

リルの分布の確率モデルについて

柏谷 健二・奥田 節夫

ON STOCHASTIC MODEL OF RILL PATTERN

By Kenji KASHIWAYA and Setsuo OKUDA

Synopsis

Development process of rills is modeled with stochastic theory. Branching process and joining process are taken into consideration. Experimental study showed that joining ratio is in proportion to the number of rills and branching ratio is proportional to relative width (width/depth) of rills. From the above results, next equation is derived for the stochastic process of the model.

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \alpha k P_{k+1}(t) + \beta \sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i - 1}{D_i} P_{k-1}(t) - \left\{ \alpha (k-1) + \beta \sum_{i=1}^k \frac{w_i - 1}{D_i} \right\} P_k(t)$$

for $k \approx 1, k \approx N$

Where $P_k(t)$ is the probability that the number of rills will be k at the time t . α, β are joining coefficient and branching coefficient respectively. w_i and D_i are width and depth of i -th rill respectively.

1. はじめに

主として裸地斜面に発生するリルは降水等の影響を受け、合・分流、蛇行等の過程を繰り返しながら発達していくことが知られており、その一部には巨大なガリーへと成長していくものもある。従来から筆者らはリルの呈示するパターンに注目し、その形態的側面の特徴について観察あるいは模型実験を行ってきており、その結果の一部は既に報告している（柏谷ら1974¹⁾、柏谷1976²⁾）。

これまでも流域の水系のパターンに関しては Horton (1945)³⁾ 以来多くの研究が発表されており（例えば、Strahler 1952⁴⁾、Scheidegger 1965⁵⁾、Shreve 1966⁶⁾）、数学モデルとしてはかなり精密なもの（例えば、徳永1974⁷⁾、1975⁸⁾、1977⁹⁾）も研究されてきている。又、裸地斜面の流路についても芦田ら (1975)¹⁰⁾ によってとりあげられ、水理実験を通じて確率モデルが提出されている。

しかしながら、これまで提出されたモデルは主として合流過程を基礎としたものが多く、分流過程に言及したもの（例えば、芦田ら1976¹¹⁾）は多くはないようである。更に、合流過程、分流過程を同時に考慮したモデルは例えば水路の問題に関してグラフ理論を応用したもの（岩佐ら1976¹²⁾）がみられるが、斜面の問題に関しては筆者らの知るかぎりでは少いように思われる。そこで本稿においてはこの二つの過程を同時に考慮した確率モデルについて考察をすすめ、実際の裸地斜面で観察されるリルの発達過程を確率過程として検討を加える。又、本稿で導入した仮定は主に現地の観測及び予備実験から得られたデータに基づいた。

2. モデルの設定

2.1 基本的な考え方

リルの発達過程を表面流による表面浸食と考えると、次のように模式化することにする。

- i) シート・フロー（無数の小条痕の集積）
- ii) 基本条痕の形成

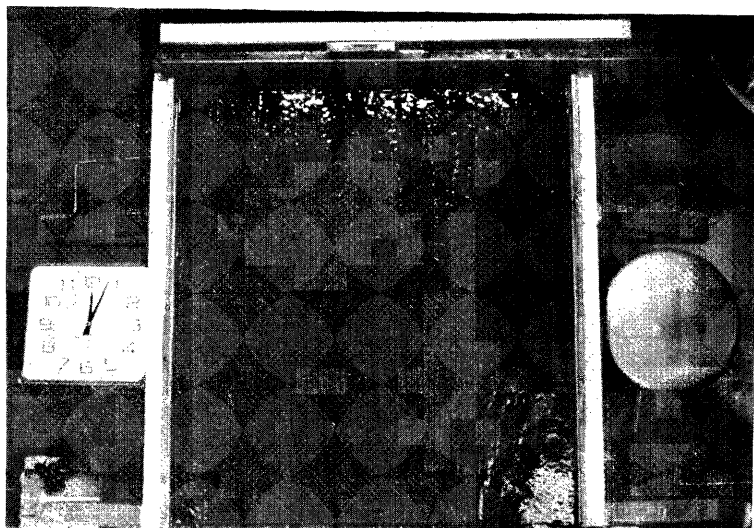


Photo. 1. Streaks on the slope.

iii) 初期リルの形成 (単位流路の形成)

iv) 定常リルの形成

i)→ii) の過程では、いわゆる二次流等が関与すると考えられ^{13), 14)}、水底面に縦筋模様が形成されていく (Photo. 1 参照)。ii)→iii) では下刻作用等により縦筋模様は流路へと形成され、いわば初期リル (単位流路) が出現する。iii)→iv) においては蛇行等による合・分流が顕著であり、やがて形態の時間的変化の比較的少ない定常リルが形成される。

以上のように発達過程を4つの段階に分け議論をすすめる。

2.2 モデル化

ここでは先ず iii)→iv) への発達過程のモデル化をとりあげるが、最初に実験斜面²⁾を想定し、モデル化をすすめることにする (Fig. 1 参照)。

モデルを単純化するためにいくつかの仮定を設けた。

すなわち a) 流量・勾配・土質条件が一定で、一様で均一な平坦な斜面を対象とする。b) 初期リルの数は基本条痕数に比例し、その流路幅、水深はすべて等しい (単位流路の存在)。c) iii)→iv) の過程におけるリルの幅はその中に含んでいる単位流路数に規定される。

以上のような仮定を基本にして、更にいくつかの仮定をつけ加えることにより、次のような単純な確率モデルを構成してみた¹⁵⁾。

今、はじめに N 本の単位流路が存在している iii) の段階の場合から考える (Fig. 2 参照)。

時間 t を経過した時に、上流端からのある距離で、流路数が k 本となっている (Fig. 3 参照) 確率を $P_k(t)$ とす

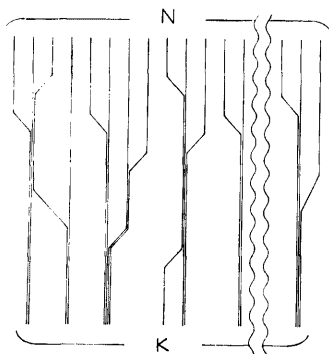


Fig. 1. A plane figure of idealized rills.

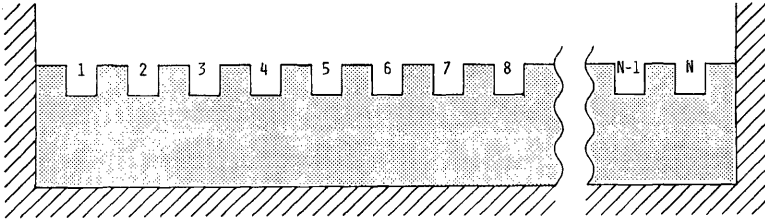
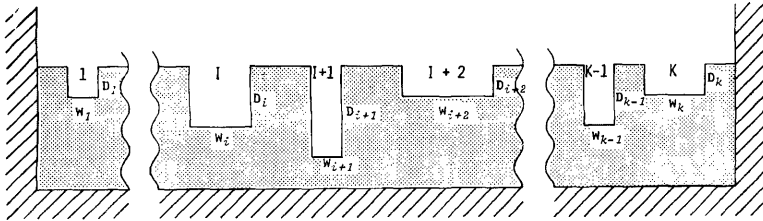


Fig. 2. A cross section of initial idealized rills.


 Fig. 3. A cross section of idealized rills, numbering k

る。

流路数が多ければ多いほど合流しやすいものと考えれば、そこにおいて短い時間 dt に2つの流路が合流する確率は (l 本では合流はありえないことと同時に 2 本より多くは合流しないものと考えれば)

$$P_{\alpha} = \alpha(k-1)dt \quad \dots\dots\dots (1-1)$$

但し、 P_{α} : 合流確率、 α : 合流係数である。

次に流路の分岐は比流路幅 (流路幅 / 水深) に比例するものとする。すなわち水深が浅く流路幅が大きければ分岐しやすく、水深が深く流路幅が小さければ分岐しにくいものと考えれば (単位幅の流路の分岐はありえないことを考慮して) 分岐確率は

$$P_{\beta} = \beta \sum_{i=1}^k \frac{w_i - 1}{D_i} \cdot dt \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

但し、 P_{β} : 分岐確率、 β : 分岐係数、 w_i : 流路 i の流路幅、 D_i : 流路 i は水深である。

上述のことから短い時間 dt における $P_k(t)$ の変化は、 $k+1$ 本の流路が合流して k 本となる確率および $k-1$ 本の流路が分岐して k 本となる確率と k 本の流路が分岐して $k+1$ 本、合流して $k-1$ 本となる確率の差だから

$$\begin{aligned} P_k(t+dt) - P_k(t) &= \alpha k P_{k+1}(t) dt + \beta \sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i - 1}{D_i} \cdot P_{k-1}(t) dt \\ &\quad - \left\{ \alpha(k-1) + \beta \sum_{i=1}^k \frac{w_i - 1}{D_i} \right\} P_k(t) dt \quad \dots\dots\dots (3-1) \end{aligned}$$

すなわち、 $k \approx 1$, $k \approx N$ のとき

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \alpha k P_{k+1}(t) + \beta \sum_{i=1}^{k-1} \frac{w_i - 1}{D_i} P_{k-1}(t) - \left\{ \alpha(k-1) + \beta \sum_{i=1}^k \frac{w_i - 1}{D_i} \right\} P_k(t) \quad \dots\dots\dots (4-1)$$

$k=1$ のとき

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \alpha P_2(t) - \beta \frac{w_1-1}{D_1} P_1(t) \dots\dots\dots (5-1)$$

$k=N$ のとき

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = \beta \sum_{i=1}^{N-1} \frac{w_i-1}{D_i} P_{N-1}(t) - \left\{ \alpha(N-1) + \beta \sum_{i=1}^N \frac{w_i-1}{D_i} \right\} P_N(t) \dots\dots\dots (6-1)$$

ところで Fig. 2, Fig. 3 を参照すれば、初期の全流路幅は（単位流路幅は 1 であることを考えて）、

$$W_{in} = W_N = N \dots\dots\dots (7-1)$$

更に k 本の流路になったときの全流路幅は

$$W_k = \sum_{i=1}^k w_i = \sum_{i=1}^k N_i / D_i \dots\dots\dots (8-1)$$

但し、 W_{in} : 初期の全流路幅、 W_k : 流路数が k 本となったときの全流路幅、 N_i : 流路 i に含まれる単位流路数である。ここで

$$N_1 = w_1 D_1, N_2 = w_2 D_2, \dots\dots\dots, N_i = w_i D_i \dots\dots\dots N_k = w_k D_k \text{ である。}$$

特に、 $D_1 = D_2 = \dots\dots = D_i = \dots\dots = D_k = \bar{D}_k$ の場合、(2-1) は

$$\begin{aligned} P_\beta &= \beta \sum_{i=1}^k \frac{w_i-1}{\bar{D}_k} dt \\ &= \frac{\beta}{\bar{D}_k} \left(\frac{N}{\bar{D}_k} - k \right) dt \\ &= \beta \left(\frac{W_k^2}{W_{in}} - k \frac{W_k}{W_{in}} \right) dt \dots\dots\dots (2-2) \end{aligned}$$

更に (4-1) は

$$\begin{aligned} \frac{dP_k(t)}{dt} &= \alpha k P_{k+1}(t) + \beta \left\{ \frac{W_{k-1}^2}{W_{in}} - (k-1) \frac{W_{k-1}}{W_{in}} \right\} P_{k-1}(t) - \left\{ \alpha(k-1) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(\frac{W_k^2}{W_{in}} - k \frac{W_k}{W_{in}} \right) \right\} P_k(t) \dots\dots\dots (4-2) \end{aligned}$$

(5-1) は

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \alpha P_2(t) - \beta \left(\frac{W_k^2}{W_{in}} - k \frac{W_k}{W_{in}} \right) P_1(t) \dots\dots\dots (5-2)$$

(6-1) は

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = \beta \left\{ \frac{W_{N-1}^2}{W_{in}} - (N-1) \frac{W_{N-1}}{W_{in}} \right\} P_{N-1}(t) - \left\{ \alpha(N-1) + \beta(W_N - N) \right\} P_N(t) \dots\dots\dots (6-2)$$

ここでは (4-1) あるいは (4-2) で示される確率微分方程式を解くことが先決問題となる。しかしながら、それを一般的に解くことは困難であるから、まず最も簡単な例として、水深の変化が無く、流路幅がそのうちに含む単位流路数に比例するような場合について考えてみる。このことは $\bar{D}_k=1$ を意味するから、(4-2) は

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \alpha k P_{k+1}(t) + \beta \{ N - (k-1) \} P_{k-1}(t) - \{ \alpha(k-1) + \beta(N-k) \} P_k(t) \dots\dots\dots (4-3)$$

(5-2)、(6-2) はそれぞれ

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = \alpha P_2(t) - \beta(N-1) P_1(t) \dots\dots\dots (5-3)$$

$$\frac{dP_N(t)}{dt} = \beta P_{N-1}(t) - \alpha(N-1) P_N(t) \dots\dots\dots (6-3)$$

定常状態すなわち $d/dt=0$ の場合について考えれば、(4-3)、(5-3)、(6-3) はそれぞれ

$$\alpha k P_{k+1} + \beta \{N - (k-1)\} P_{k-1} - \{\alpha(k-1) + \beta(N-k)\} P_k = 0 \quad (4-4)$$

$$\alpha P_2 - \beta(N-1)P_1 = 0 \quad (5-4)$$

$$\beta P_{N-1} - \alpha(N-1)P_N = 0 \quad (6-4)$$

今, (4-4) の両辺を α で除し, $\beta/\alpha = m$ と置き, 式を整理すれば

$$m\{N - (k+1)\} P_{k+1} - (k+1)P_{k+2} = m\{N - (k-1)\} P_{k-1} - (k-1)P_k \quad (4-5)$$

(5-4) を考慮すれば, (4-5) は

$$(k-1)P_k = m\{N - (k-1)\} P_{k-1} \quad (9-1)$$

これより

$$P_2 = m(N-1)P_1$$

$$P_3 = \frac{m^2(N-1)(N-2)}{2 \cdot 1} P_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$P_k = \frac{m^{k-1}(N-1)!}{(K-1)!(N-k)!} P_1 \quad (10-1)$$

ここで, l 本の流路が他の流路に合流する確率を $\alpha/\alpha + \beta$ とすれば, $(N-1)$ 本の流路がすべて残りの l 本の流路に合流する確率は

$$P_1 = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^{N-1} = \left(\frac{1}{1+m}\right)^{N-1} \quad (11-1)$$

従って

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{(N-1)!}{(K-1)!(N-k)!} m^{k-1} \left(\frac{1}{1+m}\right)^{N-1} \\ &= \binom{N-1}{k-1} \left(\frac{m}{1+m}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{1+m}\right)^{N-k} \end{aligned} \quad (10-2)$$

これは二項分布である。

更に, 流路本数 k の最も出現確率の高い値を考えれば, 次の条件式を満たすものである。

$$P_{k-1} < P_k > P_{k+1} \quad (12-1)$$

すなわち

$$\frac{m}{1+m} N < k < 1 + \frac{m}{1+m} N \quad (12-2)$$

N が非常に大きいときは

$$k \approx \frac{\alpha}{\alpha + \beta} N \quad (12-3)$$

又, 平均流路幅は

$$\begin{aligned} \bar{W}_i &= \sum_{k=1}^N \frac{N}{k} P_k \\ &= \frac{m+1}{m} \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} \left(\frac{m}{1+m}\right)^k \left(\frac{1}{1+m}\right)^{N-k} \\ &= \frac{m+1}{m} \left\{ \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left(\frac{m}{1+m}\right)^k \left(\frac{1}{1+m}\right)^{N-k} - \left(\frac{1}{1+m}\right)^N \right\} \\ &= \frac{(1+m)^N - 1}{m(1+m)^{N-1}} \end{aligned} \quad (13-1)$$

N が非常に大きいときは, m は正だから

$$\bar{W}_i = \frac{1+m}{m} = \frac{\alpha+\beta}{\beta} \dots\dots\dots (13-2)$$

但し, $\bar{W}_i$: 平均流路幅。

3. モデルの検討

3.1 基本的な考え方および測定方法

前節で導入した合流係数 α , 分流係数 β は上端部からの距離, 勾配, 流量, 土質条件, 経過時間等の物理因子を包含しているものと思われ, その関数関係を知ることが基本的課題と考えられるが, それは容易ではない。

しかしながら上記のような因子との関係を知るために条件を様々にかえた実験あるいは観察を繰り返すことによって, 近似的な関係式の導入は可能であろう。

そこで, この近似的な関係式から, α, β の物理的根拠の推定へ議論をすすめるということを目的として, いくつかの実験的検討を加えたのでその一部を報告する。

尚, 使用した実験装置は別報 (柏谷, 1976)²⁾ で既に報告したものであり, 実験条件は流量 3000cc/min, 勾配 15° と固定し, 土試料は山砂と粘土と水を重量比 19:1:3 で混合したものを使用した。この土試料を用いての実験では表面流出による浸食のみが認められ, 地下水流出及び中間流出は全くないか, あったとしても無視し得る程小さなものであった。

形状変化の測定は主として 35mm カメラで行い, 一部は 8mm シネカメラも併用した。又, 実験開始前と終了後にポイント・ゲージによって斜面形状を測定した。流速は色素を投入することにより, ストップ・ウォッチ及び 8mm シネカメラで測定した。流出土砂量は適当な時間間隔毎に採水を行うことにより測った。

流路数及び流路幅は上流端から 10cm 毎の横断方向で測定し, 分流数及び合流数は 10cm 間毎に測定した。又, 合流数とその間隔の上端部の流路数の比を合流比 (相対合流確率) とし, 分流比 (相対分流確率) としては同様に分流数と流路数の比をとった。この考え方は, 時間平均と位相空間平均が等しい, すなわちエルゴード仮定が成立するものとしているが, 式との対応上議論の余地が残されよう。更に, 短い時間々隔 Δt は 10cm を通過する時間とし, 流速から求めた。尚, 本稿では多少問題もあろうが, 上流端から下流端までの平均到達時間から 10cm 間の平均到達時間を求め, それを Δt として用いた。又, 単位流路としては, 斜面上の条痕がほぼすべて流路となったときの流路を用いた。

3.2 合流確率及び分流確率に関する仮定の検討

合流比と流路数の関係は Fig. 4 で示されるが, 比較的明確な正の相関が得られる。更に条件をかえた別の実験でも同様な結果が得られていることを考えれば (1-1) は妥当性を有すると考えられよう。図中実線で示される回帰直線は次式で与えられる。

$$P_a^* = (3.67 \times 10^{-2} \bar{N}_k - 1.48 \times 10^{-2}) \Delta t \dots\dots\dots (14-1)$$

但し, $\Delta t \approx 0.14$, P_a^* : 合流比 (相対合流確率), $\bar{N}_k$: 平均流路数である。

従って, ここでの相対合流係数 α^* (合流確率が相対的なものである以上, 合流係数に関しても同様のことが言える。それ故, ここで求める値に単に相対的なもの以上のものではない) は約 5.1×10^{-3} ということになる。

次に分流比と比流路幅の関係は Fig. 5 で示されるが, 前記のものより多少相関が悪いが, 正の相関が得られる。

これに関しても他の実験でも同様な傾向が得られ, (2-1) は妥当性を有すると言えそうである。図中実線で示される回帰直線は次式で表わされる。

$$P_\beta^* = \{2.32 \times 10^{-2} (W_k^2/W_{in} - \bar{N}_k \cdot W_k/W_{in}) + 2.59 \times 10^{-2}\} \Delta t \dots\dots\dots (15-1)$$

但し, $\Delta t \approx 0.14$, P_β^* : 分流比 (相対分流確率)

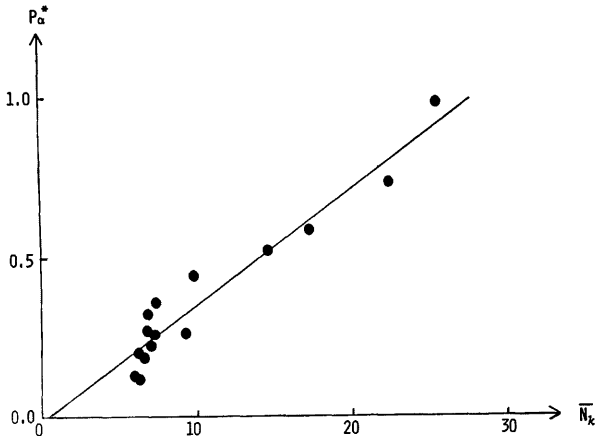


Fig. 4. Relation between joining probability (ratio) and number of rills

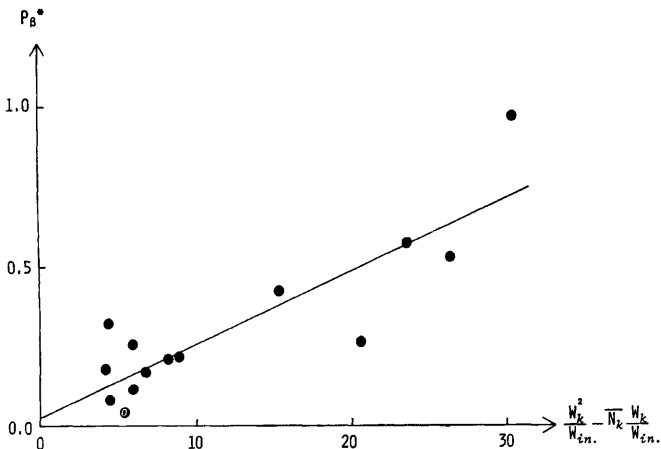


Fig. 5. Relation between branching probability (ratio) and relative width of rills.

ここでの分流係数も前述の合流係数と同様な意味を有するが、一応相対分流係数 β^* は約 3.2×10^{-3} ということになる。

3.3 合・分流比と時間・空間の関係

合流比及び分流比の時間的変化を示すものが Fig. 6(a), Fig. 6(b) であるが、どちらも初期の間の変化は大きい、ある時間、この場合はおよそ10分程、経過した後は余り大きな変化はみられず、きわめて変化が少なくなるように見うけられる。この合・分流比の時間的変化が指数曲線で近似できるか、又ある程度の時間

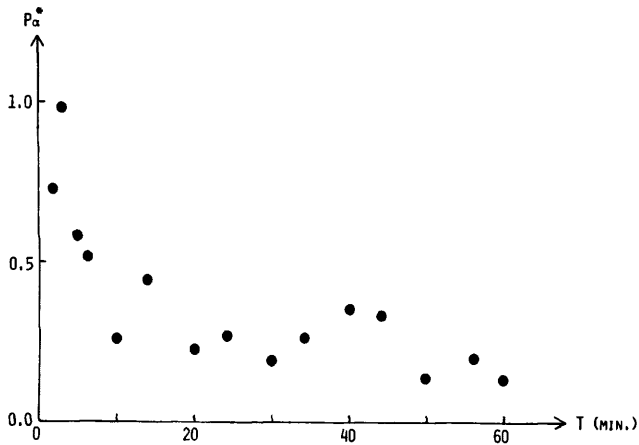


Fig. 6 (a). Variation of joining probability (ratio) with time.

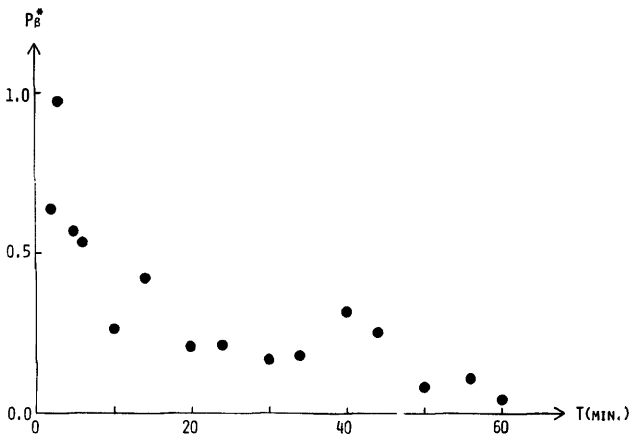


Fig. 6 (b). Variation of branching probability (ratio) with time.

が経過した後は一定とみなし得るかどうかについては議論の余地があり、又、合・分流係数に影響を及ぼす因子となり得る可能性もあるので今後充分検討する必要がある。

又、合・分流比の場所的变化は Fig. 7(a), Fig. 7(b) で示されるが、この実験に限定すれば、あまり特徴的な傾向を認めることはできない。従って、この実験範囲では、合・分流比と上流端からの距離との間には密接な関係は存在しないと言えそうである。

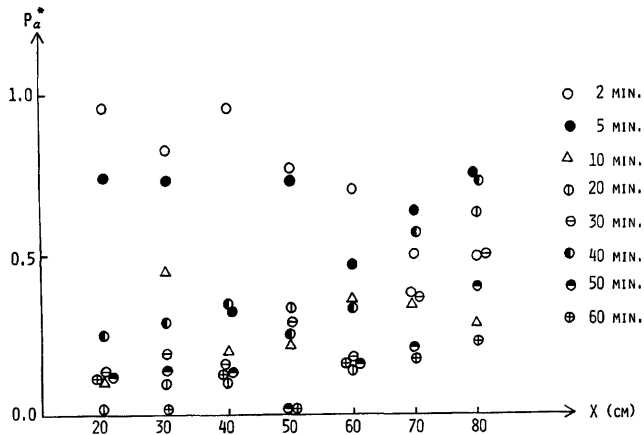


Fig. 7 (a). Variation of joining probability (ratio) with distance from upper end.

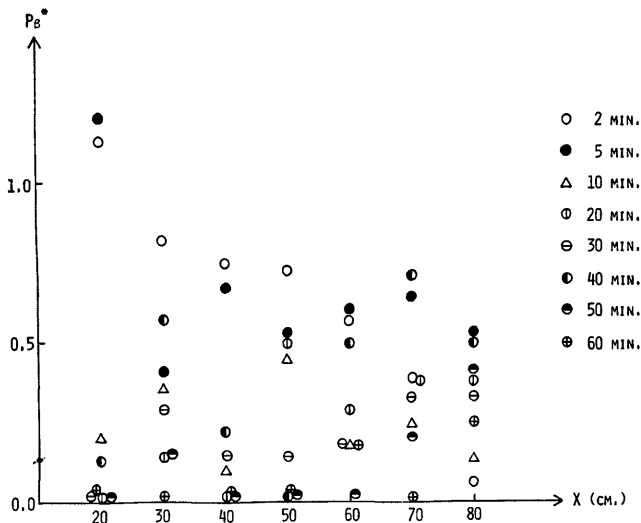


Fig. 7 (b). Variation of branching probability (ratio) with distance from upper end.

4. まとめと問題点

以上のようにリルの発達過程を確率過程としてモデル化し、いくつかの仮定を実験で検証してきたが、次のことが明らかになった。

- 1 合流確率は流路数に比例する。

2 分流域率は比流路幅(流路幅/水深)に比例する。

3 リルの発達過程のモデルを表現する確率微分方程式としては(4-1), (5-1), (6-1)の表現が可能である。更に近似式として(4-2), (5-2), (6-2)の表現が可能であるということである。

又、今後に残された問題点としては第一に確率微分方程式を解くことであり、第二にはエルゴード仮定がこのような現象でも成立するかどうかを検討することである。

更に dt の与え方, 合・分流域比の時間的変化の検討や単位流路の設定方法にも問題が残されている。

これらの問題点に加えて、ここでの検討は一つのケーススタディであり、モデルの当否についてはただちに一般化し得るものではないということである。

又、実験的検証として残されているものは、実験条件をかえた場合における α , β と諸因子の対応関係である。

それらのいくつかは現在データを解析・検討中であり、補足実験の結果も含めて別の機会に報告したい。

更にここで提案したモデルはいわば水源が上流端に集中している場合であるが、実際の斜面では点在しているのが一般的であろう。この相違が本質的なものであるかどうかという問題も含め、実際の斜面に発達するリルあるいはガリーのモデル化には浸透能や雨滴浸食の効果等をも考慮した α , β の特徴を明らかにしておく必要があろう。

最後に、本研究をすすめるにあたり、有益な助言をいただいた京都大学防災研究所地形土壌災害部門の諸氏に謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) 柏谷健二・横山康二・奥田節夫：ガリーの発達に関する計測と考察，地理学評論(47)，1974，pp. 413—425.
- 2) 柏谷健二：地形学における模型実験の意義と問題点—ガリーの発達を一例として—，地理学評論(49) 1976，pp. 497—504.
- 3) Horton, R. E.: Erosional development of streams and their drainage basins—Hydrophysical approach to quantitative morphology, Geol. Soc. America, Bull., Vol. 56, 1945, pp. 275—370.
- 4) Strahler, A. N.: Hypsometric (Area-altitude) analysis of erosional topography, Geol. Soc. America Bull., Vol. 63, 1952, pp. 1117—1142.
- 5) Scheidegger, A. E.: The algebra of stream order numbers, U.S.G.S. Prof. Paper, 525 B, 1965, pp. 187—189
- 6) Shreve, R. L.: Statistical law of stream numbers, Jour. Geol., Vol. 74, 1966, pp. 17—37.
- 7) 徳永英二：組合せ理論による水路水の法則の考察，地理学評論，(47)，1974，pp. 696—708.
- 8) 徳永英二：流域の構成に関する法則お考察，地理学評論，(48)，1975，pp. 351—364.
- 9) 徳永英二：最も確からしい水路網およびそれによって構成される流域の諸パラメーターについて—水路網に関する集合論的考察—，地学雑誌，(86)，1977，pp. 39—53.
- 10) 芦田和男，田中健二：裸地斜面における流路の形成過程に関する研究(1)—流路網の確率的シミュレーションを中心として，京大防災研究所年報第18号 B, 1975，pp. 513—528.
- 11) 芦田和男，沢井健二：裸地斜面における流路の形成過程に関する研究(2)—流路の横断面形状—，京大防災研究所年報第19号 B, 1976，pp. 329—343.
- 12) 岩佐義明，綾 史郎，山本正幸：ネットワーク状水路の水理解析，京大防災研究所年報第19号 B, 1976，pp. 201—219.
- 13) Allen, J. R. L.: Erosional current marks of weakly cohesive mud beds, Jour. Sed. Petrology, Vol. 39, 1969, pp. 607—623.
- 14) Allen, J. R. L.: Bed forms due to mass transfer in turbulent flows: a Kaleidoscope of phenomena, Jour. Fluid Mech., Vol. 49, 1971, pp. 49—63.
- 15) 例えば，Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications Vol. 1, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1957, p. 398 等を参照