

On 3-manifolds with no periodic maps

阪市大理 河内明夫 (Akio Kawauchi)

1. Introduction と主結果. この報告は小林(阪大), 作間(阪市大) 両氏との共同研究の論文[5]の解説であり, 詳細はそれを参照されたい. 断わらない限り, コンパクト連結有向 PL (又は C^∞) 3-多様体を単に 3-多様体と呼ぶことにする. また, 周期写像により, 恒等写像以外の PL (又は C^∞) 周期写像をさすことにする. 我々の目的は, 与えられた 3-多様体の H -cobordism 類の中には, 第 2 交換子群を法として, もとのものに等しい基本群をもつ, 周期写像をもたない, 3-多様体が無数にあること, 及び 3-球面内の link に対し類似のことが成り立つことを示すことである. 2 つの 3-多様体 M_0, M_1 に対し, あるコンパクト有向 PL (又は C^∞) 4-多様体 W で 次の (1), (2), (3) を満たすものがあるとき, それらは H -cobordant であるという (Fig. 1): (1) $-M_0 + M_1 \subset \partial W$, (2) $H_*(W, M_i; \mathbb{Z}) = 0, i=0, 1$, (3) $\partial W - (-M_0 + M_1)$ は ϕ 又は $(\partial M_0) \times [0, 1]$ と同相になる.

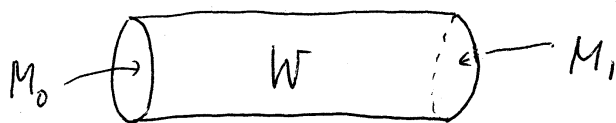


Fig. 1.

群 G に対し, G'' を G の 第 2 交換子群, $G = G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$ を G の lower central series とする.

定理 1. M を 3-多様体とし, ∂M は 2-球面を含んでいないとする ($\partial M = \emptyset$ でもよい). そのとき, Haken 3-多様体 M^* で, 次の (1), (2), (3) を満たすものが 無数に 存在する:
(同相を無視して)

(1) M^* は M に H-cobordant,

(2) epimorphism $\theta: \pi_1(M^*) \rightarrow \pi_1(M)$ で, $\text{Ker } \theta \subset \pi_1(M^*)''$ となるものがある,

(3) M^* は 周期写像をもたない.

(1) のみを満たす Haken 3-多様体 M^* の存在は, ^(Livingston) [16], Mayers [8] により得られていた. また, 周期写像をもたない 3-多様体の例は, Raymond/Tollefson [10], Siebenmann [12], 小林 [6], 作間 [11] で取り上げられた. Stallings [14] の結果を使うと, (1) からわかる:

(1)' すべての q で, $\pi_1(M^*) / \pi_1(M^*)_q \cong \pi_1(M) / \pi_1(M)_q$.

(2)より明らかに次が出る:

$$(2)' \quad \pi_1(M^*)/\pi_1(M^*)'' \cong \pi_1(M)/\pi_1(M)'.$$

Haken 3-次元様体は aspherical 多様体であり, 周期写像を持たない 3-次元様体の知られた例はすべて Haken 多様体だったので, 次を注意する:

定理2. 任意の 3-次元様体 M に対し, 定理1の (1), (2), (3) を満たす non-aspherical 3-次元様体 M^* が無数に存在する.

3-球面 S^3 内の link L に対し, S^3 から L の tube 近傍 $T(L)$ の内部を取り去ったものを L の 外部 といい, $E(L)$ と書く. $H_1(E(L); \mathbb{Z})$ は自由アーベル群で, その基底として L の各連結成分の meridian よりなるものがとれる. $\tilde{E}(L)$ を $\pi_1(E(L)) \rightarrow H_1(E(L); \mathbb{Z})$ の kernel に対応した被覆とする. $H_1(\tilde{E}(L); \mathbb{Z})$ は群環 $\mathbb{Z}[H_1(E(L); \mathbb{Z})]$ 上の加群となる. これを L の Alexander 加群 といい, S^3 内の2つの link L, L' に対し, 局所平坦埋込み $f: S^1 \times [0, 1]_1 + S^1 \times [0, 1]_2 + \cdots + S^1 \times [0, 1]_r \rightarrow S^3 \times [0, 1]$ で, $L \times 0 = f(S^1 \times 0_1 + \cdots + S^1 \times 0_r)$, $L' \times 1 = f(S^1 \times 1_1 + \cdots + S^1 \times 1_r)$ となるものがあるとき, L と L' は cobordant といふ (Fig. 2).

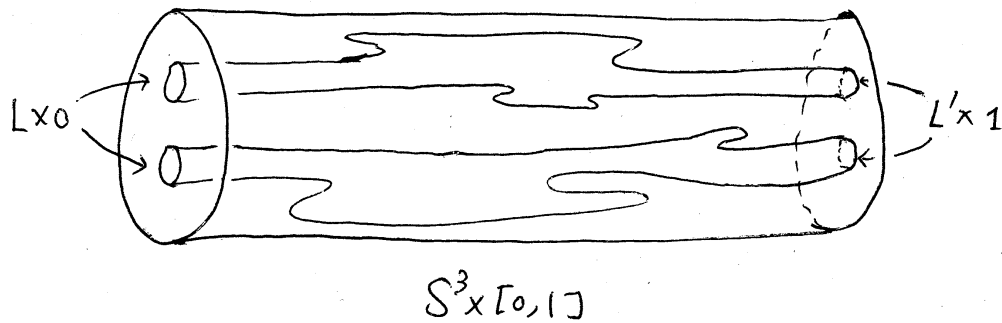


Fig. 2.

定理3. S^3 内の任意の link L (knot の場合も含む) に対し, 次の (1), (2), (3) を満たす prime link $L^* \subset S^3$ が, 外部 $E(L^*)$ の位相型を無視して, 無数に存在する:

- (1) L^* は L に cobordant,
- (2) L^* と L の Alexander 加群は, $H_1(E(L^*); \mathbb{Z})$ と $H_1(E(L); \mathbb{Z})$ の meridian 基底の適当な同一視のもとに, 同型となる,
- (3) $E(L^*)$ は周期写像をもたない.

(1) のみを満たす prime link L^* の存在は Kirby/Lickorish [15], [16], [8] (ただし, [15], [16] は knot のみ) で得られ, (1), (2) を満たす prime link L^* の存在は中西 [20] で得られた.

次の問題は未解決である: 各 $n \geq 2$ に対し, どの 3-多様体も必ず周期 n の写像をもつ 3-多様体に H-cobordant だろうか? どの link も必ず外部が周期 n の写像をもつような link に cobordant だ

どうか? 向き逆転周期写像をもつようなものに H -cobordant になれない 3-次元様体は存在する (例: Poincaré ホモロジー-球面). 外部が向き逆転同相写像をもつような knot に cobordant になれない knot は存在する (例, trefoil knot).

2. 証明に必要な Lemmas. 3-次元様体の一般用語は Jaco [3] による.

Lemma 1. $K \subset S^3$ を knot とし, $A(K \cap E(K))$ を K の meridian annulus とする. もし $E(K)$ が $f(A)=A$ となる周期写像 f をもてば, K は strongly invertible knot か又は strongly negative-amphicheiral knot である.

証明は小林 [6, Theorem 2] の証明の議論に含まれる.

Lemma 2. $K(p, q, r)$ を交叉数 p, q, r の pretzel knot (Fig. 3) で,

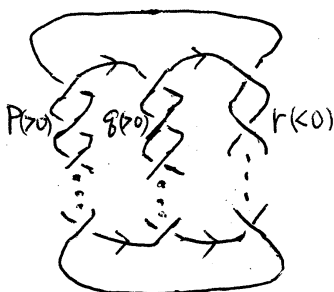


Fig. 3

$|p|, |q|, |r|$ を奇数 > 1 かつ $pq + qr + rp = -1$ なるものとする. (例えば, $p = -2r + 1, q = -2r + 1$, 奇数 $\neq \pm 1$) このとき, $K(p, q, r)$ は次を満たす: (1) Alexander 多項式 1 をもつ, (2) non-invertible である, (3) non-amphicheiral である,

(4) $E(K(p, q, r))$ は non-Seifert, simple 3-次元様体, (5) $\{|p|, |q|, |r|\} \neq$

$\{1p1, 1q1, 1r1\}$ のとき, $K(p, q, r)$ と $K(p', q', r')$ の knot 型は異なる (即ち, $K(K(p, q, r)) = K(p', q', r')$ となる同相写像 $\pi: S^3 \rightarrow S^3$ は存在しない).

証明は行わない. [(1)は直接, (2)は Trotter [18], (3)は [4]より, (4)は bridge 指数が 3 なので, (1)及び Schubert [21]の議論から出る. (5)は Reidemeister)による古典的事実 [17].]

次の Lemma は中西氏の協力のもとで得られた. 感謝する.

Lemma 3. Fig.4 に描かれた link $L_0 = O \cup K_0$ の外部 $E(L_0)$ は non-Seifert, simple である.

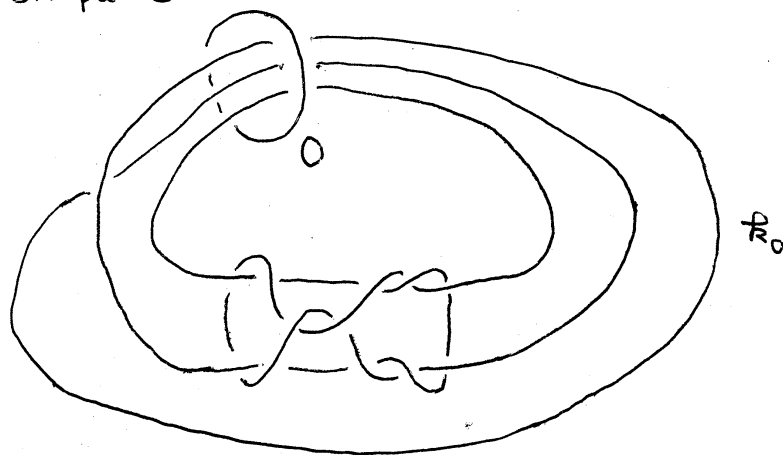
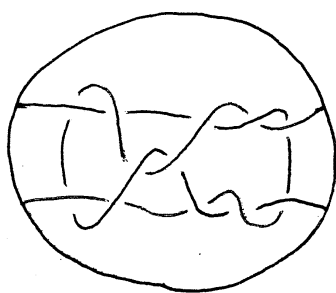


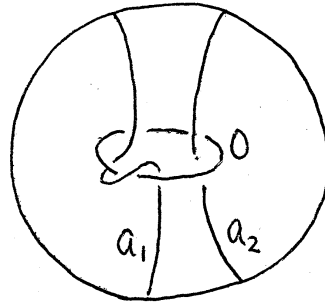
Fig.4

(証明) L_0 を 中西 [9] の意味の 2 つの tangles $t_1 \subset B^3$, $t_2 \subset B^3$ に分ける (Fig.5). t_1 は 相馬 [13] により simple tangle, t_2 は [9] の意味の prime tangle. [Local triviality, Inseparability, Indivisibility は容

易に check できる.] 特に, [9, Theorem 1.10] より L_0 は prime link である.



$t_1 < B^3$



$t_2 = 0 \cup a_1 \cup a_2 < B^3$

Fig. 5.

$B^3 - t_2$ に埋め込まれた incompressible torus F は $\partial T(0)$ に isotopic になることを示す。Fig. 6 の斜線部分の disk P をとり, $P_0 = P - P \cap O$

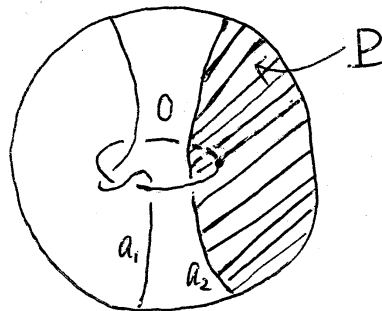


Fig. 6.

とおく。 F と P_0 は垂直に交わるとしてよい。 F と P_0 は $\emptyset$ またはいくつかの loops よりなるが, isotopy 変形のもとにその個数が最小になるような F と P_0 を考える。 $F \cap P_0 \neq \emptyset$. [もし $F \cap P_0 = \emptyset$ なら $\pi_1(F) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ から $\pi_1(B^3 - a_1 \cup 0 \cup P \cup \partial B^3) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ への monomorphism が存在するはずだが, これは起り得ない.] $F \cap P_0$ の P での innermost loop ℓ を取る。 ℓ は P で円板 D を囲む。 t_2 の prime 性より, D は

点 $P \cap D$ を含み, また ℓ は F で essential. F により B^3 は 2 つの部分に分けられる. それを N_1, N_2 とする. ただし $\partial N_1 = F$, $\partial N_2 = F \cup \partial B^3$ とする. もし $D \subset N_1$ ならば, $O \subset B^3$ が trivial knot だから, $(O \subset N_1) \cong (S^1 \times O \subset S^1 \times B^2)$ が出て, $F = \partial N_1 = \partial T(O)$ がわかる. 従って $D \subset N_2$ となければならないことを示せば主張が得られる. もし $D \subset N_2$ ならば, $t_2 \subset N_2$ となることにより, N_1 はある non-trivial knot k_1 の外部でなければならない. 従って, O は k_1 を因子として含むことになり, $O \subset B^3$ の triviality に反する. よって $D \not\subset N_2$. $E(L_0)$ が simple であることを言うために, $E(L_0)$ が ∂ -parallel でない incompressible torus F を含んでいたと仮定する. [13, Lemma 2] により F は $B^3 - t_2$ に含まれた torus F' に $S^2 - L$ で isotopic. 従って上に示したことから, $\partial T(O)$ は isotopic で, 結局 ∂ -parallel (矛盾). 故に $E(L_0)$ は simple である. $E(L_0)$ は Seifert 多様体でないことを示す. もし $E(L_0)$ が Seifert 多様体ならば, simple であることから, 高々 1 つの例外ファイバーをもつ annulus 上の Seifert 多様体 (Jaco, [3, p155] 参照). そのとき, $E(L_0) = E(L_0) \cup S^1 \times B^2$ は高々 2 つの例外ファイバーをもつ Seifert 多様体であることが示せ, k_0 は torus knot でなければならない. k_0 は 樹下-寺阪 knot と呼ばれる Alexander の項式 $\Delta^1 = 1$ をもつ non-trivial knot ([19]) で torus knot ではない. (Fig. 7.)

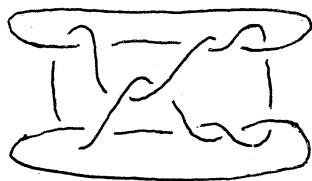


Fig. 7.

こうして $E(L_0)$ は Seifert 4-様体ではない。(証明終)

Lemma 4. T を 3-4-様体 M の中の solid torus とする. $K \subset S^3$ を knot とし, $T(K)$ 上の longitude を T の meridian に移す 任意の同相写像 $\partial E(K) \cong \partial T$ により作られた 3-4-様体 $M^* = \overline{M-T} \cup E(K) / \partial T \cong \partial E(K)$ を考える. (1) もし K が trivial knot $O \subset S^3$ に cobordant (即ち, slice knot) ならば M^* と M は H-cobordant である. (2) もし K の Alexander 多項式が 1 ならば, $\text{Ker } \theta \subset \pi_1(M^*)$ となる epimorphism $\theta: \pi_1(M^*) \rightarrow \pi_1(M)$ が存在する.

(略証) (1) を示すために, A を K と O をつなぐ $S^3 \times [0, 1]$ の中の annulus とする. W_0 を $S^3 \times [0, 1]$ から A の tube 近傍の内部を取り除いたものとする. W_0 は $E(K)$ と $S^1 \times D^2$ の H-cobordism になり, $T \times 1$ と $S^1 \times B^2$ を適当に同一視して作った 4-4-様体 $W = M \times [0, 1] \cup W_0$ は M と M^* の H-cobordism を与える. K が Alexander 多項式 = 1 の knot であることと, $\pi_1(E(K)) / \pi_1(E(K))'' \cong \mathbb{Z}$ とは同値である. このとき, van Kampen の定理から (2) は得られる.

3. 定理 1, 2, 3 の略証.

定理 1 の略証. $\bar{K} = \bar{K}(p, q, r)$ を向きづけられた Lemma 2 の pretzel knot とし, $\bar{\bar{K}} = \bar{K}(-r, -q, -p)$ ($\bar{K}$ の "reflected inverse") とおく. $\bar{K} \# \bar{\bar{K}}$ は slice knot で Alexander 多項式は 1.

Lemma 3 で考えた link $L_0 = O \cup K_0$ に対し, $K_0 \subset \overline{S^3 - T(O)} (\cong S^1 \times B^2)$ を考える. $T(O)$ の meridian, longitude を $T(\bar{K})$ の longitude, meridian に移す同相 $\overline{S^3 - T(O)} \cong T(\bar{K}) \subset S^3$ により K_0 を S^3 の中に入れる. 出来た knot を $\bar{K}(K_0)$ とかく. Lemma 3 より $E(\bar{K}(K_0))$ は essential annulus を含まず, 従って $\bar{K}(K_0)$ は prime. $K \# \bar{K}(K_0)$ は slice knot で, Alexander 多項式は 1 であることが示せる. 定理を得るためには, まず Mayers [8] の結果から, $E = \overline{M - T(K_s)}$ が non-Seifert, simple で, $[K_s] = 0$ ($\in H_1(M; \mathbb{Z})$) となるような knot $K_s \subset \text{Int } M$ がとれることに注意する. そのとき, $T(K_s)$ の meridian, longitude を一意に指定できる. $T(K \# \bar{K}(K_0))$ の meridian, longitude を $T(K_s)$ の longitude, meridian に移す同相 $\partial E(K \# \bar{K}(K_0)) \cong \partial T(K_s)$ により作る 3-体 $M^* = E \cup E(K \# \bar{K}(K_0)) / \partial E \cong \partial E(K \# \bar{K}(K_0))$ は定理 1 の (1), (2) を満たす Haken 3-体である. M^* が周期写像をもたないことをいうのに, simple 部分が $E, E(K), E(L_0), E(\bar{K})$ からなるような M^* の Jaco/Shalen-Johannson 分割 ([3]) を考える. M^* の任意の自己同相 $\bar{h}$ は, $\bar{h}' E(K \# \bar{K}(K_0)) = E(K \# \bar{K}(K_0))$ となる $\bar{h}'$ に ambient isotopic となることがわかる. [ここで使う事実: $D(2)$ を穴 2 つをもつ円板とし, p_1, p_2, p_3 を $\partial D(2)$ の各成分上の点とする. $D(2) \times S^1$ の任意の自己同相写像は $p_1 \times S^1 \cup p_2 \times S^1 \cup p_3 \times S^1$ を isotopy を無視して ^{保つて} 保存する.] され故, もし $\bar{h}$ が周期写像ならば, 同変 torus 定理 (Freedman/Hass/Scott [13]) により,

$\#E(K \# \bar{K}(K_0)) = E(K \# \bar{K}(K_0))$ とできる. そのとき, 同変 annulus 定理 [6] から $\#E(K) = E(K)$, かつ K のある meridian annulus $A \subset \partial E(K)$ に対し, $\#A = A$ とできる ([6, Theorem 2] の証明参照).
 $[K, \bar{K}(K_0)]$ knot 型の異なる prime knots に注意する.] Lemma 1 により, K は strongly invertible か又は strongly negative-amphicheiral でなければならぬ. Lemma 2 より K はそうではない. このような M^* は同相を除いて無数にあることは, Lemma 2 (5) より出る. 実際, pretzel knots K_1, K_2 から構成したものを M_1^*, M_2^* と書くとき, Jaco/Shalen-Johannson 分割を考へることにより, $M_1^* \cong M_2^* \Rightarrow$ meridian を保存する同相 $E(K_1) \cong E(K_2)$ がある $\Rightarrow K_1$ と K_2 は同じ knot 型をもつ」がわかる, (略証終)

(注意) Johannson の定理 [3, Chap. X] より, $\pi_1(M_1^*) \cong \pi_1(M_2^*) \Leftrightarrow M_1^* \cong M_2^*$ もわかるので, 定理 1 は 基本群の同型を除いて, M^* は無数にあると述べてもよい.

定理 2 の略証. まず M が 2-球面を含まない場合を考へる. 定理 1 の (1), (2) を満たす Haken 3-体 M_1 をとる. 3-球面に定理 1 を使って, (1), (2), (3) を満たし, M_1 に同相でなような Haken ホモロジー球面 S^* が無数にある. そのとき $M_1 \# S^*$ は non-aspherical で (1), (2) を満たす. 同変球面定理 (Meeks/Yau [7])

により (3) も満たす。もし M が 2-球面を含む場合は、すべての 2-球面にとって 3-cell をはる (今の場合 r 個): $M^+ = M \cup B_1^3 \cup \dots \cup B_r^3$.
 定理 1 より M^+ から (1), (2), (3) を満たす Haken 3-体様体 M^{++} が無数に作れる。このとき、 M^* として、 M^{++} から r 個の 3-cell ^(の内部) を除いたものとする。 M^* は non-aspherical で、 M に対し (1), (2), (3) を満たす。

定理 3 の略証. 中西 [20] により, (1), (2) を満たす prime link L^* が存在する。それ故, L を prime link と仮定してよい。 L の成分を L_i , $i=1, \dots, r$, とかく。相異なる knot 型をもつ r 個の Lemma 2 の pretzel knots K_i , $i=1, \dots, r$, を用意する, ただし, $r=1$ のときは K_1 は $L=L_1$ と異なる knot 型をもつものとする。定理 1 の証明で使った knot sum $K_i \# \bar{K}_i(K_0)$ を考える。 $L'_i = L_i \# K_i \# \bar{K}_i(K_0)$, $L' = \bigcup_{i=1}^r L'_i$ とおく (Fig. 8). L' は L に対し (1), (2) を満たす。さらに, $L^* = \bigcup_{i=1}^r L'_i(K_0)$ とおくと, Lemma 3 よりこれは prime link で, [9, Lemma 3.3] より L' に対し, (1), (2) を満たすことがわかる。

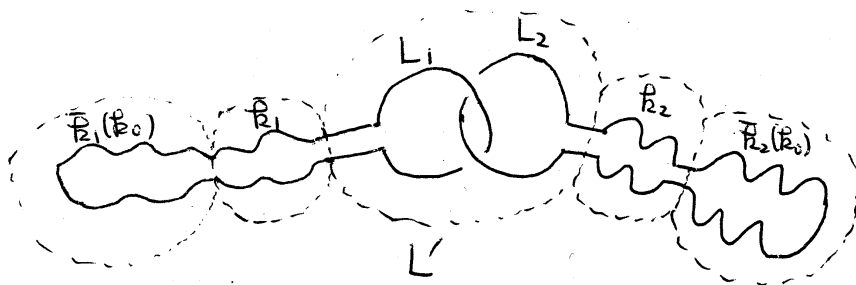


Fig. 8.

L^* が (3) を満たしていることを示すのに, $2E(L^*)$ と交わる r 個の $E(L)$ を simple 部分としてもつ $E(L^*)$ の Jaco/Shalen-Johannson 分解を考える. 任意の同相写像 $f: E(L^*) \rightarrow$ は, $f'(E(L^*)) = E(L^*)$ となる f' に ambient isotopic なことがわかる. もし f が 周期写像ならば, 同変 torus 定理から $f(E(L')) = E(L')$ とできる. L' の各成分は non-prime だから, 任意の同相 $f_1: E(L') \rightarrow$ は 同相 $\bar{f}_1: S^3 \rightarrow$ で $\bar{f}_1(L') = L'$ となるものに拡張する ([6, Lemma 2.1] 参照). 橋本 [2] による link の素分解の一貫性により, $\bar{f}_1$ は L' の各素因子を保存する, というのは, L' の各素因子は相異なるようにしたのだから. それ故, 特に, $f(E(K_1 \# \bar{K}_1(K_2)))$ と $E(K_1 \# \bar{K}_1(K_2))$ は $E(L')$ において isotopic. 同変 torus 定理から $f(E(K_1 \# \bar{K}_1(K_2))) = E(K_1 \# \bar{K}_1(K_2))$ と仮定できる. 定理 1 の証明において, これは起らないことを見た. 故に, $E(L^*)$ は 周期写像 f を持つことができない. 無限にあることは, 定理 1 と同じ理由による. (略証終)

参考文献

- [1] M. Freedman, J. Hass and P. Scott, Least area incompressible surfaces in 3-manifolds, *Invent. Math.* 71 (1983), 602-642.
- [2] Y. Hashizume, On the uniqueness of the decomposition of a link, *Osaka Math. J.* 10 (1958), 283-300.
- [3] W. Jaco, Lectures on three manifold topology, Conference Board of Math. Science, Regional Conference Series in Math. 43, 1980.
- [4] A. Kawauchi, A survey on pretzel knots, preprint.
- [5] A. Kawauchi, T. Kobayashi and M. Sakuma, On 3-manifolds with no periodic maps, preprint.
- [6] T. Kobayashi, Equivariant annulus theorem for 3-manifolds, preprint.
- [7] W. H. Meeks, III and S. T. Yau, Topology of three dimensional manifolds and the embedding problem in minimal surface theory, *Ann. of Math.* 12 (1980), 441-484.
- [8] R. Myers, Homology cobordisms, link concordance and hyperbolic 3-manifolds, preprint.
- [9] Y. Nakanishi, Primeness of links, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 9 (1981), 415-440.
- [10] F. Raymond and J. L. Tollefson, Closed 3-manifolds with no periodic maps, *Trans. Amer. Math. Soc.* 221 (1976), 403-418; Corrections, *ibid.*

272 (1982), 803-807.

[11] M. Sakuma, Homology cobordisms and 3-manifolds with no periodic maps (unpublished version), Osaka City Univ. (1983).

[12] L.C. Siebenmann, On vanishing of the Rochlin invariant and non-finitely amphicheiral homology 3-spheres, *Lect. Notes in Math.* 788, Springer-Verlag, 177-222, 1980.

[13] T. Soma, Simple links and tangles, *Tokyo J. Math.* (to appear).

[14] J. Stallings, Homology and central series of groups, *J. Algebra* 2 (1965), 170-181.

[追加]

[15] R.C. Kirby and W.B.R. Lickorish, Prime knots and concordances, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 86 (1979), 437-441.

[16] C. Livingston, Homology cobordisms of 3-manifolds, knot concordances, and prime knots, *Pacific J. Math.* 94 (1981), 193-206.

[17] K. Reidemeister, Knotentheorie, *Ergeb. Math.* 1 (1932).

[18] H.F. Trotter, Non-invertible knots exist, *Topology* 2 (1964), 275-284.

[19] S. Kinoshita and H. Terasaka, On unions of knots, *Osaka Math. J.* 9 (1957), 131-153.

[20] Y. Nakanishi, Prime links, concordance and Alexander invariants, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* 8 (1980) 561-568.

[21] H. Schubert, "Über eine Numerische Knoteninvariante, *Math. Z.* 61 (1954) 245-288.