

Analyticity in Operator Algebras

山形大 理 河村新蔵

M を可分なヒルベルト空間、 $\mathcal{M}$ 、 $\mathcal{M}$ 上の von Neumann 環、
 $\{\alpha_t\}$ を M 上の一径数 * 同型群とする。 $\{\alpha_t\}$ の連続性については任意の $x \in M$ と $\varphi \in M_*$ (M の pre-dual) に対して、
 $t \rightarrow \langle \alpha_t(x), \varphi \rangle$ が連続であるとする。 $H^\infty(\alpha)$ を次の条件
 (A) を満たす $x \in M$ の全体とする。

(A) $t \rightarrow \langle \alpha_{-t}(x), \varphi \rangle$ が上半平面へ有界かつ解析的な関数として拡張できる。

本稿では、 $H^\infty(\alpha)$ が極大な subdiagonal 環 [1] である事を示す。

[1] の subdiagonal 環の研究は Kadison - Singer [5] の triangular 環の研究に続く non-self adjoint な環の構造を調べたものである。いずれの環に於てもトーラス ($\mathbb{T}$) 上の Disk 環の議論が基本的であった。一般化された解析関数の話として、Arens - Singer [3]、matrix-valued な解析関数の研

究として、Heisenberg-Lowdenslager [4] が有る。任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し、 $e^{ix} \rightarrow e^{i(x+it)}$ ($e^{ix} \in \Pi$) なる Π 上の変換を考えれば、 $\mathbb{R}$ は Π 上の flow と考える事ができ、Disk 環はこの flow に関して解析的な関数と考える事ができる。Muhly ([10] [11] [12] [13]) はこの flow の立場から weak * Dirichlet 環を扱った。我々の $H^\infty(\alpha)$ は von Neumann 環上の一径数 * 同型群によって決定されるが、富田-竹崎理論 [17] によって一径数 * 同型群は充分沢山の例が与えられる。この理論による一径数 * 同型群、modular 同型群は可換の場合は全て trivial になる事より、この例は非可換的な代表的なものである。又 Arveson [1] の例は全んどこの一径数 * 同型群によって決定される $H^\infty(\alpha)$ の立場よりみる事ができる [8]。更に $H^\infty(\alpha)$ は不変部分空間の議論とも関わりがあり、[7] によればある条件のもとで、 $H^\infty(\alpha)$ は weak-dense な (σ -weakly closed ではないが) reductive algebra になる。

§ 1. C^* 環上の analytic 汎関数. A を C^* -環、 $\{\alpha_t\}$ を A 上の強連続一径数同型群とする。この時 $a \in A$ のスペクトルを次の様に定義する。任意の $a \in A$ と $f \in L(\mathbb{R})$ に対し、

$$a * f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \alpha_t(a) dt$$

とする。 a のスペクトル, $Sp_\pi(a)$, を $ideal, \{f \in L(\mathbb{R})\}$

$a * f = 0$ の hull として定義する。この時、 $A(\alpha) = \{a \in A; \text{Spr}(\alpha) \subset [0, \infty)\}$ とする。

$$a \in A(\alpha) \Leftrightarrow \text{任意の } \varphi \in A^* (A \text{ の dual space}) \text{ と } \text{supp } \hat{f} \subset [\varepsilon, \infty) (\varepsilon = \varepsilon_f > 0) \text{ なる任意の } f \in L(\mathbb{R}) \text{ に対し、} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(\alpha_{-t}(a)) dt = 0$$

右の条件は、関数 $t \rightarrow \varphi(\alpha_{-t}(a))$ が上半複素平面上の有界かつ解析的な関数に拡張できる必要十分条件である。

$\varphi \in A^*$ が解析的であるとは、任意の $a \in A$ に対して、 $t \rightarrow \varphi(\alpha_{-t}(a))$ が解析的である事を言う。 φ が解析的であるという事と φ が $A(\alpha)_0 = \bigcup_{\varepsilon > 0} A(\varepsilon, \infty)$, ($A(\varepsilon, \infty) = \{a \in A; \text{Spr}(\alpha) \subset [\varepsilon, \infty)\}$) 上 "vanish" する事は同値である

[2, Prop. 5.1].

$\varphi \in A^*$ と $f \in L(\mathbb{R})$ に対し、 $\langle a, \varphi * f \rangle \equiv \langle a * \hat{f}, \varphi \rangle$ ($\hat{f}(t) = f(-t)$) によって A 上の汎関数 $\varphi * f$ を定義する。

この時 φ のスペクトル, $\text{Spr}(\varphi)$ を ideal, $\{f \in L(\mathbb{R});$

$\varphi * f = 0\}$ の hull とする。 φ の解析性とスペクトルの関係について次の結果がある。

$$(1.1) \quad \varphi \text{ が解析的である} \Leftrightarrow \text{Spr}(\varphi) \subset (0, \infty)$$

$$(1.2) \quad \varphi \text{ が } \alpha_{\tau}\text{-不変である} \Leftrightarrow \text{Spr}(\varphi) = \{0\}$$

W. Arveson [2] によれば $\varphi \in A^*$ が解析的ならば $|\varphi|$ による A の G.N.S. 構成は covariant 表現となる。これは, F.M.

Riesz の定理の非可換的拡張である。この時刻による表現、 π_{η} は次の様になっている。

$$(i) \quad \varphi(a) = (\pi_{\eta}(a)\xi, V\xi), \quad V^*V\xi = \xi$$

ξ : cyclic vector on $\mathcal{H}_{\eta}$ V : partial isometry $\in \pi_{\eta}(A)'$

$$(ii) \quad \pi_{\eta}(\alpha_*(a)) = U_t \pi_{\eta}(a) U_t^*$$

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{its} dp(s) \quad P(t, \infty) \mathcal{H} = \bigcap_{s < t} [\pi_{\eta}(A(s, \infty))\mathcal{H}]$$

§ 2. Subdiagonal algebra. M を von Neumann 環, $\{\alpha_t\}$ を M 上の弱連続一径数 * 同型群とする。§ 1 と同様に $x \in M$ と $\varphi \in M_*$ に対して, $Sp_x(x)$, $Sp_x(\varphi)$ を定義する。 C^* -環の場合と同様に考えれば, 解析環 $H^\infty(x)$ は $Sp_x(x) \subset [0, \infty)$ なる $x \in M$ 全体となる。 C^* -環に於る解析環 $A(x)$ と von Neumann 環に於る解析環 $H^\infty(x)$ の関係について次の事を注意しておく。 A を C^* -環, $\{\alpha_t\}$ を強連続一径数 * 同型群, φ を α_t -不変な A 上汎関数とする。 $(\varphi \geq 0)$ とする。この時 φ による A の G.N.S. 構成 $(\pi_\varphi(A), \mathcal{H}_\varphi)$ を考えれば, 自然な形で $\widehat{\pi_\varphi(A)}$ 上に弱連続一径数 * 同型群 $\{\bar{\alpha}_t\}$ が与えられる。 A_α を A の α_t -不変な vector 全体, $\widehat{\pi_\varphi(A)}_\alpha$ を $\widehat{\pi_\varphi(A)}$ の $\bar{\alpha}_t$ -不変な vector 全体とする。この時, $\widehat{\pi_\varphi(A)}_\alpha = \widehat{\pi_\varphi(A_\alpha)}$ ならば $H^\infty(\bar{\alpha}) = \widehat{\pi_\varphi(A_\alpha)}$ である [8]。ここでは (A, α_t) に対し α_t -不変な state による表現を考え初めから von Neumann 環の場合

(M, α) に限る。 $H^\infty(\alpha)_0 = \overline{\bigcup_{\varepsilon > 0} \{x \in M; S_{\text{pr}}(x) \subset [\varepsilon, \infty)\}}$ とすれば、 $\varphi \in M_*$ の解析性について § 1 と同様に次の事が成り立つ。

$$(2.1) \quad S_{\text{pr}}(\varphi) \subset [0, \infty) \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ on } H^\infty(\alpha)_0.$$

$$(2.2) \quad S_{\text{pr}}(\varphi) \subset \{0\} \Leftrightarrow \varphi \text{ が } \alpha_+-\text{不変である}$$

(M, α) に対して M 上に normal な α_+ -不変な state が充分沢山あるとしよう。即ち [9] の意味で α -finite である。この時 [9] より M から M_α への conditional expectation, $\mathfrak{E}$, が存在する。 $H^\infty(\alpha)$ が次の意味で $\mathfrak{E}$ に関して極大な subdiagonal 環である事を示すのが本稿の目的である。

【定義】 M ; 可分なヒルベルト空間上の von Neumann 環,

$\mathfrak{E}: M \rightarrow M$; faithful normal positive $\mathfrak{E}$ idempotent
な線型写像

M の部分環, $\mathcal{A}$, が $\mathfrak{E}$ に関して subdiagonal である

$\Leftrightarrow$

- (1) $\mathcal{A} + \mathcal{A}^*$ が M で σ -weakly dense
- (2) $\mathfrak{E}(xy) = \mathfrak{E}(x)\mathfrak{E}(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{A}$
- (3) $\mathfrak{E}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{D} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$
- (4) $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^* \rightarrow 1$

【注】 $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^*$ が M の中で極大な可換 $*$ 部分環の時、 $\mathcal{A}$ は

triangular 環である [5]。

[定義] $\mathcal{O} \subset M$; Φ に関して subdiagonal である

$\mathcal{O}$ が極大である。 $\iff$ $\mathcal{B}$ が $\mathcal{O}$ を含む Φ に関する sub-diagonal 環 ($\subseteq M$) であるならば $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ となる。

W. Arveson は [1] に於て極大な subdiagonal 環の例をいくつか示した。亀井 [6] によれば、有限な von Neumann 環における anti-symmetric で有限な subdiagonal 環は極大である。即ち、 $(M, \mathcal{O}, \Phi)$ に対して $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}^* = \mathbb{C}1$ で Φ -不変な有限な trace, τ , が存在する時、 $\mathcal{O}$ は極大である。この時 $\Phi(x) = \tau(x)1$ ($x \in M$) である。しかし、一般に subdiagonal 環 (σ -closed な) が極大であるか否か解かっていない。

[定理] M ; von Neumann 環。 $\{\alpha_t\}$; 弱連続な一径数 * 同型群。 M 上は normal な α_t -不変な state が充分沢山あるとする (α -finite)。この時、conditional expectation, $\Phi, M \rightarrow M_\alpha$ が存在する。 $H^\infty(\alpha) = \{x \in M; S_{\alpha_t}(x) \subset (0, \infty)\}$
 $\implies H^\infty(\alpha)$ は Φ に関して極大な subdiagonal 環である。

[証明] [I]. $H^\infty(\alpha)$ が subdiagonal である事。

(3)(4) は明らか。

(1) φ を $\varphi(H^\infty(\alpha) + H^\infty(\alpha)^*) = 0$ なる σ -weakly 連続な線型汎関数とする。 $\varphi(H^\infty(\alpha)) = 0$ なので、(2.1) より $Sp_\alpha(\varphi) \subset [0, \infty)$ 。同様に $\varphi(H^\infty(\alpha)^*) = 0$ より $Sp_\alpha(\varphi) \subset (-\infty, 0]$ 。結局、 $Sp_\alpha(\varphi) \subset \{0\}$ でこれは φ が α_t -不変という事 (2.2) であるから $\varphi(x) = \varphi(\Phi(x))$ 。一方、 $\Phi(x) \in \mathcal{O} \cap \mathcal{O}^*$ であるから、 $\varphi(\Phi(x)) = 0$ 。故に $\varphi = 0$ 。

(2) Φ が $H^\infty(\alpha)$ で multiplicative である事を言う為には、 $H^\infty(\alpha)_\Phi = \{x \in H^\infty(\alpha); \Phi(x) = 0\}$ が $H^\infty(\alpha)$ の中で ideal である事を言えば充分。

$\{x \in M; Sp_\alpha(x) \subset (0, \infty)\} (\subset H^\infty(\alpha))$ は $H^\infty(\alpha)$ の中で ideal であってその σ -weakly closure, $H^\infty(\alpha)_0$, も又 ideal である。従って $H^\infty(\alpha)_\Phi = H^\infty(\alpha)_0$ を示せば良い。

$x \in M$ に対し、 $Sp_\alpha(x) \subset (\varepsilon, \infty)$ ($\varepsilon > 0$) ならば、 x のスペクトルは α_t -不変であるから、 x の α による convex hull, $K(x, \alpha)$ はスペクトル部分空間, $M_\alpha((\varepsilon, \infty))$ に含まれる。その closure, $K(x, \alpha)$ も同様であるから、

$$\Phi(x) = K(x, \alpha) \cap M_\alpha \subset M_\alpha((\varepsilon, \infty)) \cap M_\alpha(\{0\}) = M_\alpha(\{0\}) = 0.$$

即ち、 $x \in H^\infty(\alpha)_\Phi$ であるから、 $H^\infty(\alpha)_0 \subset H^\infty(\alpha)_\Phi$ である。

ここで、 $H^\infty(\alpha)_0 \subsetneq H^\infty(\alpha)_\Phi$ と仮定しよう。即ち、 $H^\infty(\alpha)_0$ に属

さない $H^\infty(\alpha)_\perp$ の元 x が存在するから. Hahn-Banach の定理より, $\varphi(x) = 1$ かつ $\varphi(H^\infty(\alpha)_0)$ なる M_α の元がある.

$$F(t) = \langle \alpha_t(x), \varphi \rangle$$

とすれば, F は $\mathbb{R}$ 上の有界な連続関数で, $L^1(\mathbb{R})$ に関するスペクトル, $Sp(F)$, に対し,

$$Sp(F) \subset -Sp_\alpha(x) \cap Sp_\alpha(\varphi) \subset (-\infty, 0] \cap [0, +\infty) = \{0\}$$

$$(x \in H^\infty(\alpha)_\perp \subset H^\infty(\alpha) \Rightarrow Sp_\alpha(x) \subset (-\infty, 0], \quad \varphi(H^\infty(\alpha)_0) = 0 \Rightarrow Sp_\alpha(\varphi) \subset [0, +\infty))$$

より, F は $\mathbb{R}$ 上 constant な関数である. $F(t) = F(0)$ より,

$$\langle \alpha_t(x), \varphi \rangle = \langle x, \varphi \rangle = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{R}). \text{ 故に } \varphi \text{ は } K(x, \alpha)$$

上では 1 である. $\alpha(x) \in K(x, \alpha)$ であるから, $\varphi(\alpha(x))$

$= 1$. これは $\alpha(x) = 0$ と矛盾する. 故に $H^\infty(\alpha)_0 = H^\infty(\alpha)_\perp$

で, α は multiplicative on $H^\infty(\alpha)$ である.

[II] 極大性

$H^\infty(\alpha)_m = \{x \in M; \alpha(H^\infty(\alpha)_\perp x H^\infty(\alpha)) = \alpha(H^\infty(\alpha) x H^\infty(\alpha)_\perp) = 0\}$ とすれば, $H^\infty(\alpha)_m \supset H^\infty(\alpha)$ で $H^\infty(\alpha)_m$ は極大な sub-diagonal 環である事が解っている [1, Th 2.2.1].

$H^\infty(\alpha)_m = H^\infty(\alpha)$ を示す為に $H^\infty(\alpha)_m \neq H^\infty(\alpha)$ とする. 即ち, $H^\infty(\alpha)$ に属さない $H^\infty(\alpha)_m$ の元 x が存在する. $x \in H^\infty(\alpha)_m$ より, $\alpha_t(x) \in H^\infty(\alpha)_m$ である. ($\odot$ $H^\infty(\alpha)_\perp$ と $H^\infty(\alpha)$ は $\alpha_t =$ に関して不変であるから, $\alpha(y \alpha_t(x) z) = \alpha(\alpha_t(y) x \alpha_t(z)) = 0 \quad \forall y \in H^\infty(\alpha)_\perp \quad \forall z \in H^\infty(\alpha)$).

故に、任意の $f \in L(R)$ に対し、

$$\alpha * f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \alpha_t(x) dt \in H^{\infty}(\alpha)_m$$

である。 $\alpha \notin H^{\infty}(\alpha)$ より $Sp_{\alpha}(\alpha) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$ 。即ち、

$\text{supp } \hat{f} \subset (-\infty, -\varepsilon]$ ($\varepsilon = \varepsilon_f > 0$) なる $f \in L(R)$ が存在

して $\alpha * f \neq 0$ である。 $Sp_{\alpha}(\alpha * f) \subset (-\infty, -\varepsilon]$ より

$Sp_{\alpha}((\alpha * f)^*) \subset [\varepsilon, \infty)$ であるから $(\alpha * f)^* \in H^{\infty}(\alpha)_{\overline{m}}$

である。 $\overline{m}$ は $H^{\infty}(\alpha) (\supset H^{\infty}(\alpha)_{\overline{m}})$ 上 multiplicative であるから、

$$\overline{m}((\alpha * f)^*(\alpha * f)) = \overline{m}((\alpha * f)^*) \overline{m}(\alpha * f) = 0。$$

$\overline{m}$ は faithful、故に $(\alpha * f)^*(\alpha * f) = 0$ 。これは $\alpha * f \neq 0$

に矛盾する。 [証明終]

§3. Periodic Modular Automorphism Group の場合。

von Neumann 環 M が period $T > 0$ の faithful homogeneous periodic state φ を持つとある。 $k = e^{-2\pi i/T}$ とする。 ここで、 homogeneous というのは、この state と不変な M 上の同型写像全体が M でエルゴード的 (この同型写像に関して不変な M の元はスカラーに限る) である事を言う。 σ^{φ} を modular automorphism group とする。 竹崎 [16] によれば次の結果が成り立つ。

(1) $M_0 = \{x \in M; \sigma_t^{\varphi}(x) = x\}$ は type II_1

(2) $M_n = \{x \in M; \sigma_t^{\varphi}(x) = k^{int} x\}$ に対し、

$$M = \cdots \oplus M_{-n} \oplus \cdots \oplus M_{-1} \oplus M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \cdots$$

(= の意味は、 $x \in M_1$ に対し、 $x\xi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n(x) \xi_n$ in ξ_0

ξ_0 は cyclic vector で、 $\varepsilon_n(x) = \frac{1}{T} \int_0^T k^{-int} \sigma_t^n(x) dt$ と言う事である。)

この時、 $M_n = M^{\sigma^n}(\{n\})$

$$H^\sigma(x) = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus \cdots$$

$$H^\sigma(x)_0 = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots$$

$$\Phi = \varepsilon_0 \quad \text{i.e.} \quad \Phi(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^n(x) dt$$

となり、 $H^\sigma(x)$ は Φ に関して subdiagonal (極大な) である。

尚、一般の periodic な場合については、K-S-斎藤 [14] の結果がある。

参考文献

- [1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89 (1967), 578 - 642
- [2] ———, On groups of automorphisms of operator algebras, J. of Functional Analysis, 15 (1974), 217 - 243.
- [3] R. Arens and I. M. Singer, Generalized analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc., 81 (1956), 379 - 393
- [4] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier

series in several variables, *Acta Math.*, 99 (1958), 165 - 202.

- [5] R. Kadison and I.M. Singer, Triangular operator algebras, *Amer. J. Math.*, 82 (1960), 227 - 259.
- [6] N. Kamei, Simply invariant subspace theorems for antisymmetric finite subdiagonal algebras, *Tôhoku Math. J.* 21 (1969), 467 - 473.
- [7] R.I. Loeb and P.S. Muhly, Reductive algebras and automorphism groups of von Neumann algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81 (1975), 759 - 761.
- [8] S. Kawamura and J. Tomiyama, On the subalgebras of analytic operators associated with a flow on an operator algebra (in preparation).
- [9] I. Kovács and J. Szűcs, Ergodic type theorems in von Neumann algebras, *Acta Sci. Math.*, 27 (1966), 233 - 246.
- [10] P.S. Muhly, Function algebras and flows I, *Acta Sci. Math.*, 35 (1973), 111 - 127.
- [11] ———, Function algebras and flow II, *Ark Math.* 11 (1973), 203 - 213.
- [12] ———, Function algebras and flow III, *Math. Z.*

136. (1974), 253 - 260.

- [3] ———, Function algebras and flow $\mathbb{N}$, (to appear)
- [4] K-S-Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra. (to appear)
- [5] 富山 淳, Function algebra & flow (数学に掲載予定)
- [6] M. Takesaki, The structure of a von Neumann algebra with a homogeneous periodic state, Acta Math., 131 (1973), 79-127.
- [7] M. Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Math. 128, Springer-Verlag, 1970.