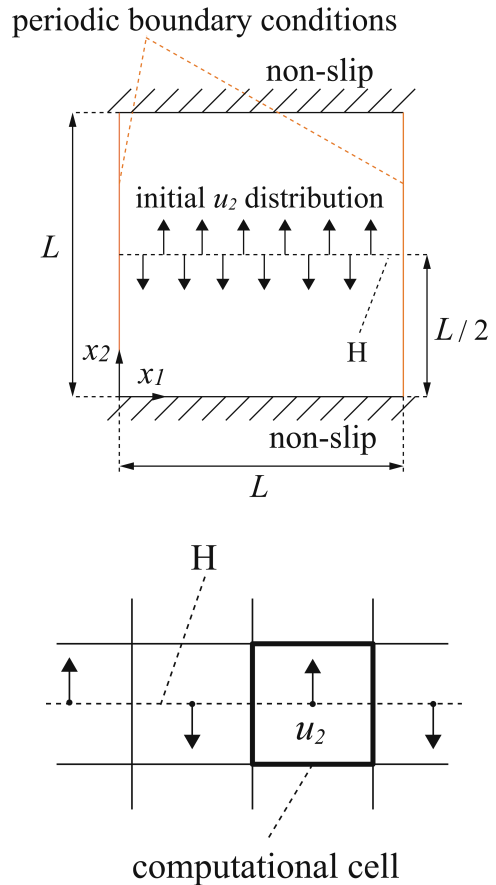


図-5 計算領域と流速の初期条件

図-5 の水平断面 H 上における初期状態の鉛直方向の流速分布を図-6 に、定常状態における鉛直方向の流速分布を図-7 に示す。図-7 に示されるように、CD 法を用いた計算では、粘性の効果により、十分な時間が経過

した後に流速分布はほぼ静止状態となる。これに対し、NCD法を用いた計算では、定常状態においても初期に与えた流速変動が残存する非物理的な流速分布となっている。このため、NCD法では、計算中に発生した流速変動が数値的な不安定性をもたらす可能性がある。

以上のようなCD法とNCD法における数値安定性の違いは、応力項に含まれる R_{ij} を離散化の際に用いる流速の参照点の違いにより生ずると考えられる。図-3に示されるように、CD法において R_{ij} は隣接するセルの流速から計算されるのに対し、NCD法では、隣接するセルではなく、1セル離れた位置の流速を利用する。したがって、NCD法では本計算条件のように波長が計算セル幅の2倍となるような u_2 の振動を与えた場合、各セル中心で評価される流速勾配 ($\partial u_2 / \partial x_1$) が0となり、 R_{ij} に含まれる流速の空間的な変動を適切に計算できないと考えられる。なお、上記の結果を踏まえ、以降の計算には全てCD法を用いることとする。

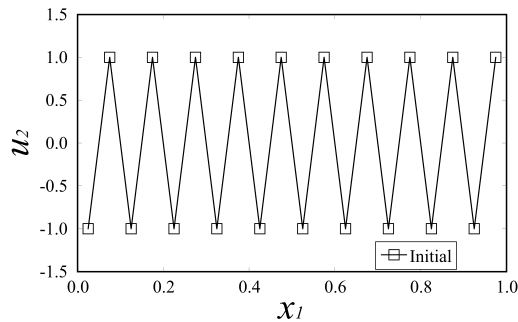


図-6 初期状態における H 上の u_2 の分布

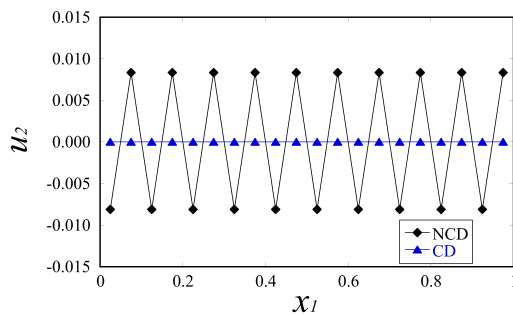


図-7 定常状態における H 上の u_2 の分布

4. マクスウェル流体に対する C-HSMAC法の適用性

C-HSMAC法の適用性を確認するために、ニュートン流体 ($\lambda = 0$) またはマクスウェル流体で満たされた

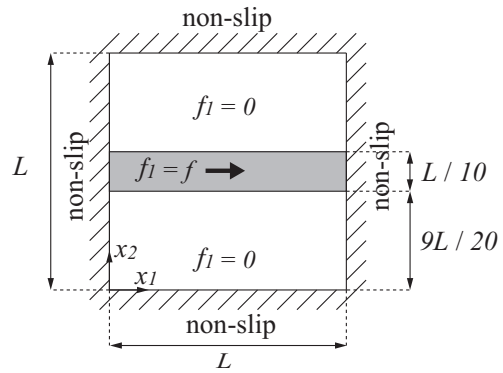


図-8 正方形の閉領域と外力の空間分布

正方形の閉領域の一部に外力を作用させて流れを発生させる数値実験を行った。圧力計算には、C-HSMAC法とSMAC法を利用した。

図-8に示されるように、計算領域は、 $L = 1.0$ の正方形領域とした。すべての壁面において流速にはノンスリップ条件を、圧力には $\partial p / \partial x_1 = 0$ および $\partial p / \partial x_2 = 0$ を課した。また、図-8に示されるグレーの領域にのみ x_1 軸正の向きに外力 $f = 1.0$ を与えた。グレーの領域の幅は $2\Delta x_2$ であり、各方向の計算セル数は 20×20 とした。ニュートン流体とマクスウェル流体で密度と粘性係数は同様の値を設定し、 $\rho = 1.0$ 、 $\mu = 1.0 \times 10^{-2}$ とした。また、SOR法とC-HSMAC法のしきい値と関連するパラメータは、それぞれ $\varepsilon_s^0 = 1.0$ 、 $\varepsilon_c = 1.2 \times 10^{-6}$ 、 $\alpha = 0.10$ であり、時間増分 Δt は 2.0×10^{-2} とした。本計算ではSMAC法とC-HSMAC法を比較するため、手法の違いが顕著となるようなしきい値を与えた。なお、初期状態 $t = 0$ で流体は静止しているものとする。

上記の計算条件のもとで、圧力計算にSMAC法とC-HSMAC法を用いて、それぞれ $t = 20$ まで計算した。まず $\lambda = 0.10$ のマクスウェル流体の計算結果について考察を行う。計算領域中心付近の点 P ($x_1 = 0.525$ 、 $x_2 = 0.525$) 上の $D (= \partial u_j / \partial x_j)$ 、 u_1 、 τ_{11} の時間変化を、順に図-9、10、11に示す。図-9に示されるように、圧力計算にC-HSMAC法を用いることで D の値がすべての時刻で十分0に近い値となっており、非圧縮条件である式(2)が高精度に満足されていることがわかる。一方、SMAC法ではC-HSMAC法に比べて D の値が大きく振動し続ける結果となった¹⁶⁾。また、図-10および図-11に示されるように、C-HSMAC法では、時間経過とともに u_1 と τ_{11} は一定値に収束していき、 $t = 20$ では定常状態が得られた。一方、SMAC法では u_1 や τ_{11} の値が振動し続ける結果となった。以上より、本計算条件で妥当な定常解を得るためには非圧縮条件である式(2)を高精度に満足させることが重要であり、マクス

ウェル流体に対しても D の値を調整できる C-HSMAC 法が有効であると考えられる¹⁶⁾。

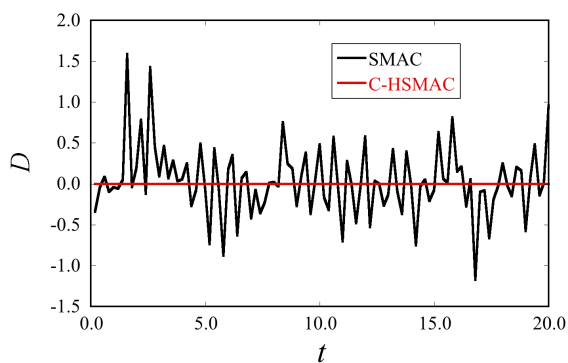


図-9 点 P における D の時間変化¹⁶⁾ ($\lambda = 0.10$)

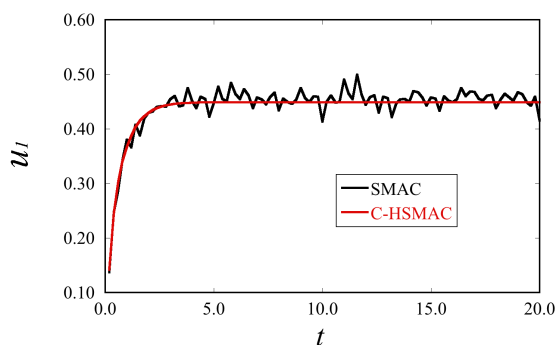


図-10 点 P における u_1 の時間変化¹⁶⁾ ($\lambda = 0.10$)

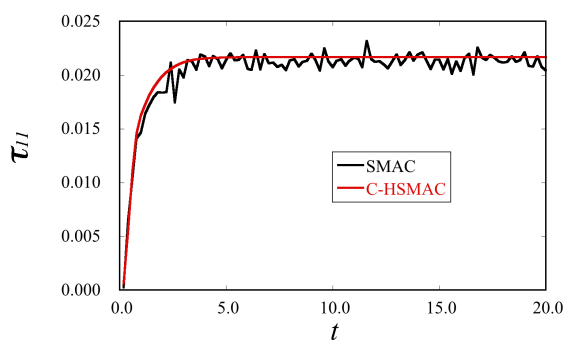


図-11 点 P における τ_{11} の時間変化¹⁶⁾ ($\lambda = 0.10$)

SMAC 法について、圧力ポアソン方程式 (14) を解く SOR 法のしきい値 ε_s と D の関係を考察するため、 ε_s を表-1 に示すように Case 1 から Case 4 の 4 種類用意し、 λ の値 0 から 0.10 まで 0.01 ずつ変えて、計 44 ケースの計算を行った。計算により得られた、 $|D|_{ave}$ と λ の関係を図-12 にまとめて示す。ここで $|D|_{ave}$ は流速の発散の絶対値 $|D|$ の $t = 0$ から $t = 20$ までの時間平均を表す。 $|D|_{ave}$ を計算する際には $t = 0.2$ から 20 まで 0.2 間隔で得られる計 100 個の $|D|$ を用いた。図-12 に示すように、SOR 法のしきい値である ε_s の値を小さくすることで $|D|_{ave}$ の値は小さくなることが確認された。特に、Case 4 に関しては $|D|_{ave}$ のオーダーは 1.0×10^{-6} と C-HSMAC 法により計算された値と同様に、十分小さな値となった。また、 λ と $|D|_{ave}$ の関係に着目する

と、 λ の値が 0 の場合、すなわちニュートン流体の場合と比べて、 λ の値が 0 でない粘弾性流体場合の方が $|D|_{ave}$ の値が大きくなる傾向があることが分かる。

このように、SMAC 法においても、計算条件に応じてしきい値を適切に設定することで、C-HSMAC 法と同様に妥当な数値解を得ることは可能である。しかし、SMAC 法において適切な SOR 法のしきい値 ε_s を設定するためには、計算条件が変わるたびに上記のような試行を複数回行う必要がある。なお、計算時間については計算セル数や連立一次方程式の解法などに依存することや、SMAC 法ではしきい値の設定に複数回の試行を要することから、C-HSMAC 法と SMAC 法で一概に比較することはできない。一方で SMAC 法において、連立一次方程式の求解で極端に小さなしきい値を与える方法も考えられるが、計算セル数や時間刻み幅などの計算条件によっては SOR 法や Bi-CGSTAB 法の反復計算が収束しないなどの問題が発生する可能性がある。以上を踏まえると、 λ や計算セル数などの計算条件を変えた場合にも試行が不要であるという点において、C-HSMAC 法はマクスウェル流体の計算に対し有用であると考えられる。

表-1 Case 1 から 4 で設定した ε_s

	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
ε_s	1.0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-10}

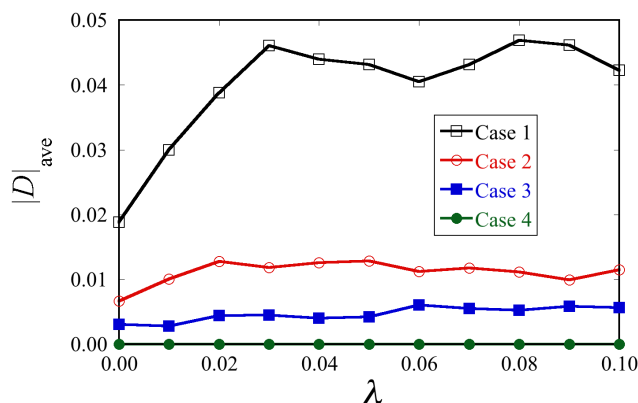


図-12 SMAC 法における λ と $|D|_{ave}$ の関係

5. マクスウェル流体の粘弾性数値実験

マクスウェル流体は、緩和時間 λ の値が大きいほど弾性的な挙動を強く示す。本研究では、CD 法と C-HSMAC 法によりマクスウェル流体の基本的な挙動を再現できることを確認するために、 $\lambda = 0, 5, 10$ として以下の数値実験を行った。

図-13 に示されるように、計算領域は $L = 1.0$ の正方形の領域で上下の壁面において流速にはノンスリップ条件を、圧力には $\partial p / \partial x_2 = 0$ の条件を用いた。また、

左右の境界面は周期境界条件とした。初期状態 ($t = 0$) において, x_1 軸正の向きに外力 $f_1 = 1.0$ を計算領域全体に作用させ, $t = 150$ で $f_1 = 0$ とした。なお, 初期状態で流体は静止しているとする。また, SOR 法と C-HSMAC 法のしきい値および関連するパラメーターはそれぞれ $\varepsilon_s^0 = 1.0 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_c = 1.0 \times 10^{-10}$, $\alpha = 0.10$ であり, 各方向の計算セル数は 21×21 , 時間増分は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ である。上記の条件のもとで, $\lambda = 0$ (ニュートン流体) および $\lambda = 5, 10$ とした条件で, それぞれ $t = 400$ まで計算を行った。なお, λ 以外の物性値は, 各条件で同様とし, $\rho = 1.0$, $\mu = 1.0 \times 10^{-2}$ である。

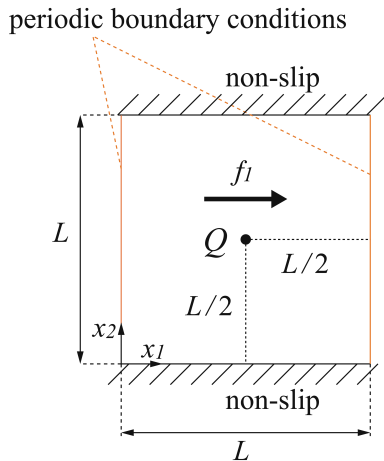


図-13 マクスウェル流体の計算領域

計算領域中心付近の点 Q ($x_1 = x_2 = 0.50$) における u_1 の時間変化を図-14 に示す。図-14 から分かるように, λ の値によらず u_1 は $t = 150$ まで約 12.4 に収束し, $t = 150$ で外力を 0 とした後は 0 に収束する。一方, それぞれの値に収束するまでの過程は λ の値によって異なる。 $\lambda = 0$ (ニュートン流体) では, u_1 は上記の値に単調に収束するが, $\lambda = 5, 10$ において u_1 は $t = 20.8$ 付近で最大値をとった後, 外力を 0 とする $t = 150$ まで減衰振動しながら約 12.4 に収束し, $t = 150$ で外力を 0 とした後は $t = 171$ 付近で値が負の最小値となり, その後は減衰振動しながら 0 に収束する。なお, λ の値が大きいほど弾性的な性質が強くなるため, $\lambda = 10$ では $\lambda = 5$ の場合よりも点 Q における u_1 の振動の振幅が大きくなる結果となった。加えて, 図-15, 図-16, 図-17 に $t = 21, 120, 171$ における u_1 の鉛直分布を示す。ここで, $x_1 = 0.5$ の断面を参照した。図-15 に示すように $t = 21$ においては λ が大きいほど弾性の影響により一時的に u_1 の値も大きくなる。また, 図-16 より定常時では λ によらず u_1 の分布はほぼ一致することがわかる。図-17 では, λ が大きければ弾性の影響により一時的に u_1 が負の値をとる結果が確認された。以上の結果より, CD 法と C-HSMAC 法を用いる計算法によ

り, マクスウェル流体の基本的な粘弾性的な挙動が定性的に再現できたと考えられる。

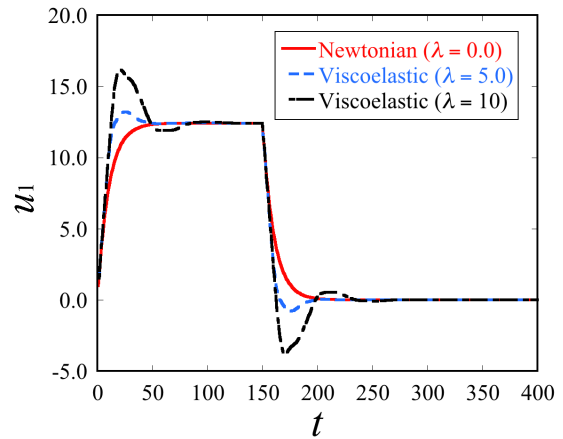


図-14 点 Q における u_1 の時間変化

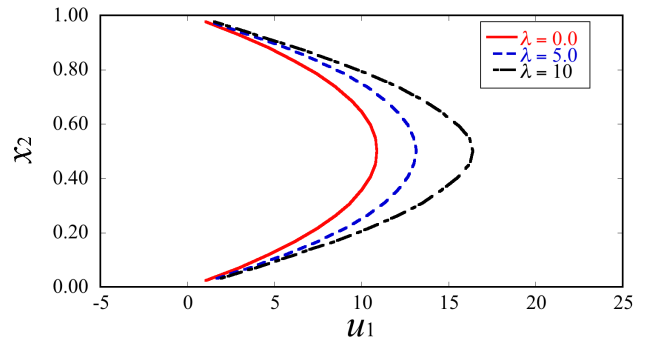


図-15 u_1 の鉛直分布 ($t = 21, x_1 = 0.5$)

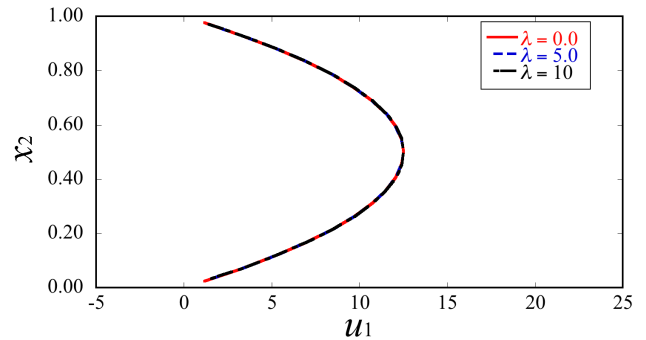


図-16 u_1 の鉛直分布 ($t = 120, x_1 = 0.5$)

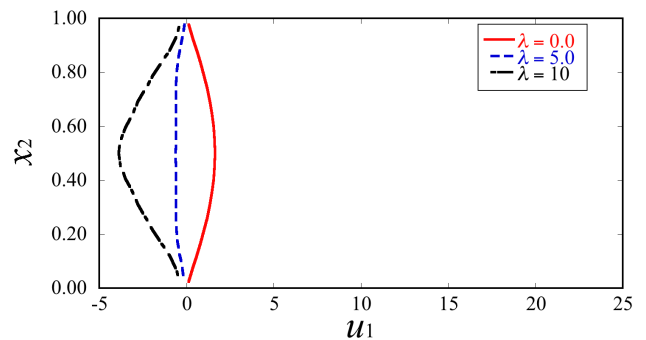


図-17 u_1 の鉛直分布 ($t = 171, x_1 = 0.5$)

6. 結言

本研究では、コロケート格子有限体積法により非圧縮性マクスウェル流体を計算する手法について検討を行った。応力の離散化手法については、NCD法で見られた数値不安定性が本研究で提案するCD法により回避できることが確認され、マクスウェル流体の計算ではCD法が有効であることが示された。

圧力解法については、流速の発散値 D を制御可能な圧力計算手法であるC-HSMAC法を用いることにより、ニュートン流体とマクスウェル流体の両者について流速および応力を精度よく計算できることが示された。なお、SMAC法でも圧力ポアソン方程式を離散化して得られる連立1次方程式の求解におけるしきい値を適切に設定すれば、C-HSMAC法と同様の結果を得ることが可能であるが、計算条件が変わると何度かの試行が必要となる可能性があることも合わせて示した。

提案したCD法とC-HSMAC法を用いて平行平板間のマクスウェル流体に対して、時間的に変化する外力を作用させた場合に生じる流れの数値実験を行った。その結果、 λ を大きくするほどマクスウェル流体の弾性的な挙動が強くなることを確認し、提案手法によりマクスウェル流体の弾性的な挙動を定性的に再現できることを示した。

参考文献

- 1) 中村喜代次：非ニュートン流体力学，コロナ社，1997。
- 2) Liu, J., Sun, Y., Wang, W. and Chen, J.: Using the viscoelastic parameters to estimate the glass transition temperature of asphalt binders, *Construction and Building Materials*, Vol. 153, pp. 908–917, 2017.
- 3) 小池迪夫, 田中享二, 富坂崇：アスファルトルーフィングの粘弾性物性, 日本建築学会論文報告集, Vol. 329, pp. 1–7, 1983.
- 4) Sasml, G. P.: A finite volume approach for calculation of viscoelastic flow through an abrupt axisymmetric contraction, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 56, pp. 15–47, 1995.
- 5) Chinesta, F. and Chaidron, G.: A characteristics strategy for solving advection equations in 2D steady flows containing recirculating areas, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 192, pp. 4217–4235, 2003.
- 6) Norouzi, M., Varedi, S., Maghrebi, M. and Shahmaradan, M.: Numerical investigation of viscoelastic shedding flow behind a circular cylinder, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 197, pp. 31–40, 2013.
- 7) 牛島省, 竹村雅樹, 瀬津家久：コロケート格子配置を用いたMAC系解法の計算スキームに関する考察, 土木学会論文集, No. 719/II-61, pp. 11–19, 2002.
- 8) Rajagopalan, D., Armstrong, R. C. and Brown, R. A.: Finite element methods for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a Newtonian viscosity, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 36, pp. 159–192, 1990.
- 9) Chun-quan, F., Hai-mei, J., Hong-jun, Y., Yu-chi, S. and Ye-ming, Z.: Finite Volume Method for Simulation of Viscoelastic Flow through a Expansion Channel, *Journal of Hydrodynamics*, Vol. 21, pp. 360–365, 2009.
- 10) Missirlis, K., Assumacopoulos, D. and Mitsoulis, E.: A Finite Volume Approach in the Simulation of Viscoelastic Expansion Flows, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 78, pp. 91–118, 1998.
- 11) Norouzi, M., Varedi, S., Maghrebi, M. and Shahmaradan, M.: Numerical investigation of viscoelastic shedding flow behind a circular cylinder, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 197, pp. 31–40, 2013.
- 12) 牛島省, 奥山洋平, 竹村雅樹, 瀬津家久：3次元一般座標系における圧力場の並列計算法の提案, 水工学論文集, Vol. 47, pp. 385–390, 2003.
- 13) 梶島岳夫：乱流の数値シミュレーション, 養賢堂, 1999.
- 14) Zhang, Q. and Cen, S.: *Multiphysics Modeling*, Elsevier, 2016.
- 15) 牛島省, 山田修三, 藤岡奨, 瀬津家久：3次元自由水面流れによる物体輸送の数値解法(3D MICS)の提案と適用性の検討, 土木学会論文集 B, Vol. 62, pp. 100–110, 2006.
- 16) 永野浩大, 鳥生大祐, 牛島省：非圧縮粘弾性流体の圧力解法, 計算工学講演会論文集, Vol. 23, , 2018.

(2018. 6. 22 受付)

DISCRETIZATION METHOD FOR CONSTITUTIVE EQUATION OF MAXWELL FLUID ON COLLOCATED GRID SYSTEM BY FINITE VOLUME METHOD

Kodai NAGANO, Daisuke TORIU and Satoru USHIJIMA

In this study, numerical methods for the basic equations of the Maxwell fluid, which is one of the viscoelastic fluids, were investigated on the two-dimensional collocated grid system by the finite volume method. On the basis of the numerical method proposed by the authors previously, that for the stress terms in the momentum equations were proposed in this study. By the proposed numerical method, the stress terms are calculated with the spatially compact velocity distribution, and it was demonstrated by the numerical experiments that the method can avoid the unphysically oscillated results. Additionally, for the pressure calculation, the C-HSMAC method which controls the divergence of the velocity was applied to the Maxwell fluid and in the numerical experiments it was shown that the method prevented the numerical oscillation of stresses which may happen by using the SMAC method. Furthermore, the proposed method was applied to the numerical experiments in which the elastic character is dominant. As a result of the computations, it was demonstrated that the proposed method and the C-HSMAC method enable to qualitatively predict the elastic behaviors of the Maxwell fluid.