

スペクトル分布によるセルラーオートマトンの単射性・全射性の判定

佐藤 忠一

東洋大学 工学部

1. まえがき

同一の有限オートマトンを一次元（直線上）に並べたネットワーク系を一次元セルラーオートマトンという。各オートマトンは、自分の周辺のオートマトンの状態を見ながら局所関数で一斉に変換する。この局所関数から有向グラフを作りその遷移行列から各シンボル（状態）の隣接行列を定義する。本論文はこの隣接行列のスペクトルの分布からセルラーオートマトンのグローバルな性質を調べる。

2. 諸定義と基本的性質

一次元セルラーオートマトン CA とは $CA = \langle Z, Q, N, f \rangle$ の四組で与えられる。

ここで、 Z は整数の集合で各オートマトンが配置されている場所を表わす。 Q は各オートマトンが取れる状態の有限集合、 N は Z の有限部分集合で近傍と呼ばれる。

f は $Q^{|N|} \rightarrow Q$ なる写像で局所関数と呼ばれ、 $|Q| = m$ 、 $|N| = n$ のとき m シンボル n スコープの局所関数という。 $c: Z \rightarrow Q$ なる写像 c を様相といい、各オートマトンの状態の分布を表わす。この様相に局所関数 f で一斉に変換すると新しい様相 c' は $\forall i \in Z$ に対して、 $c'(i) = f(c(i), c(i+1), \dots, c(i+|N|-1))$ で与えられる $c \rightarrow c'$ なる対応を $f_*(c) = c'$ と表わし、 f_* を並列写像という。様相の集合を $C(Q)$ で表わすと f_* は $f_*: C(Q) \rightarrow C(Q)$ なる写像である。並列写像は一般的に次のような著しい性質を持つ。 f_* は単射である $\Leftrightarrow f_*$ は逆変換を持つ。

従って、 f_* が単射なら f_* は全射である。

3. 局所関数の行列表示

一般的に m シンボル n スコープの局所関数 $f: Q^n \rightarrow Q$ の有向グラフを次の様に作る。
 Q^{n-1} の元をグラフのノードとし、ノード $x_1 \dots, x_{n-1}$ からノード $x_2 \dots, x_n$ へには遷移が存在し、そのエッジに $f(x_1 \dots, x_n)$ の値のラベルを付ける。このようにして作られた有向グラフの遷移行列を A_f で表す。この行列のサイズは $m^{n-1} \times m^{n-1}$ である。 A_f は $A_f = \sum_{i=1}^m a_i \mu(a_i)$ と表現でき行列 $\mu(a_i)$ をシンボル a_i の隣接行列という。次に Q 上のワード $w = a_1 \dots, a_n$ に対してワードの隣接行列 $\mu(w)$ を次のように定義する。

$$\mu(w) = \mu(a_1 \dots, a_n) = \prod_{j=1}^n \mu(a_j)$$

定理 1. f を m シンボル, n スコープの局所関数とするとき次の命題は全て等価である。

- (1) f_* は全射である。
- (2) $\forall w \in Q^*$ に対して $\mu(w)$ のスペクトル分布は複素平面上の半径 1 の円周上又は原点に分布する。但し、すべては原点には分布しない。
- (3) $\{\mu(a) \mid a \in Q\}$ によって生成される集合は有限集合である。言い換えれば $\{\mu(w) \mid w \in Q^*\}$ は有限集合である。すなわち、 $\{\mu(a) \mid a \in Q\}$ の乗法表が有限個で閉じる。

定理 2. f を m シンボル, n スコープの局所関数とする。このとき次の命題が成立。

f_* が単射であるための必要十分条件は $\forall w \in Q^*$ に対して $\mu(w)$ のスペクトル分布は複素平面上でただ 1 つが 1 に分布し、他はすべて原点に分布する。ここで、 $Q^+ = \bigcup_{n \geq 1} Q^n$

定理 1、定理 2 より次の系 1 が得られる。

系 1. f_{∞} が単射であれば f_{∞} は全射である。

定理 2 よりつぎの系 2 が成立する。

系 2. f_{∞} が単射であるための必要十分条件は $\forall w \in Q^+$ に対して、その隣接行列の固有方程式が次の形をとることである。 $|\mu(w) - \lambda| = (-\lambda)^k + (-\lambda)^{k-1}$, $k = m^{n-1}$

系 3. 次の命題はすべて等価である。

- (1) $\forall a \in Q$ に対して $\mu(a)$ は正則である。
- (2) $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ は x_1 に関して置換的かつ x_n に関して置換的である。
(f は L-property かつ R-property を持つ)
- (3) f_{∞} は m^{n-1} 対 1 写像である。
- (4) $\forall w \in Q^*$ に対して $\mu(w)$ のスペクトル分布は複素平面上の半径 1 の円周上に分布する。

系 4. f_{∞} が単射になるための必要条件は $\forall a \in Q$ に対して次式が成立することである。

$$|\mu(w) - \lambda| = (-\lambda)^k + (-\lambda)^{k-1}, \quad k = m^{n-1}$$

系 5. f_{∞} が全射になるための十分条件は次式が成立することである。

$$\forall a_i, a_j \in Q \text{ に対して } \mu(a_i)\mu(a_j) \in \{\mu(a) \mid a \in Q\}$$