

## 大きなデータに対する非線型波動方程式の散乱理論

三重大大学教育学部 肥田野 久二男 (Kunio Hidano)  
 Department of Mathematics  
 Faculty of Education  
 Mie University

研究代表者の太田さんから、上記表題で講演するするようにと依頼がありまして、ありがたく講演させていただきました。非線型波動方程式の散乱問題とその周辺で得られてきた結果を踏まえて、今後に関心のある手法の開発により解かれてほしいと期待する未解決問題をここに書き留めたいと思います。

考える方程式は

$$(NLW) \quad \square u + f(u) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^{1+n}$$

です。ここで  $\square = \partial_t^2 - \Delta$  として、 $n$  で空間次元を表しています。  $u: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{C}$  で

$$(1) \quad f(u) = \lambda |u|^{p-1} u$$

またはより自然に

$$(2) \quad f(u) = \sum_{j=1}^2 \lambda_j |u|^{p_j-1} u, \\ 1 < p_1 < p_2 \leq 1 + \frac{4}{n-2} \quad (< \infty, n = 1, 2)$$

です。

非線型項の影響により波の散乱が生じることを、時刻  $\pm\infty$  におけるエネルギーノルムでの解の漸近形を比較することで論じます。波動作用素の存在とその完全性を示すことが問題になります。望月 [13], 小澤 [19] が大家による非線型散乱理論の解説書です。英語の解説書でしたら, Ginibre [2], Strauss [24] 等が挙げられます。無論, Ginibre と Velo, および小澤徹先生とその共同研究者の一連の論文が最高の教科書であることはいふまでもありません。最近では中西賢次さんの NLW, NLS, NLKG に対するエネルギー空間での未解決問題を解いた一連の仕事や NLS の修正波動作用素

の存在を大きな初期値に対して解いた結果が注目されます。さらには孤立波解を含む散乱過程をエネルギー空間で記述した理論も現れました。また Bourgain の仕事以後に急速に発展した、エネルギー空間よりも広い空間での時間大域解の散乱理論を扱う高岡秀夫さんとその共同研究者の理論も注目されます。2 階に限らず、4 階の NLKG (Nonlinear Beam Equation) に対する Levandoski と Strauss の仕事も面白いと思います。

このように非線型散乱問題は、まさに理論の発展の真っ只中にあります。ここでは私自身も一時関係していた、長い研究の歴史を持つ (NLW) に対する散乱問題を扱います。時計の針を戻すようなことにならなければよいと心配しますが、解かれてもよい問題でありながら依然として未解決のままである問題が多く残されていることを改めて認識していただければと思います。

前述の通りに、論ずるべき問題は波動作用素の存在とその完全性です。

**問題** エネルギー空間  $\dot{H}_2^1 \times L^2$  に属する  $(\varphi, \psi)$  を  $t = 0$  での値とする自由解  $u_+(t)$  を与えておき、エネルギーノルムで  $t \rightarrow +\infty$  とするときそれに漸近する (NLW) の解の存在と一意性を考えます。

Pecher は  $f(u)$  が (1) で

$$n = 3, 4, 5, \quad p = 1 + \frac{4}{n-2}$$

の場合にこの問題を肯定的に解決しました [21]。後に Ginibre と Velo により、この結果は任意の  $n \geq 3$  で成立することが示されています [7]。彼らは実質的に小さな解に対する散乱問題 (Low-energy Scattering) を解いたのです。これらは良い仕事です。「良い」と述べたのは、後に中西さんのエネルギークラスでの (NLW) の散乱理論の礎にもなっています [18]。決定的仕事 (基準は大きなデータに対する波動作用素の存在とその完全性をきちんとしめすこと) の出発点なので「良い」仕事だと言っているのです。

さて波動方程式  $\square u = 0$  のエネルギー空間は  $\dot{H}_2^1 \times L^2$  という斉次空間です。その斉次性故に、(NLW) の解析をエネルギー空間で実行するためには方程式にもスケール不変性が必要とされて、単独べき非線型項 (1) で  $p = 1 + 4/(n-2)$  の場合のみが解析の対象になっています。

ところで (NLW) の散乱問題を扱った最初の論文はおそらく Strauss [22] でしょう。 $f(u) = q(t, x)u^3$  または  $f(u) = q(x)u^3$  ( $q$  は何らかの意味で減衰するよい関数) とい

う非線型項についての論文はそれ以前にありました。  $u^3$  を扱う理由は [22] に述べてあります。ひとつには物理の側面から意味をもつある双曲型方程式が 3 次の非線型項をもち、その単純化されたモデルとして (NLW) は意味をもつ。また数学の面からも  $u^3$  の方程式はさまざまな場面で例外的な扱いを必要として興味深い事もある。ほかにもいくつか述べてあります。 (NLW) に対してよく何の意味があるのですか、という人がいます。私の意見を書いておきます。 (NLW) の漸近挙動を解析するために共形エネルギーの方法 ( $L^2$  の方法, abc の方法の一つです) やいわゆる Strichartz 型評価と呼ばれる時空評価式を駆使する  $L^p$  の方法が生まれました。前者は方程式の幾何学的対称性を利用する考え方といえますし、後者は方程式の基本解の評価を利用するという発想です。この二つの考え方がその後の非線型波動方程式の解析の基本になっていることは [24] で Strauss が冒頭にこの 2 つを解説することから始めている事よりうなずけます。非線型波動の研究の華やかな発展の生みの親である (NLW) を過去の遺産として片付ける前に、(NLW) に関して証明されるべき問題を整理して一つでも解けるものは解いておき、その後の発展は次の世代にバトンタッチするという姿勢は大事だと思います。そもそも「何の意味があるのか」わからず、そのときは注目されなくても、あとになってからその重要性が認められた例は多いのが数学だという意見を否定する人は少数でしょう。空間 3 次元で (NLW) を (1) で考えるとき  $\lambda > 0, p > 5$  とすると方程式の分類上エネルギー空間に関して super critical になって弱解の存在はいえませんがその一意性を示せません。現在の技術ではできませんが、将来に肯定的でも否定的でも答えが見つければ、ミレニアム問題であるナビエ・ストークス方程式の初期値問題の一意時間大域可解性の解決に役立つかもしれないことを否定できる人はいないですよ。そのようなことを引き合いにだすまでもなく (NLW) にまつわる諸問題（ただし由緒正しいと自分が信じるもの）を前の世代から受け継ぎ現在の技術を駆使して何か結果を前進させて次の世代にまわすという姿勢をなくしてはいけないと私は考えます。いまなお (NLW) を解析することは意味があるというのが私の立場です。

散乱問題に関しては由緒正しい姿勢はやはり波動作用素の存在とその漸近完全性に取り組むということです。Strauss はその論文 [22] の中で (NLW) を主に (1) で扱い  $n = 3, \lambda > 0, 3 < p < 5$  の場合に波動作用素と散乱作用素がなめらかな関数からなる空間上で定義されることを示しています。詳細は [22] の定理 4.8 を参照してください。現在から眺めてみると波動作用素の定義域と値域をきちんと特徴付けていな

い不満はありますが初期のころですから。

Strauss のこの結果はよい結果です。なぜなら一つには散乱理論は初期値に小さいという仮定をしないで考えるものだという基準を明確にしてくれましたし（彼自身“Global Scattering”がお気に入りの一つと述べています）もう一つには技術の面で共形エネルギーが半線型の問題で時間減衰と散乱問題を考える上で大変に有効だということを教えてくれているからです。共形エネルギーの方法はもともとは Morawetz が外部領域における線型の散乱理論の構築において用いた考え（[16, 17]）を半線型の問題に応用したと Strauss はその論文中に述べています。技術の点で Strauss 自身

“We feel that the question of decay has merely been broached and that much remains to be discovered by more powerful methods yet unknown”

と述べています。その後にはベクトル場法の発展 [11, 12] と Strichartz 型評価の導入 [25] と整備があり、これらが現在では非線型波動方程式の解析の必需品になっていることは先に述べた通りです。

この共形エネルギーを用いて解の時間減衰を研究した論文には他に Pecher [20], Ginibre and Velo [5, 6] があります。[5] の §1 によれば

$$\Sigma = \{(\varphi, \psi) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) : \|(\varphi, \psi)\|_{\Sigma} < \infty\}$$

$$\|(\varphi, \psi)\|_{\Sigma}^2 := \|\varphi\|_{L^2}^2 + \|\langle x \rangle \nabla \varphi\|_{L^2}^2 + \|\langle x \rangle \psi\|_{L^2}^2$$

とし (NLW) を (1) で考えるとき

$$n \geq 2, \lambda > 0, \frac{4}{n-1} < p-1 < \frac{4}{n-2}$$

の仮定のもとで  $\Sigma$  上での漸近完全性が示されると証明なしで述べてあります。NLS で擬共形エネルギーを使って散乱理論を作った彼らの有名な力作 [3] での方法を使えばよいということです。

注意 [1] では (NLW) を (1) で扱い

$$n = 3, \lambda > 0, p = 3$$

の場合に  $\Sigma$  の上での波動作用素の漸近完全性が示されています。Conformal Compactification の方法が用いられています。この方法だと (NLW) を (1) で考えるときに  $n = 3, p < 3$  の場合は共形変換したあとの方程式が面倒になり有り難味がなくな

りますし,  $n = 3, p > 3$  の場合は変換後の方程式に対する Strichartz 型評価の代替物が無いためにやはり変換して考える有り難味がありません. 単独べきで  $n = 3, p = 3$  の場合だけがちょうど上手く取り扱えています. Conformal Compactification に頼らない方法を発展させる必要があるわけです.

Ginibre と Velo のこの論文で得られていた結果と残念ながら証明なしで述べてあることを少しでも進展させることができないかと思ひまして私は論文 [9, 10] を書きました. この 2 本の論文の技術的に新しい側面は共形エネルギーの方法と Strichartz 型評価による方法を融合させたところです. (NLW) を (2) で考えます.

$$\begin{aligned} n = 3, 4, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 > 0, p_*(n) < p_1 < p_2 \leq 1 + \frac{4n}{(n-2)(n+1)}, \\ n = 5, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 > 0, p_*(5) < p_1 < p_2 \leq 2 \end{aligned}$$

のときに波動作用素の漸近完全性が  $\Sigma$  上で成立します. ここで  $p_*(n)$  は 2 次方程式  $(n-1)p^2 - (n+2)p - 1 = 0$  の大きい方の解で, [23] の定理 14 の小さなデータに対する散乱理論に現れました. この  $n = 3, 4$  の結果は Ginibre と Velo はわかっていた結果だと思います. ただし  $n = 5$  の私の結果は, Ginibre と Velo の論文には現れない手法に依りますから本質的に新しいと断言します.

[10] で得られた  $\Sigma$  の上での波動作用素の存在に関する結果は, Ginibre と Velo の仕事を完全に上回る部分があります. 詳しくは

$$\begin{aligned} n = 3, 4, 1 + \frac{3}{n-1} < p_1 < p_2 \leq 1 + \frac{4}{n-2} \\ n = 5, 1 + \frac{4}{n} < p_1 < p_2 \leq 2 \end{aligned}$$

ならば  $t = 0$  での初期値を  $\Sigma$  にもつ自由解を与えて, それに時刻無限大で漸近する (NLW) の解の存在 (ただし十分大きい時間に対して存在する解のこと) を示すことができます. 縮小写像の原理に依りまして, ここでは非線型項の係数  $\lambda$  の符号に対する仮定は必要ありません. 複素係数でも構いません.  $n = 3$  の場合の  $p_1 > 1 + 3/2$  という条件を緩めることは難しいです (cf §9 of [9]). 他方 Ginibre と Velo の論文 [2]

の 87 ページと [5] の 224 ページによると, (NLW) を (1) で考えるとき

$$n \geq 2, p_{\text{mm}}(n) < p < 1 + \frac{4}{n-2}$$

( $p_{\text{mm}}(n)$  は 2 次方程式  $n(n-1)p^2 - (n^2 + 3n - 2)p + 2 = 0$  の大きい方の解)

と仮定すると,  $t = 0$  での初期値を  $\Sigma$  にもつ自由解を与えて, それに時刻無限大で漸近する (NLW) の解の存在 (ただし十分大きい時間に対して存在する解のこと) を示すことができると証明なしで述べてあります. 証明の詳細を知ることができないのが残念です. 初期値の空間  $\Sigma$  を別の空間にした仕事ならあります [14, 15].  $1 + 3/2 < p_{\text{mm}}(3)$ ,  $1 + 4/n < p_{\text{mm}}(n) < p_*(n)$  に注意します.

$\Sigma$  上での散乱問題については次の 3 つが未解決です.

#### 問題 1

$$1 + \frac{4}{n} \leq p_1 < p_2 \leq 1 + \frac{4}{n-2}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 > 0$$

とするときの  $\Sigma$  上の波動作用素の存在.

$1 + 4/n$  という一見 (NLW) には不可解な数は  $\Sigma$  から初期値をとるときのコシー問題の適切性に関連しています. [5] の命題 2.3 中の条件 (2.31) のためです.

#### 問題 2

$$p_*(n) < p_1 < p_2 \leq 1 + \frac{4}{n-2}, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 > 0$$

とするとき,  $\Sigma$  上での波動作用素の漸近完全性.

問題 2 の解決は, 特に  $n = 3$  の場合に  $f(u) = |u|^2 u + |u|^4 u$  に対する漸近完全性の解決をもたらしてくれて, ここまでできてもおかしくはないと思います.

**問題 3** 問題 2 に関連して  $\lambda_1 < 0$  に符号をかえるときの解の挙動について.

$\lambda_2 > 0$  ですから, 解の有限時間内の爆発は大きな初期値に対しても起きません.

散乱問題と密接に関連して

**問題 4** (NLW) を (1),  $n = 3$  で考えます.  $p < 3$ ,  $\lambda > 0$  とします.  $t = 0$  で初期値を  $\Sigma \cap (H^2 \times H^1)$  からとります. 解は  $H^2$  解になりますから, ソボレフの定理から  $L^\infty$  解でもあります. この解が

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-1}) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

をみたすかどうかを問題にします. 初期値に小ささを仮定しないで解の一樣ノルムでの減衰オーダーを調べた論文は  $n = 3$ ,  $3 \leq p < 5$  の場合に Strauss [22], von Wahl

[26] があります.  $p < 3$  の場合は Pecher の仕事 [20] がありますが, 彼が得た減衰レートは  $t^{-1}$  と比べてかなりわるく問題 4 はいまだにきちんと解かれていません. ただし

$$p_*(3) < p < 3, \lambda > 0$$

を仮定するときに

$$(3) \quad \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} = O(t^{-1+\varepsilon}) \quad (t \rightarrow +\infty)$$

を示すことならばできます.  $\varepsilon$  は任意の正数です.

ところで問題 4 に関しては, NLS で類似の問題を扱った Hayashi and M. Tsutsumi [8] の Remark 6.2 で

“For the nonlinear wave equation, an analogous result to Theorem 6.2 can be obtained by the simple combination of the results in Klainerman [16], Pecher [20], [21], and Glassey and Pecher [10] (see also [17], [25]).”

と述べてあります. 文献番号は [8] の中のものを指します. 残念ながら, 彼らが述べる “the simple combination” とは如何にして実現されるのかが私にはわかりません. ここは詳しく解説してほしかった箇所です. 簡単ではないと思うからです. それができると確かに問題 4 はきちんと解かれると思います. そのためには何か由緒正しい手法が必要なのではなかろうかと私は思います. 念のために一言付け加えますが (3) を示すためには Klainerman の不等式 [11, 12] と Pecher の仕事 [20] を一切用いていません.

## 参考文献

- [1] J. C. Baez, I. E. Segal and Z.-F. Zhou, *The global Goursat problem and scattering for nonlinear wave equations*, J. Funct. Anal. **93** (1990), 239–269.
- [2] J. Ginibre, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear wave equations*, in “Spectral and Scattering Theory and Application”, pp. 83–103, Adv. Stud. Pure Math. **23**, Kinokuniya, Tokyo, 1994.
- [3] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations I, II*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–32, 33–71.

- [4] J. Ginibre and G. Velo, *The global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation*, Math. Z. **189** (1985), 487–505.
- [5] J. Ginibre and G. Velo, *Conformal invariance and time decay for non linear wave equations. I*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **47** (1987), 221–261.
- [6] J. Ginibre and G. Velo, *Conformal invariance and time decay for nonlinear wave equations. II*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **47** (1987), 263–276.
- [7] J. Ginibre and G. Velo, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear wave equations*, Comm. Math. Phys. **123** (1989), 535–573.
- [8] N. Hayashi and M. Tsutsumi,  *$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ -decay of classical solutions for nonlinear Schrödinger equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A **104** (1986), 309–327.
- [9] K. Hidano, *Scattering problem for the nonlinear wave equation in the finite energy and conformal charge space*, J. Funct. Anal. **187** (2001), 274–307.
- [10] K. Hidano, *Conformal conservation law, time decay and scattering for nonlinear wave equations*, J. Anal. Math. **91** (2003) (in press).
- [11] S. Klainerman, *Uniform decay estimate and the Lorentz invariance of the classical wave equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 321–332.
- [12] S. Klainerman, *Remarks on the global Sobolev inequalities in the Minkowski space  $\mathbb{R}^{n+1}$* , Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 111–117.
- [13] 望月清, 波動方程式の散乱理論. 紀伊国屋数学叢書 23. 1984.
- [14] K. Mochizuki and T. Motai, *The scattering theory for the nonlinear wave equation*, J. Math. Kyoto Univ. **25** (1985), 703–715.
- [15] K. Mochizuki and T. Motai, *The scattering theory for the nonlinear wave equation II*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), 771–790.

- [16] C. S. Morawetz, *The limiting amplitude principle*, Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962), 349–361.
- [17] C. S. Morawetz, *Variations on conservation laws for the wave equation*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **37** (2000), 141–154.
- [18] K. Nakanishi, *Unique global existence and asymptotic behaviour of solutions for wave equations with non-coercive critical nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), 185–221.
- [19] 小澤徹, 非線型シュレディンガー方程式の散乱理論—故岩崎敷久教授に献ぐ—, 1998年日本数学会年会総合講演・企画特別講演アブストラクト, 1–17.
- [20] H. Pecher, *Decay of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, J. Funct. Anal. **46** (1982), 221–229.
- [21] H. Pecher, *Nonlinear small data scattering for the wave and Klein–Gordon equation*, Math. Z. **185** (1984), 261–270.
- [22] W. A. Strauss, *Decay and Asymptotics for  $\square u = F(u)$* , J. Funct. Anal. **2** (1968), 409–457.
- [23] W. A. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 110–133.
- [24] W. A. Strauss, *Nonlinear wave equations*. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., Vol. 73. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [25] R. S. Strichartz, *Restrictions of Fourier Transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations*, Duke Math. J. **44** (1977), 705–714.
- [26] W. von Wahl, *Some decay-estimates for nonlinear wave equations*, J. Funct. Anal. **9** (1972), 490–495.