

Eta Invariants and Chern-Simons Invariants

京大 理学部 坪井 堅二

§0. Introduction

定義

- 1) $M: C^\infty$ -manifold, $g, g': M$ 上の Riemannian metrics
 $g \sim g':$ conformally related
 $\Leftrightarrow_{\text{def.}} \exists f: M \rightarrow \mathbb{R}_+: C^\infty \text{ s.t. } g' = f \cdot g$
- 2) $(M, g), (M', g'): \text{Riemannian manifolds}$
 $(M, g) \cong (M', g'): \text{conformally isomorphic}$
 $\Leftrightarrow_{\text{def.}} \exists \varphi: M \xrightarrow{\cong} M': C^\infty\text{-diffeomorphism s.t. } g \sim \varphi^* g'$
- 3) $(M, g): \text{Riemannian manifold}$
 $g_0: \text{standard metric on } \mathbb{R}^N$
 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^N: \text{Conformal immersion}$
 $\Leftrightarrow_{\text{def.}} \varphi: C^\infty\text{-immersion } \text{ s.t. } g \sim \varphi^* g_0$

“conformal” は “isometric” よりも当然 弱い条件である。ただし $\text{isometric} \Rightarrow \text{conformally isomorphic}$,

conformal に immerse できない $\Rightarrow$ isometric に immerse できない etc..

Example

$$S^n - \{\text{one point}\} \cong \mathbb{R}^n$$

これは、よく知られているように stereographic projection による。

$M = (M, g)$: Riemannian manifold が ある codimension の Euclid 空間に $\hookrightarrow$ isometric (又は conformal) に immerse できるかという問題を考える。一般に “十分大きい” codimension でなる isometric に immerse できる (従って conformal にも immerse できる) ということはわかってはいるが、“あまり大きくない” codimension では、isometric に immerse できるかどうかは、入ることも入らないこともわからない場合が多い。Chern, Simons は [3], [9] において、Chern-Simons invariant 又は S -character と呼ばれる conformal invariant を定義して、それを用いて M が ある codimension の Euclid 空間に conformal に immerse できるための必要条件 (従って isometric に immerse できるための必要条件でもある) を与えた。Chern-Simons invariant は正定曲率の standard metric を与えた Lens space に対して、

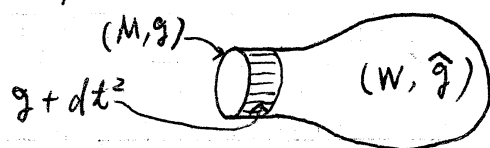
計算されている (Millson [7]) 他、bi-invariant metric を与えた globally symmetric space に対する Donnelly [4] の結果があるが、一般には具体的に計算することは困難な場合が多い。一方 Atiyah, Patodi, Singer は [1] において、closed oriented $4k-1$ -dimensional Riemannian manifold M に対して、その Eta invariant と呼ばれる実数を定義した。Eta invariant は manifold の種類、metric の種類という両面において、Chern-Simons invariant よりも広い計算の可能性をもっている。そこで、Chern-Simons invariant と Eta invariant とを結びつけることにより、closed oriented $4k-1$ -dimensional Riemannian manifold M がある codimension の Euclid 空間に conformal に immerse できるための必要条件を Eta invariant によって表現し、それを用いて新しい "nonvanishing Chern-Simons invariant" の例をつくることがここにおける話題である。

§1. Chern-Simons invariant

以下 $M = (M, g)$: closed oriented $4k-1$ -dimensional Riemannian manifold とする。 $\dim M \not\equiv 0 \pmod{4}$ であるから、よく知られているように、 M は $2M = M \cup M$ は oriented cobordism の意味において、zero-cobordant

である。そこで以下簡単のため、 M : zero-cobordant とする。 M : not zero-cobordant の場合は M の代りに $2M$ をとることにより、以下の議論は全く同様に成り立つ。

W : compact oriented $4k$ -dimensional manifold with boundary M とする。 W には $\partial W = M$ の適当な collar neighborhood $M \times [0, 1]$ で M の metric g と $[0, 1]$ の standard metric dt^2 の product $g + dt^2$ に近いような metric $\hat{g}$ を任意にひとつとる。(partition of unity により、上のような $\hat{g}$ をつくることは可能である。)



P_i : i -th Pontrjagin polynomial

$Q = Q(a_1, \dots, a_k)$: $\mathbb{Z}$ -coefficient polynomial of weight k (i.e. $Q(a_1^4, a_2^8, \dots, a_k^{4k})$: homogeneous of degree $4k$) とする。このとき、

$Q(P(\hat{g})) = Q(P_1(\hat{g}), \dots, P_k(\hat{g}))$: $4k$ -form on W

定義

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \ni SQ(P_1, \dots, P_k)(M, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_W Q(P(\hat{g}))$
(ここで $\int_W$ は mod $\mathbb{Z}$ reduction)

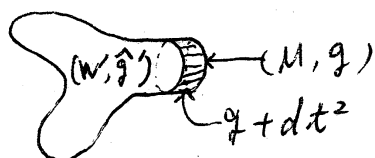
これを $Q(P_1, \dots, P_k)$ に対する (M, g) の Chern-Simons invariant と呼ぶ。

claim 1

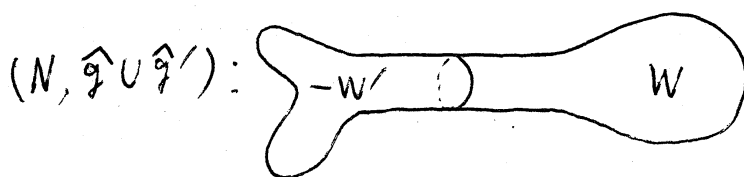
$SQ(P_1, \dots, P_k)(M, g)$ は W , W における M の collar neighborhood のとき, collar neighborhood における product metric の W への拡張 $\hat{g}$ のとき W に depend せず, (M, g) によって決まる。

(proof)

$(W', \hat{g}')$: another pair とする。



$N \equiv W \cup_M (-W')$: closed oriented $4k$ -dimensional manifold とするとき, $\hat{g}, \hat{g}'$ に対する境界条件より, $\hat{g}, \hat{g}'$ をつなぐことによって N 上の smooth な Riemannian metric $\hat{g} \cup \hat{g}'$ が定義される。



このとき,

$$\begin{aligned} & \int_W Q(P(\hat{g})) - \int_{W'} Q(P(\hat{g}')) \\ &= \int_N Q(P(\hat{g} \cup \hat{g}')) : N \text{ の Pontryagin } Q\text{-number} \\ & \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{従って, } \overline{\int_W Q(P(\hat{g}))} = \overline{\int_{W'} Q(P(\hat{g}'))}$$

Q. E. D.

claim 2

$SQ(P_1, \dots, P_k)(M, g)$ は (M, g) の conformal structure
 のみに depend する。すなわち、 g, g' を M 上の conformally
 related な metrics とするとき、 $SQ(P_1, \dots, P_k)(M, g)$
 $= SQ(P_1, \dots, P_k)(M, g')$ である。

(proof)

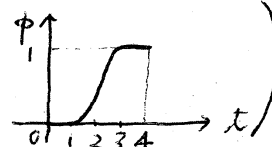
$f: M \longrightarrow \mathbb{R}_+ : C^\infty$ s.t. $g' = f \cdot g$ とする。

1st. step

$M \times [0, 4]$ の metric $\tilde{g}$ を次のように定める。

$M \times [0, 4] \ni \forall (x, t)$ に対して

$$\tilde{g}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \phi(t) + (1 - \phi(t)) f(x) \} (g(x) + dt^2)$$

(ただし、 $\phi: [0, 4] \longrightarrow [0, 1] : C^\infty$ 
 $\phi|_{[0, 1]} \equiv 0, \phi|_{[3, 4]} \equiv 1$)

このとき、 $\tilde{g} \sim g + dt^2 : \text{conformally related}$ である。

Pontrjagin forms は conformal invariant である (c.f.
 [3]) ため、

$$\begin{aligned} & \int_{M \times [0, 4]} Q(P_1(\tilde{g}), \dots, P_k(\tilde{g})) \\ &= \int_{M \times [0, 4]} Q(P_1(g + dt^2), \dots, P_k(g + dt^2)) \end{aligned}$$

($\because q: M \times [0, 4] \longrightarrow M : \text{projection}$ とし、
 $P_i(g + dt^2) = q^* P_i(g)$ であるから、
 $Q(P(g + dt^2)) = q^* Q(P(g)) = 0$ ($\because \deg Q(P(g)) > \dim M$))

= 0

2nd. step

$M \times [0, 4]$ の metric $\tilde{g}$ を次のように定義する。

$M \times [0, 4] \ni v(x, t)$ に対して。

$$\tilde{g}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)g(x) + \{(1-\phi(t)) + \phi(t)f(x)\} dt^2$$

このとき、 $\forall i$ に対して $P_i(\tilde{g})$ は dt を含まない。

$$\text{従って、} \int_{M \times [0, 4]} Q(P(\tilde{g})) = 0$$

⊙ $4k = n$, $(1-\phi(t)) + \phi(t)f(x) = \gamma(x, t) (> 0)$ と書く。

$M \supset U$, $X_1, \dots, X_{n-1} : U$ 上の $g' = f \cdot g$ に関する orthonormal vector fields, $X_n = \frac{1}{\sqrt{\gamma(x, t)}} \frac{\partial}{\partial t}$ とする。このとき、

$\{X_1, \dots, X_{n-1}, X_n\}$ は $\tilde{g}$ に関する $U \times [0, 4]$ 上の orthonormal vector fields である。この local basis に関して。

$\tau : U \times [0, 4] \longrightarrow O(M \times [0, 4])$ を $M \times [0, 4]$ の orthonormal frame bundle $O(M \times [0, 4])$ への local

section とする。このとき、 $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$: dual 1-forms of

$\{X_1, \dots, X_n\}$ とし、 $\tau^* \Omega_{ij} = \sum_{k < l} R_{ijkl} X_k^* \wedge X_l^*$ であった。

($\tau^* \Omega = (\Omega_{ij}) : \tilde{g}$ に対する curvature form
 R_{ijkl} : curvature tensor の成分

Lemma

$1 \leq i, j, k \leq n-1$ のとき、 $R_{ijkn} = 0$

(proof of Lemma)

$$(*) \quad 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow \nabla_{X_i} X_n = 0$$

$$\textcircled{1} \quad X_i = \sum_{m=1}^{n-1} \xi_i^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m} \quad (x_1, \dots, x_{n-1}: U \text{ の local coordinate})$$

とする。 $\langle, \rangle$ は $\tilde{\mathcal{F}}$ による内積とす。

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_i} X_n, X_k \rangle &= \frac{1}{2} \{ X_i \langle X_n, X_k \rangle + X_n \langle X_i, X_k \rangle - X_k \langle X_i, X_n \rangle \\ &+ \langle [X_i, X_n], X_k \rangle + \langle [X_k, X_i], X_n \rangle + \langle [X_k, X_n], X_i \rangle \} \end{aligned}$$

case 1 $1 \leq k \leq n-1$ の場合

$$\langle \nabla_{X_i} X_n, X_k \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle [X_i, X_n], X_k \rangle + \langle [X_k, X_n], X_i \rangle \}$$

$$(\because [X_i, X_n] = \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \xi_i^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma(x, x)}} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x^k} \text{ であるから})$$

$$= 0$$

case 2

$$\langle \nabla_{X_i} X_n, X_n \rangle = -\langle X_n, \nabla_{X_i} X_n \rangle \quad (\text{従って}) = 0$$

以上で $(*)$ が示された。

$$\begin{aligned} R_{ijkn} &= -R_{ijnk} = -\langle \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_n - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_n - \nabla_{[X_i, X_j]} X_n, \\ &X_k \rangle = 0 \end{aligned}$$

Lemma Q.E.D.

Lemma による。次の 2つがわかる。(2* $\Omega \in \mathcal{F}$ の Ω と

書くことにする)

$$(i) \quad 1 \leq i, j \leq n-1 \Rightarrow \Omega_{ij} \text{ は } dt \text{ を含まない。}$$

$$(ii) \quad \Omega_{in} = \sum_{k=1}^{n-1} R_{inkn} X_k^* \wedge X_n^* = \left(\sum_{k=1}^{n-1} R_{inkn} X_k^* \right) \wedge X_n^*$$

$$\text{従って } \Omega_{in} \wedge \Omega_{jn} = 0 \quad \text{for } 1 \leq i, j \leq n$$

$$\begin{aligned} \text{また } (2\pi)^i P_i(\tilde{\mathcal{F}}) &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{2i} \leq n} \sum_{\tau \in \mathcal{S}(2i)} \text{sgn}(\tau) \Omega_{j_1 j_{\tau(1)}} \wedge \dots \\ &\wedge \Omega_{j_{2i} j_{\tau(2i)}} = (\text{dt を含まない項}) + \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{2i-1} \leq n-1} \sum_{\tau \in \mathcal{S}(2i)} \text{sgn}(\tau) \end{aligned}$$

Key Theorem

M n codimension d で $\mathbb{R}^{4k-1+d}$ に conformal に
immerse できる。 $\Rightarrow SQ(P_1^\perp, \dots, P_k^\perp)(M, g) = 0$
for $\forall s \geq [\frac{d}{2}] + 1$ & $\forall Q: \mathbb{Z}$ -coeff. poly. of weight k

Key Theorem の一番強い形として $s=k$ とおいて
次の corollary が出る。

Corollary

M n codimension $2k-1$ で $\mathbb{R}^{6k-2}$ に conformal に
immerse できる。 $\Rightarrow SP_k^\perp(M, g) = 0$

§2. Eta invariant

定義

L_k : Hirzebruch L -polynomial の weight k term
 $\text{Sign}(W)$: cup product によって定義される symmetric
bilinear form $H^{2k}(W, \mathcal{O}W; \mathbb{R}) \otimes H^{2k}(W, \mathcal{O}W; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ の
signature とする。

$\mathbb{R} \ni \eta(M) (= \eta(M, g)) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_M L_k(P_1(\hat{g}), \dots, P_k(\hat{g})) - \text{Sign}(W)$
とあり (M, g) の Eta invariant と呼ぶ。

claim

$\eta(M)$ は (M, g) の conformal structure のみで決まる。

(proof)

記号は §1. claim 1 の (proof) と同じとする。

$(W', \hat{g}')$: another pair とするとき.

$N = (W \cup_M (-W'), \hat{g} \cup \hat{g}')$: closed oriented $4k$ -dimensional
である。Hirzebruch Signature Theorem により.

$$\int_N L_k(P(\hat{g} \cup \hat{g}')) = \text{sign}(N)$$

$$\text{一方 } \int_N L_k(P(\hat{g} \cup \hat{g}')) = \int_W L_k(P(\hat{g})) - \int_{W'} L_k(P(\hat{g}'))$$

$$\text{sign}(N) = \text{sign}(W) - \text{sign}(W') \quad \text{である。}$$

$$\int_W L_k(P(\hat{g})) - \text{sign}(W) = \int_{W'} L_k(P(\hat{g}')) - \text{sign}(W')$$

Conformal structure のみで決まることは §1. claim 2
と同様にして示せる。 Q. E. D.

この定義のままでは、Eta invariant は $\text{sign}(W)$
という項がたった分だけ、例えば Chern-Simons
invariant よりも計算が困難になってしまう。しかし、
ここで、Atiyah, Patodi, Singer [1] にある次の結果がある。

Theorem

$\Gamma = C^\infty(M, \bigoplus \wedge^{2p} T^*M)$: even forms on M

$D: \Gamma \rightarrow \Gamma$: first order self-adjoint elliptic
differential operator defined by

$$D\phi = (-1)^{k+p+1} (*d - d*)\phi \quad \text{for } 2p\text{-form } \phi$$

(ここに $*$: Hodge's star operator)

λ : eigenvalue of D with finite multiplicity $m(\lambda)$
 とする。 $\forall s \in \mathbb{C}$ に対して $\zeta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \neq 0} \text{sign}(\lambda) \cdot m(\lambda) |\lambda|^{-s}$
 ($\text{sign}(\lambda) = 1$ if $\lambda > 0$, -1 if $\lambda < 0$) とおくと、
 $\text{Re}(s)$ が十分大なるとき $\zeta(s)$ は絶対収束して、
 holomorphic function を表わす。さらに $\zeta(s)$ は meromorphic
 function として全平面に解析接続され 0 は pole にもたない。
 このとき $\zeta(M, g) = \zeta(0)$ が成り立つ。

上の Theorem により $\zeta(M)$ には Chern-Simons invariant
 による計算の可能性が開ける。例えば、 M が
 orientation-reversing isometry をもつ Riemannian
 manifold を有限群の free action で割った商空間として
 いる場合には $\zeta(M)$ は Atiyah, Singer の G -signature
 formula により計算されることを [5] で示された。

Example

$p \geq 1$, $q_1, \dots, q_{2k}$: relatively prime to p として
 $M = L(p; q_1, \dots, q_{2k}) = S^{4k-1}/\sim$: Lens space
 $(\mathbb{C}^{2k} \cap S^{4k-1}) \ni (z_1, \dots, z_{2k}) \sim (e^{\frac{2\pi i \cdot 1}{p} q_1} z_1, \dots, e^{\frac{2\pi i \cdot 1}{p} q_{2k}} z_{2k})$
 とする。 M の metric g は次の条件を満たす限り任意で
 よいとする。(正定曲率の standard metric である
 S^{4k-1} の standard metric が induce された metric

は条件を $BA3$ かに満たして (2.11.3.)

(*) $\gamma: S^{4k-1} \longrightarrow M$: covering projection 2.12.

(S^{4k-1}, γ^*g) は orientation-reversing isometry $\exists \in \mathbb{Z}$.

このとき、

$$(**) \quad \eta(M) = \frac{(-1)^k}{P} \sum_{s=1}^{P-1} \prod_{j=1}^{2k} \cot \frac{s g_j \pi}{P}$$

とある. (c.f. [10] §1)

§3. Eta invariants and Chern-Simons invariants

定義

$$N_k \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ n \in \mathbb{N} \mid n \cdot L_k : \mathbb{Z}\text{-coeff. poly.} \}$$

$$= \prod_{\substack{p: \text{prime}, \\ 3 \leq p \leq 2k+1}} p^{\lfloor \frac{2k}{p-1} \rfloor}$$

$$(N_1=3, N_2=45 \text{ etc})$$

$$(1 + P_1 + \dots + P_i + \dots)(1 + P_1^\perp + \dots + P_i^\perp + \dots) = 1$$

$$\Rightarrow P_i = -P_i^\perp - P_{i-1}^\perp P_1 - \dots - P_1^\perp P_{i-1}$$

で表す. induction による. $\exists Q_k: \mathbb{Z}\text{-coeff. poly.}$
of weight k s.t. $N_k \cdot L_k(P_1, \dots, P_k) = Q_k(P_1^\perp, \dots, P_k^\perp)$

このとき、

$$SQ_k(P_1^\perp, \dots, P_k^\perp)(M, g) = \overline{\int_W Q_k(P_1^\perp(\hat{g}), \dots, P_k^\perp(\hat{g}))}$$

$$= N_k \overline{\int_W L_k(P_1(\hat{g}), \dots, P_k(\hat{g}))}$$

$$= N_k \{ \overline{\int_W L_k(P(\hat{g}))} - \text{sign}(W) \} = N_k \cdot \eta(M)$$

従って Key Theorem により、次の結果が出る。

Proposition

M が codimension l で $\mathbb{R}^{4k}$ に conformal に
immerse できる $\Rightarrow \overline{N_k \cdot \eta(M)} = 0$ i.e. $N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z}$

($\times$)C. codimension l には あまり おも(3)くないので、
もっと codimension を上げること考える。

$$Q_k(P_1^\perp, \dots, P_k^\perp) = n_k P_k^\perp + (\text{decomposable part of } P_1^\perp, \dots, P_{k-1}^\perp) \quad (\exists n_k \in \mathbb{Z})$$

$$\left(P_i^\perp = -P_i - P_{i-1} P_1^\perp - \dots - P_1 P_{i-1}^\perp \text{ とい} \right)$$

induction により.

$$= n_k P_k^\perp + \underbrace{(\text{decomposable part of } P_1, \dots, P_{k-1})}_{\otimes}$$

$$\begin{aligned} \text{よ} \text{し} \text{と} \text{し} \quad \overline{N_k \cdot \eta(M)} &= S Q_k(P_1^\perp, \dots, P_k^\perp)(M, g) \\ &= n_k \cdot S P_k^\perp(M, g) + S(\otimes)(M, g) \end{aligned}$$

定義

(M, g) : partially Pontrjagin flat

$\Leftrightarrow R(P_1(\Omega), \dots, P_l(\Omega)) = 0$ as differential

$4l$ -form on M for $\forall R$: monomial of weight

$l \geq [\frac{k+l}{2}]$ (ここで $P_i(\Omega)$: M の metric g に $\times$ した

M 上の i -th Pontrjagin form)

Lemma (c.f. [10] §3)

(M, g) : partially Pontrjagin flat $\Leftrightarrow$ である。

(i) $\pi: O(M) \rightarrow M$: orthonormal frame bundle $\Leftrightarrow$ である。

$\pi^*: H^{4k-1}(M; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^{4k-1}(O(M); \mathbb{R}/\mathbb{Z})$: injective

$$\Rightarrow S(\otimes)(M, g) = 0$$

(ii) $H^{4i}(M; \mathbb{Z}) \ni p_i(TM)$: i -th Pontrjagin class of

TM $\Leftrightarrow$ である。 $\exists c \in \mathbb{N}$ s.t. $c p_i(TM) = 0$ for $1 \leq i \leq [\frac{k}{2}]$

$$\Rightarrow c \cdot S(\otimes)(M, g) = 0$$

Remarks

1) (M, g) : conformally flat i.e. flat ∇ Euclid
空間 $\subset$ local に conformally isomorphic

$\Rightarrow p_i(\Omega) = 0$ for $\forall i \geq 1 \Rightarrow (M, g)$: partially Pontrjagin
flat

2) M : parallelizable $\Rightarrow \pi^*: H^*(M; A) \rightarrow H^*(O(M); A)$
: injective for $\forall g$, $\forall A$: abelian group

3) M : stably parallelizable $\Rightarrow p_i(TM) = 0$ for $\forall i \geq 1$

key Theorem の Corollary 及び 上の Lemma によつて。
以下の結果が出る。

Theorem 1

(M, g) : partially Pontrjagin flat $\Leftrightarrow$ である。

$\pi^*: H^{4k-1}(M; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^{4k-1}(O(M); \mathbb{R}/\mathbb{Z})$: injective

と仮定する。このとき、

M が codimension $2k-1$ で $\mathbb{R}^{6k-2}$ に conformal に immerse できる。

$$\Rightarrow \begin{cases} N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M: \text{zero-cobordant} \\ 2N_k \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M: \text{not zero-cobordant} \end{cases}$$

特に $k=1$ となつて $\dim M=3$ の場合を考える。

よく知られてゐるように、 M^3 : zero-cobordant, parallelizable で Theorem 1 の仮定を満たす。 $N_1=3$ である。

Corollary

3-dimensional closed oriented Riemannian manifold M が $\mathbb{R}^4$ に conformal に immerse できる。

$$\Rightarrow 3 \cdot \eta(M) \in \mathbb{Z}$$

一方, Hirsh - Smale theory によつて M は smooth には必ず $\mathbb{R}^4$ に immerse できる。

Theorem 2

M : partially Pontrjagin flat かつ $\exists C \in \mathbb{N}$
 s.t. $C \cdot p_i(TM) = 0$ for $1 \leq i \leq [\frac{k}{2}]$ と仮定する。

このとき.

M が $\mathbb{R}^{6k-2}$ に conformal に immerse できる。

$$\Rightarrow \begin{cases} c N_k(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M: \text{zero-cobordant} \\ 2c N_k(M) \in \mathbb{Z} & \text{if } M: \text{not zero-cobordant} \end{cases}$$

(注 c は even のときには, M は not zero-cobordant であるとしても $c N_k(M) \in \mathbb{Z}$ であることがいえる。)

§4. Examples

Example 1

3次元正定曲率空間は完全に分類されており、 S^3 を巡回群、たいてい意味での複多面体群 または それらの直積で割ったものしかない。 S^3 を巡回群で割ったものすなわち、Lens space については Millson が [7] において、その Chern-Simons invariant を調べているので、ここでは、複多面体群で割ったものについて調べてみる。 metric も正定曲率の standard metric を含む、もう少し一般的な metric を考えることにする。

$S^3 = \text{Lie group of length one quaternions}$

$$\alpha: S^3 \cong SU(2)$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ z_1 + z_2 j & \mapsto & \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1)$$

$S^3 \supset G: \text{finite subgroup}$ とし、 G は S^3 上 right

multiplication により作用するものとす。

商空間 S^3/G には次の条件を満たす metric g を任意に与えられる。 S^3 の standard metric γ を induce される 正定曲率の metric なる 場合だけにこの条件を満たす。

$\gamma: S^3 \rightarrow S^3/G$: covering projection として。

(S^3, γ^*g) は orientation-reversing isometry を含む

$G \ni h$ に対し $e^{\theta(h)}, e^{-\theta(h)}$: eigenvalues of $\alpha(h)$

とすれば, $(S^3/G, g)$ の Eta invariant は次の式で計算される。

$$\textcircled{*} \eta(S^3/G) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \neq 1} \cot^2\left(\frac{\theta(h)}{2}\right) \quad (|G|: \text{order of } G)$$

G として次の3つを考える。(cf. 中国[8])

$$O^* = \{ \text{generated by } P=i, Q=j, B=-\frac{1+i+j+k}{2}, R=\frac{i-k}{\sqrt{2}} \}$$

$$\cong \text{八重 8 面体群} \quad (|O^*| = 48)$$

$$T^* = \{ \text{subgroup of } O^* \text{ generated by } P, Q, B \}$$

$$\cong \text{八重 4 面体群} \quad (|T^*| = 24)$$

$$I^* = \{ \text{generated by } U=\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{5}+1}{4}j, V=-i \}$$

$$\cong \text{八重 20 面体群} \quad (|I^*| = 120)$$

このとき、 $\textcircled{*}$ により $\eta(S^3/T^*), \eta(S^3/O^*), \eta(S^3/I^*)$ を計算本幾で求めることができる。

$$\eta(S^3/T^*) = 1.36111\cdots, \quad \eta(S^3/O^*) = 1.68055\cdots$$

$$, \quad \eta(S^3/I^*) = 2.00555\cdots$$

従って Theorem 1 の Corollary によらず S^3/T^* , S^3/U^* , S^3/I^* は いずれも $\mathbb{R}^4$ に conformal に immerse できない。

Example 2

$$L^{15} = L(137; 1, 10, 100, 41, 136, 127, 37, 96)$$

: 15-dimensional Lens space とおく。

これは Millson が [7] にあいて、正定曲率の standard metric を与えた Lens space の Chern-Simons invariant を調べたときに用いた Example である。ここでは、

L^{15} の metric g は次の条件を満たす限り任意である。(standard metric は明らかにこの条件を満たす)

(i) $\gamma: S^{15} \rightarrow L^{15}$: covering projection とし、

(S^{15}, γ^*g) : orientation-reversing isometry をもつ

(ii) g : partially Pontrjagin flat

このとき、 $\eta(L^{15})$ は §2 の一番最後の formula で計算

できる。一方 Ewing, Moolgavkar, Smith, Stong [6] の

結果によらず L^{15} : stably parallelizable とおける。従って

$\eta_i(TL^{15}) = 0$ for $\forall i \geq 1$ であり Theorem 2 で $C=1$ とおける。

$N_4 = 14175$ であるから、 $2CN_4\eta(L^{15}) \bmod \mathbb{Z} = 0.8759\dots$

従って L^{15} は codimension 7 で $\mathbb{R}^{22}$ に conformal に

immerse できない。一方 L^{15} は stably parallelizable であるから、

Hirsch-Smale theory によらず $\mathbb{R}^{16}$ に smooth に immerse できる。

References

- [1] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer,
Spectral asymmetry and Riemannian geometry I,
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 77(1975), 43-69.
- [2] M. F. Atiyah and I. M. Singer,
The index of elliptic operators III,
Ann. of Math. 87(1968), 546-604.
- [3] S. S. Chern and J. Simons,
Characteristic forms and geometric invariants,
Ann. of Math. 99(1974), 48-69.
- [4] H. Donnelly, Chern-Simons invariants of
reductive homogeneous spaces,
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 227(1977), 141-164.
- [5] H. Donnelly, Eta invariants for G -spaces,
Indiana Univ. Math. J. 27(1978), 889-918.
- [6] J. Ewing, S. Moolgavkar, L. Smith and R. E. Stong,
Stable parallelizability of Lens spaces,
J. Pure Appl. Algebra 10(1977), 177-191.
- [7] J. J. Millson, Examples of nonvanishing Chern-Simons invariants, J. Differential Geometry 10(1974), 589-600.

- [8] 中岡稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店 (1977)
- [9] J. Simons, Characters associated to a connection, preprint
- [10] K. Tsuboi, Eta invariants and conformal immersions, preprint