

KdV 方程式 と アファインリー代数 $A_1^{(1)}$

京都大学 伊達 悦朗

〃 神保 道夫

〃 柏原 正樹

〃 三輪 哲二

以下は、著者たちの連作 Transformation groups for soliton equations I ~ VII (RIMS プレプリント 356 ~ 362) の部分的な紹介である。詳しくは、それらを参照されたい。参考文献も、ここには挙げなかった。

§1 KdV 方程式

次の非線型方程式は KdV 方程式と呼ばれる。

$$4u_t = u_{xxx} + 6uu_x \quad (1)$$

この方程式は、Korteweg と de Vries により、浅い波を記述する方程式として提出された。注目を浴びるようになったのは、Gardner, Greene, Kruskal, Miura により、逆散乱法を使つての初期値問題の解法が発見されてからである。彼らの論文をきっかけとして、この分野すなわちソリトン理論は、爆発的な進展を見せた。ソリトン理論に

現われる方程式の特徴は、具体的な解が数多く作れるという点にある。では、どのような機構が根拠になって解が作れるのか。実例の構成とともにこの点の解明が研究者の興味の中心であった。

Lax は次の点に着目した。未知函数 $w(x, t)$ に対する次の連立線型系を考える。

$$(\partial_x^2 + u) w = \lambda w \quad (2)$$

$$\partial_t w = (\partial_x^3 + \frac{3}{2} u \partial_x + \frac{3}{4} u_x) w \quad (3)$$

方程式(1)は(2)と(3)が同時に解するための条件である、というのが Lax の発見であった。

Hirota は新しい未知函数 $\tau(x, t)$ を

$$u(x, t) = 2 \partial_x^2 \log \tau(x, t) \quad (4)$$

によって導入すると、(1)が特徴的^な形に書き直せる事を示した。我々は $\tau(x, t)$ を KdV 方程式の τ 函数と呼ぶ。彼の記法に従えば (1) は

$$(D_x^4 - 4 D_t D_x) \tau \cdot \tau = 0 \quad (5)$$

となる。ここで、 $D_x^4 - 4 D_t D_x$ は 広田微分と呼ばれる演算で、一般に $x, t, y, \dots$ の函数 $f(x, t, y, \dots)$, $g(x, t, y, \dots)$ と $D_x, D_t, D_y, \dots$ の多項式 $P(D_x, D_t, D_y, \dots)$ に対して

$$\begin{aligned}
 & P(D_x, D_t, D_y, \dots) f \cdot g \\
 &= P(\partial_{x'}, \partial_{t'}, \partial_{y'}, \dots) \left(f(x+x', t+t', y+y', \dots) g(x+x', t+t', y+y', \dots) \right) \Big|_{x=t=y=\dots=0}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

と定義される。彼はこの形を使って、任意パラメタ $a_1, \dots, a_N, p_1, \dots, p_N$ を含む次の解を得た。これは N ソリトン解と呼ばれる。

$$\begin{aligned}
 \tau(x, t) &= \sum_{n=0}^N \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N} a_{j_1} \dots a_{j_n} \\
 &\times \prod_{\substack{j, j' = 1, \dots, j_n \\ j < j'}} \frac{(p_j - p_{j'})^2}{(p_j + p_{j'})^2} e^{2 \sum_{j=j_1, \dots, j_n} (x p_j + t p_j^3)}
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

(1) において x を 1 次, t を 3 次と数えるのが自然である。 $x = x_1$, $t = x_3$, $\partial_x = \partial_1$, $\partial_t = \partial_3$ と書こう。(3) の代わりに、適当に

$$\partial_{2n+1} w = \left(\partial_1^{2n+1} + \frac{2n+1}{2} u \partial_1^{2n-1} + \dots \right) w \tag{8}$$

をとり, (2) との両立条件を考えると, $(2n+1)$ 次 KdV 方程式と呼ばれる非線型方程式を得る。こうして得られる高次 KdV 方程式の系列を KdV 系列と呼ぶ。(7) において, 指数関数の部分を次のように変えると KdV 系列を

一斉に満たす N ソリトンが得られる。

$$\tau(x) = \sum_{n=0}^N \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_n \leq N} a_{j_1} \dots a_{j_n} \\ \times \prod_{\substack{j, j' = 1, \dots, j_n \\ j < j'}} \frac{(p_j - p_{j'})^2}{(p_j + p_{j'})^2} e^{\sum_{j=1, \dots, j_n} (x_1 p_j + x_3 p_j^3 + x_5 p_j^5 + \dots)} \quad (9)$$

(M. and Y.)
Sato は逆に次の問を立てた。 N ソリトン解 (9) は
どれだけ多くの広田方程式を満たすか。彼らは 次の結果を
得た。齊次 m 次の多項式 $P(D)$ のうち $P(D)\tau, \tau = 0$
を満たすものの次元は

$$\# \{ (m_1, \dots, m_k) \mid m_i : \text{正の奇数}, m_1 \leq \dots \leq m_k, \sum_{i=1}^k m_i = m \} \\ - \# \{ (m_1, \dots, m_k) \mid m_i : \text{正の偶数}, m_1 < \dots < m_k, \sum_{i=1}^k m_i = m \} \quad (10)$$

次節において, KdV 方程式に対するまたひとつ新しい
視点を与える。それは, アファインリー代数 $A_1^{(1)}$ の基本表現
を $\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$ 上に実現したものが, KdV 系列
の τ 函数である, とまとめられる。Sato の上記の結果は
この言い換えにより, $A_1^{(1)}$ の指標公式の系となる。

§2. $A_1^{(1)}$ の基本表現

2行2列の行列 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ を考える。これを $(C_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ と書こう。アファインリー代数 $A_1^{(1)}$ は、次の定義関係式を満たす6個の要素 $e_0, e_1, f_0, f_1, h_0, h_1$ から生成された無限次元リー代数である。

$$\begin{aligned} [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_i, \quad [h_i, h_j] = 0 \\ [h_i, e_j] &= C_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -C_{ij} f_j \\ (\text{ad } e_i)^{1-C_{ij}} e_j &= 0, \quad (\text{ad } f_i)^{1-C_{ij}} f_j = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

λ を $\mathbb{C} h_0 \oplus \mathbb{C} h_1$ 上の linear form で

$$\lambda(h_0) = 1, \quad \lambda(h_1) = 0 \quad (12)$$

を満たすものとする。 $A_1^{(1)}$ の基本表現とは、表現加群が、次の関係を満たすベクトル v から生成されるものをいう。

$$h_i v = \lambda(h_i) v, \quad e_i v = 0 \quad (i=0, 1) \quad (13)$$

λ を highest weight, v を highest weight vector と呼ぶ。この表現加群を $V(\lambda)$ と書く。

Lepowsky, Wilson は $V(\lambda)$ が無限変数の多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$ によって実現される事を示した。彼らは vertex operator と呼ばれる次の形の無限階微分作用素を考える。

$$\begin{aligned}
 X(p) &= \exp \left(2 \sum_{l: \text{odd}} x_l p^l \right) \exp \left(-2 \sum_{l: \text{odd}} \frac{1}{l p^l} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k p^k
 \end{aligned} \tag{14}$$

$X_k (k \in \mathbb{Z})$, 1 , x_l , $\frac{\partial}{\partial x_l} (l: \text{odd})$ の $\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$ における作用が, 定数 1 を highest weight vector とする A_1^0 の基本表現を与える, というのが彼らの結果である。

定数 1 は, KdV 方程式の自明な関数である。これに $\exp(a_1 X(p_1))$, $\exp(a_2 X(p_2))$, $\dots$ を順に作用させて何が得られるか見てみよう。operand を明示するため $[\quad]$ でかこむ。まず

$$\begin{aligned}
 &\exp \left(-2 \sum_{l: \text{odd}} \frac{1}{l p^l} \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \left[\exp \left(2 \sum_{l: \text{odd}} x_l q^l \right) \right] \\
 &= \frac{(p-q)^2}{(p+q)^2} \exp \left(2 \sum_{l: \text{odd}} x_l q^l \right)
 \end{aligned} \tag{15}$$

これより

$$\exp(a_1 X(p_1)) [1] = 1 + a_1 \exp \left(2 \sum_{l: \text{odd}} x_l p_1^l \right)$$

$$\begin{aligned}
 &\exp(a_2 X(p_2)) \cdot \exp(a_1 X(p_1)) [1] = 1 + \\
 &+ \sum_{i=1}^2 a_i \exp \left(2 \sum_{l: \text{odd}} x_l p_i^l \right) +
 \end{aligned}$$

$$+ a_1 a_2 \frac{(p_2 - p_1)^2}{(p_2 + p_1)^2} \exp\left(\sum_{i=1}^2 2 \sum_{l: \text{odd}} x_l p_i^l\right) \quad (16)$$

などとなる。一般に, $\exp(a_N X(p_N)) \cdots \exp(a_1 X(p_1)) [1]$ は, KdV 系列の N ソリトン (9) を与える。従って我々の結果は次の通り。

KdV 系列の τ 函数の全体は, $A_1^{(1)}$ の基本表現を $\mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$ において実現した際の highest weight vector 1 の軌道になる。

広田方程式は次の形の方程式である。

$$P(\partial_y) (\tau(x+y) \tau(x-y)) \Big|_{y=0} = 0 \quad (17)$$

$x^{(1)} = x+y$, $x^{(2)} = x-y$ とおこう。 $A_1^{(1)}$ の highest weight 21 に対する表現加群は $\mathbb{C}[x_1^{(1)}, x_3^{(1)}, x_5^{(1)}, \dots] \otimes \mathbb{C}[x_1^{(2)}, x_3^{(2)}, x_5^{(2)}, \dots]$ の中に, KdV 系列の τ 函数に対する $\tau(x^{(1)}) \tau(x^{(2)})$ の形の要素全体の linear hull として実現される。これを $V(21)$ と書こう。

$$\Omega = V(21) \cap \mathbb{C}[y_1, y_3, y_5, \dots] \quad (18)$$

とおく。 Ω は, $\tau(x+y) \tau(x-y)$ を

$$\sum_{i=1}^J F_i(x) G_i(y) \quad (F_i(x) (i=1, \dots, J) \text{ は線型独立}) \quad (19)$$

の形に書いた時に現われる $G_i(y)$ の全体の linear hull と一致する。(17) から, $P(2y)$ に対する条件として

$$P(2y) G_i(y) \Big|_{y=0} = 0 \quad (20)$$

よって, Sato の問題は, Ω の斉次 m 次部分の次元を勘定する事に帰着された。

この最後の問題は, Lepowsky - Wilson によって解かれている。 $\Omega(m)$, $V(1)(m)$, $V(21)(m)$ をそれぞれ Ω , $V(1)$, $V(21)$ の斉次 m 次部分とし

$$\begin{aligned} \text{ch}_q \Omega &= \sum_{m=0}^{\infty} \dim \Omega(m) q^m \\ \text{ch}_q V(1) &= \sum_{m=0}^{\infty} \dim V(1)(m) q^m \\ \text{ch}_q V(21) &= \sum_{m=0}^{\infty} \dim V(21)(m) q^m \end{aligned} \quad (21)$$

とおく。 $\text{ch}_q V(1)$, $\text{ch}_q V(21)$ は, $V(1)$, $V(21)$ の指標と呼ばれ, 次の式で与えられる。(前者は $V(1) = \mathbb{C}[x_1, x_3, x_5, \dots]$ 故自明である。)

$$\begin{aligned} \text{ch}_q V(1) &= 1 / \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k-1}) \\ \text{ch}_q V(21) &= 1 / \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{4k-2}) (1 - q^{2k-1}) \end{aligned} \quad (22)$$

彼らによれば"

$$\text{ch}_q \Omega = \text{ch}_q V(2,1) / \text{ch}_q V(1) \quad (23)$$

これから Sato の結果 (10) が従う。

(最後に) 近々、数学 (岩波書店) に著者たちの論説が出る予定なので、それも参照していただきたい。ここでは、なるべく、*disjoint* になるように書いた。従って、^{*} 佐藤先生たちの結果についても、著者たちの結果についてもここに書かれているのは、主要部分のすべてではない事をお断わりしておく。