

Dehn twist presentations of finite group actions on oriented surfaces of genus 3

廣瀬 進 (東京理科大学理工学部)

種数 g の有向閉曲面 Σ_g 上の向きを保つ同相写像の集合 $\text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ は、写像の合成を積演算とすることで、自然に群とみなすことができる。なお、ここでは、 $f_1, f_2 \in \text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ に対して、 $f_1 f_2 \in \text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ は、 f_1 を作用させ、その後 f_2 を作用させるものとする。さらに、互いに isotopic なものを同一視してできる集合に、 $\text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ の積演算から自然に定まる積演算により群とみなしたものを Σ_g の写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ と呼ぶ。 Σ_g 上の単純閉曲線 c に沿って Σ_g を切って、境界を一回転させてま

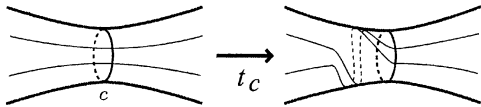


FIGURE 1

た張り合わせる事で得られる Figure 1 の様な Σ_g 上の同相写像が代表する $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の元を c に沿った Dehn twist と呼び t_c と表す。Dehn [3] と Lickorish [9] により、 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ が Dehn twist により生成される事が示されている。一方、Dehn twist の積として表された写像の基本群やホモロジー群への作用は理解しやすいため、曲面上の向きを保つ同相写像を Dehn twist の積で表す事は写像を理解する上で有用であると考えられる。

周期的写像の Dehn twist 表示は、hyperelliptic involution と可換な写像については、石坂瑞穂氏 [5] によって完全に求められている。また、種数が 4 以下の場合には、[4] において求められている。一方、種数が 2 の閉曲面上の有限群作用の Dehn twist 表示が中西敏浩氏と中村豪氏 [10] により求められている。このノートでは種数 3 の閉曲面上の有限群作用の Dehn twist 表示について紹介する。

1. Σ_3 上の周期的写像の DEHN TWIST 表示について

この節では、 Σ_3 上の周期的写像の Dehn twist 表示について述べる。

まずは、Nielsen による周期的写像の分類について述べる。曲面 Σ_g 上の写像 f が **周期的 (periodic)** であるとは、1 以上の整数 n で $f^n = \text{id}_{\Sigma_g}$ なるものが存在することであり、そのような n の内、最小の数を f の **周期 (period)** とよぶ。

いま、 n を Σ_g 上の周期的写像 f の周期であるとする。 Σ_g 上の点は f を n 回作用させることによって元の位置に戻ってくる。ほとんどすべての点に対して、その作用

This research is supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (No. 16K05156), Japan Society for the Promotion of Science.

は n 回必要であるが, 中には途中で元の位置に戻ってくるような点がある. つまり, 曲面 Σ_g 上のある点 p に対して, $0 < k < n$ なる整数 k で $f^k(p) = p$ となるものが存在してしまうのだが, この p のことを f の **multiple point** とよぶ. また, M_f で f の multiple point 全体の集合を表す.

曲面 Σ_g の点の内, f でうつりあうものを同一視してできる空間を Σ_g/f であらわし, f の **軌道空間 (orbit space)** という. このとき, Σ_g の点 p に対して, Σ_g/f の点で p の代表するもの $[p]$ を対応づける写像 π_f を考えると, これは n 重分岐被覆となっている. すなわち, Σ_g/f のほとんど全ての点の上で π_f は通常の n 重被覆であるが, $[f \text{ の multiple point }] \in \Sigma_g/f$ において分岐している. そこで, $[f \text{ の multiple point }]$ を f の **branch point** と呼び, $B_f (= \pi_f(M_f))$ で f の branch point 全体の集合をあらわす. このとき, $\pi_f|_{\Sigma_g \setminus M_f} : \Sigma_g \setminus M_f \rightarrow (\Sigma_g/f) \setminus B_f$ は通常の n 重被覆となっている.

この n 重被覆を記述する準同型 $\Omega_f : \pi_1((\Sigma_g/f) \setminus B_f, x) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ を次の通り定める. まず, $\pi_f(\tilde{x}) = x$ なる Σ_g の点 $\tilde{x}$ を一つ決める. 基本群 $\pi_1((\Sigma_g/f) \setminus B_f, x)$ の元は $(\Sigma_g/f) \setminus B_f$ 内の loop $l : [0, 1] \rightarrow (\Sigma_g/f) \setminus B_f$ で $l(0) = l(1) = x$ となるものによって代表される. この loop l の Σ_g 上への lift $\tilde{l} : [0, 1] \rightarrow \Sigma_g$ で $\tilde{l}(0) = \tilde{x}$ なるものを考えると, $\pi_f(\tilde{l}(1)) = l(1) = x$, つまり $\tilde{l}(1)$ は $\tilde{l}(0) = \tilde{x}$ の f による軌道上にあるので, 整数 k で $f^k(\tilde{x}) = \tilde{l}(1)$ なるものがある. そこで, $\Omega_f([l]) = k \in \mathbb{Z}_n$ と定める. このとき, $\mathbb{Z}_n$ が可換群であるため $\pi_1((\Sigma_g/f) \setminus B_f, x)$ の可換化すなわち $H_1((\Sigma_g/f) \setminus B_f)$ から $\mathbb{Z}_n$ への準同型 ω_f が Ω_f から誘導される.

2つの Σ_g 上の周期的写像 f, f' に対して, 同相写像 g で $f' = g \circ f \circ g^{-1}$ なるものが存在するとき, f と f' とが**共役 (conjugate)** であるという. (ちなみに, Nielsen の論文では topologically equivalent と呼ばれている.)

周期的写像 f の branch point たち $B_f = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_b\}$ について, Q_i を中心とする (他の branch point を囲まない程度に) 十分小さい円周に時計回りの向きを入れたものを S_{Q_i} とする.

Theorem 1. [11] 閉曲面 Σ_g 上の2つの周期的写像 f, f' が共役であるための必要十分条件は次の3条件である.

- (1) f の周期 $= f'$ の周期,
- (2) B_f の点の個数 $= B_{f'}$ の点の個数,
- (3) $B_{f'} = \{Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_b\}$ の点の番号付けを適当にかえれば, 各 i について $\omega_f(S_{Q_i}) = \omega_{f'}(S_{Q'_i})$ が成り立つ. □

この定理より, $n = f$ の周期, $\theta_i = \omega_f(S_{Q_i})$ と定めると, $\left(n, \frac{\theta_1}{n} + \dots + \frac{\theta_b}{n}\right)$ で f の共役類が完全に記述される. この記述法は [1] で導入され, total valency と呼ばれる.

閉曲面 Σ_3 上の周期的写像の Dehn twist 表示を, 次の通りに求めることができた.

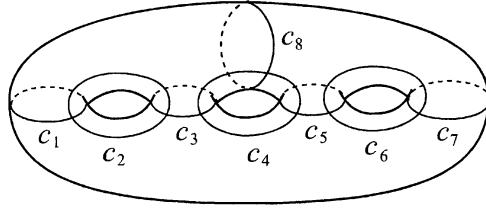


FIGURE 2

Theorem 2. [4] 閉曲面 Σ_3 上の周期的写像は、次の写像のベキと共役である.

$$\begin{aligned} f_{3,1} &= \left(14, \frac{1}{14} + \frac{3}{7} + \frac{1}{2}\right), f_{3,2} = \left(12, \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{2}\right), f_{3,3} = \left(8, \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4}\right), \\ f_{3,4} &= \left(4, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right), f_{3,5} = \left(2, \right), f_{3,6} = \left(12, \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3}\right), f_{3,7} = \left(8, \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8}\right), \\ f_{3,8} &= \left(9, \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{5}{9}\right), f_{3,9} = \left(7, \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}\right). \end{aligned}$$

更に、これらの周期的写像は次のとおり *Dehn twist* 表示される. 但し、 k は Figure 2 における単純閉曲線 c_k に沿った *Dehn twist* を表す.

$$\begin{aligned} f_{3,1} &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, & f_{3,2} &= 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, & f_{3,3} &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \\ f_{3,4} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^3, \\ f_{3,5} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot (7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^5, \\ f_{3,6} &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8, & f_{3,7} &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8, & f_{3,8} &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8, \\ f_{3,9} &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8. \end{aligned}$$

2. Σ_3 上の MAXIMAL な有限群作用とその DEHN TWIST 表示

有限群 G から $\text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ への単射 ϵ が存在するとき G が Σ_g に作用するという. G の生成系 $\{g_1, \dots, g_k\}$ に対して $\epsilon(g_i)$ は周期的写像となっており、 $\epsilon(g_i)$ の isotopy 類の *Dehn twist* による表示を、 G の作用の *Dehn twist* 表示と呼ぶこととする. 有限群 G の Σ_g への作用 $\epsilon_1, \epsilon_2 : G \rightarrow \text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ が同値であるとは、 G の自己同型 ω と Σ_g の向きを保つ同相写像 h で、各 $g \in G$ に対して、 $\epsilon_2(g) = h^{-1}\epsilon_1(\omega(g))h$ をみたす m のものが存在する事である. 有限群 G の部分群 H と G の Σ_g への作用 $\epsilon : G \rightarrow \text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ に対して、 $\epsilon|_H : H \rightarrow \text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ を ϵ の**部分群作用**と呼ぶ. (G, ϵ) について、*Dehn twist* 表示が求められれば、その部分群作用 $(H, \epsilon|_H)$ の *Dehn twist* 表示が得られる事から、以下では、有限群作用の包含関係のもと maximal な有限群作用について *Dehn twist* 表示を求める. なお、ここでの *Dehn twist* 表示の検証は阿原一志氏 (明治大学) 逆井卓也氏 (東京大学) 鈴木正明氏 (明治大学) の開発された T4M7 (Teruaki for Mathematica 7)*を用いて行った.

* <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~sakasai/MCG/MCG.html> よりダウンロードできます.

Broughton により種数 3 の有向閉曲面 Σ_3 上の有限群作用の分類がされており [2], それを基に次がわかる:

Proposition 3. Σ_3 上の有限群作用は, 次の群の作用の部分群作用である:

$\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{14}, D_{2,12,5}, \mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8), \mathbb{Z}_2 \times S_4, \mathbb{Z}_2 \ltimes SL_2(3), S_3 \ltimes (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4), PSL_2(7).$

Σ_3 への他の有限群作用が, これらの有限群作用のいかなる部分群作用となっているかについては §3 で述べる.

Remark 4. 1. 一般に有限群 G について, その Σ_g への作用は一意ではないが, 上記の 8 種の群の Σ_3 への作用は (同型なものを同一視すれば) 一意である.

2. 巡回群 $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{14}$ の作用については, 既に [4] で Dehn twist 表示が求められている.

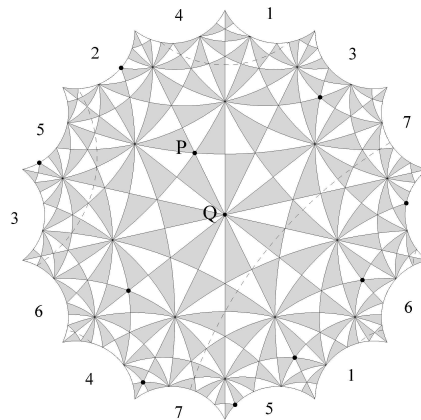


FIGURE 3. Klein の論文 [8] の図版を編集. 同じ番号の辺を同一視すると Σ_3 になる. グレーの 3 角形と白の 3 角形を 1 つずつ合わせたものが Klein 4 次曲線の自己同型群の作用の基本領域である.

2.1. $PSL_2(7)$ の Dehn twist 表示. Hurwitz により, 写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_g)$ の有限位数部分群の位数は $84(g-1)$ 以下である事が示されている. 種数 $g=3$ の場合は, 位数が丁度 $84(3-1) = 168$ である $\mathcal{M}(\Sigma_3)$ の部分群の存在が知られており, それは, Klein 4 次曲線 $\{(x:y:z) \in \mathbb{CP}^2 \mid x^3y + y^3z + z^3x = 0\}$ の自己同型群であり, $PSL_2(7)^\dagger$ と同型である. Figure 3 において P を中心とする時計回りの $1/3$ 回転を G とし, Q を中心とする時計回りの $1/7$ 回転を F としたとき, Klein 4 次曲線の自己同型群は F と G で生成され, その関係式は $F^7 = G^3 = (GF)^2 = (GFG^{-1}F^{-1})^4 = 1$ となっている. Figure 3 において, 同じ番号の辺を同一視し, さらに 3 つの基本領域をまとめて一つの 3 角形とする (例えば点 P の周りの 6 つの 3 角形を一つにまとめたものが A と書

[†] $\mathbb{Z}_7$ を成分とする 2 次の正方行列 A で $\det(A) = 1$ を満たすもののなす群を, $\{\pm E_2\}$ で割って出来る群

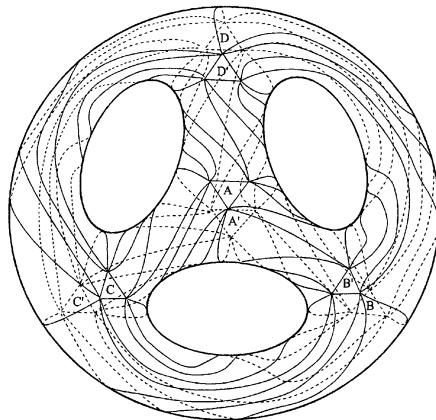


FIGURE 4

かれた3角形) と, Figure 4が得られる. この図において, G は A を中心とする $1/3$ 回転であり, 奥田喬之氏と高村茂氏により Dehn twist 表示が求められている. 一方,

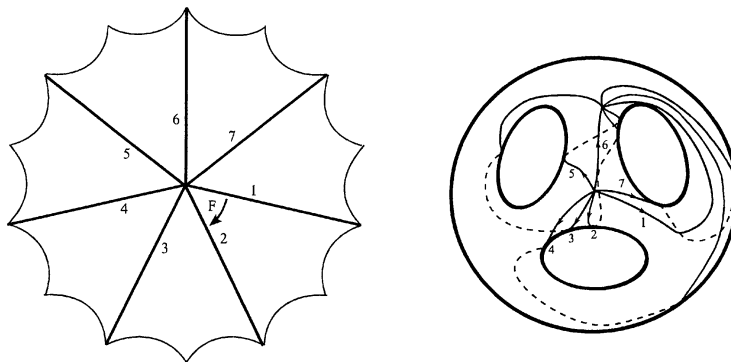


FIGURE 5

F は Figure 5 の左について, $1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow 7 \rightarrow 1$ とうつす. これらの辺 $1, \dots, 7$ を Figure 4 の上に描くと右の通りになる. F の total valency は $\left(7, \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7}\right)$ となっており, Theorem 2 における $f_{3,9}$ に対応する. この定理で求められている Dehn twist の積 $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8$ は, Figure 6 の左上において $1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow 7 \rightarrow 1$ とうつすように作用している. Φ を, 左上の Σ_3 から左下の Σ_3 への同相写像で, 同じ番号で表される曲線を写し合うものとする. これらの曲線で Σ_3 を切り開くと1つの円盤になっている事から, Φ は up to isotopy で一通りに定まる. $r_i = \Phi(c_i)$ とすると, r_i は, Figure 6 の右下の様になっており, $F = t_{r_6} t_{r_5} t_{r_4} t_{r_3} t_{r_2} t_{r_1} t_{r_5} t_{r_4} t_{r_8}$ となる.

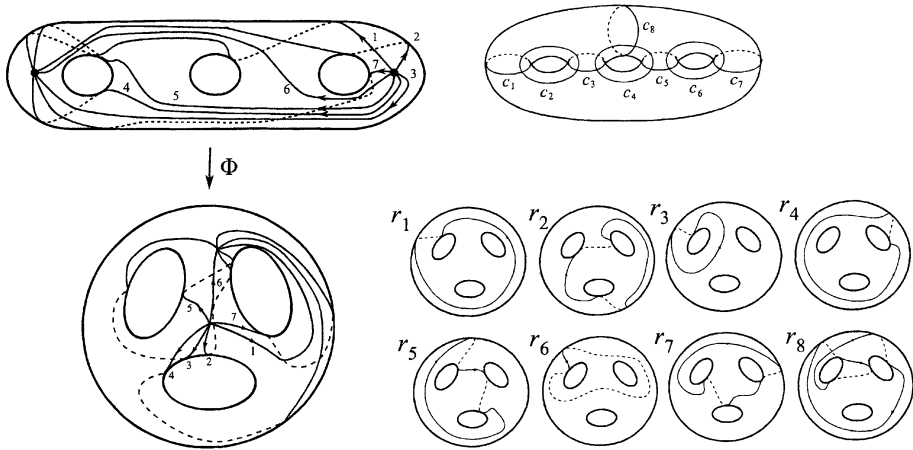


FIGURE 6

Proposition 5. Klein 4次曲線 $\{(x : y : z) \in \mathbb{C}P^2 \mid x^3y + y^3z + z^3x = 0\}$ の自己同型群は $F = t_{r_6}t_{r_5}t_{r_4}t_{r_3}t_{r_2}t_{r_1}t_{r_5}t_{r_4}t_{r_8}$, $G = t_{q_1}t_{q_2}t_{q_3}t_{q'_1}t_{q'_2}t_{q'_3}t_{q_0}$ で生成され, $F^7 = G^3 = (GF)^2 = (GFG^{-1}F^{-1})^4 = 1$ が関係式となっている. なお, r_i は Figure 6 に, q_i, q'_i は Figure 7 に描かれている曲線である.

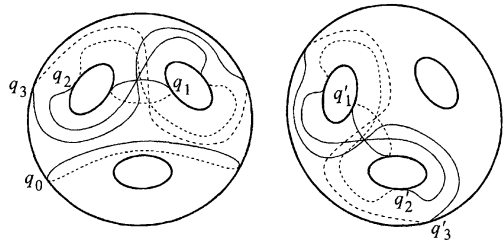


FIGURE 7

2.2. $S_3 \times (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ の Dehn twist 表示. Klein 4次曲線の自己同型群の次に位数が大きい Σ_3 上の有限群作用は Fermat 4次曲線 $\{(x : y : z) \in \mathbb{C}P^2 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 0\}$ の自己同型群であり, $S_3 \times (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ と同型である.

Figure 8 は, [6] の Figure 10 を編集したものである. 同じ番号の辺を張り合わせると Σ_3 となり, 隣り合う2つの3角形を合わせたものが, Fermat 4次曲線の自己同型群の基本領域である. この図における同じ番号の辺を貼り合わせ, 太い線の3角形を描いたものが, Figure 9 である. c_0 の重心を中心とする時計回りの $1/3$ 回転を P , Figure 8 の真ん中の点を中心とする時計回りの $1/8$ 回転を Q とすると, Fermat 4次曲線の自己同型群は P と Q で生成される. Q は Figure 10 の左について, $e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \cdots \rightarrow e_8 \rightarrow e_1$

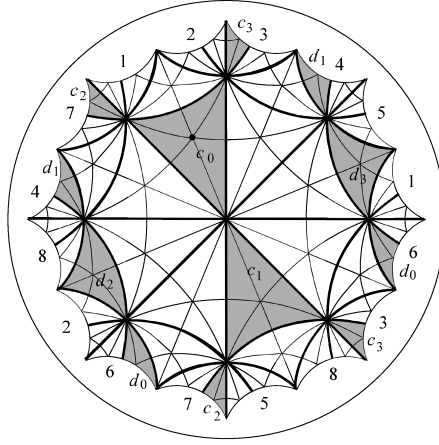


FIGURE 8

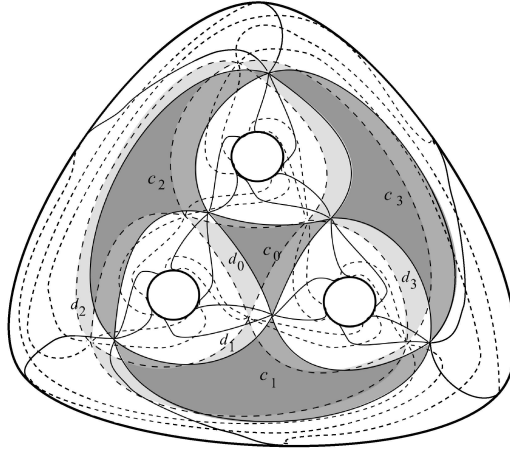


FIGURE 9

とつす. Figure 10 の左図における $e_1, \dots, e_8$ を Figure 9 の上に描くと, 右図の様になり, Q の total valency は $\left(8, \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8}\right)$ となっており, これは Theorem 2 における $f_{3,7}$ に一致する. $f_{3,7} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8$ の作用は, Figure 11 の左上の e_i を e_{i+1} に写すものとなっている. ここで Ψ を左上の Σ_3 を左下の Σ_3 に写す同相写像で e_i を e_i に写すものとする, Ψ により, c_i は s_i に写る. これより, $Q = t_{s_6} t_{s_5} t_{s_4} t_{s_3} t_{s_2} t_{s_5} t_{s_4} t_{s_3} t_{s_8}$ であることがわかる.

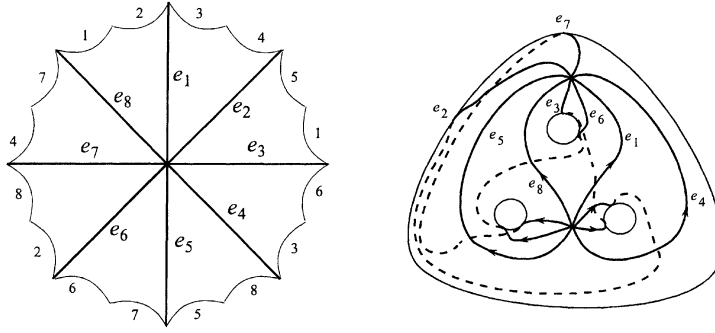


FIGURE 10

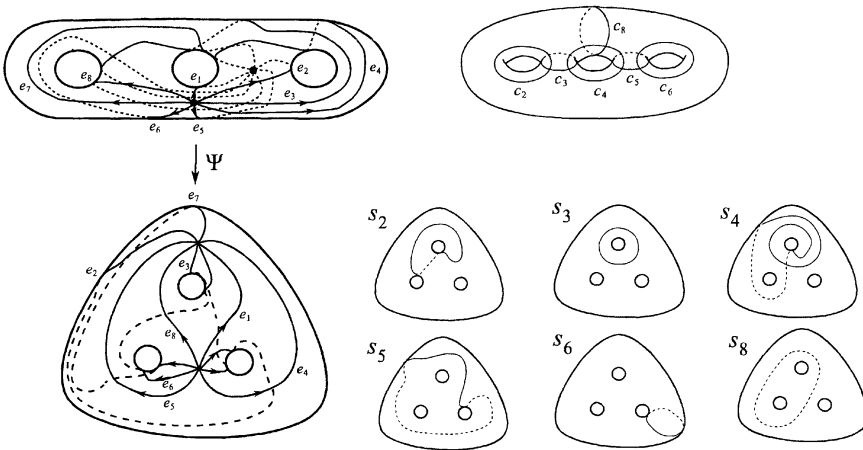


FIGURE 11

Proposition 6. Fermat 4 次曲線 $\{(x : y : z) \in \mathbb{CP}^2 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 0\}$ の自己同型群は $P = t_{q_1} t_{q_2} t_{q_3} t_{q'_1} t_{q'_2} t_{q'_3} t_{q_0}$, $Q = t_{s_6} t_{s_5} t_{s_4} t_{s_3} t_{s_2} t_{s_5} t_{s_4} t_{s_3} t_{s_6}$ で生成され, $P^3 = Q^8 = (PQ)^2 = (PQ^4)^3 = 1$ が関係式となっている. なお, s_i は Figure 11 に q_i , q'_i は Figure 12 に描かれている曲線である.

2.3. $\mathbb{Z}_2 \ltimes SL_2(3)$ の Dehn twist 表示. $\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \mid \sigma^2 = 1 \rangle$, $SL_2(3) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1^3 = 1, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \rangle$ と表したとき, ここでの $\mathbb{Z}_2$ の $SL_2(3)$ の作用は, $\sigma \sigma_1 \sigma = \sigma_2$ で与えられ, $T = \sigma_1$, $S = \sigma$ とおくと, $\mathbb{Z}_2 \ltimes SL_2(3) = \langle T, S \mid T^3 = S^2 = 1, (TS)^3 = (ST)^3 \rangle$ となっている. ただし, この群の作用は Broughton の表には見当たらない. このとき, TS は Theorem 2 における位数 12 の周期的写像 $f_{3,6}$ に一致し, 既に Dehn twist 表示が求められている. この表示より求まる TS の Σ_3 上の作用を基に, $\mathbb{Z}_2 \ltimes SL_2(3)$ の作用が Figure 13 の通りである事がわかり, Dehn twist 表示が求められる.

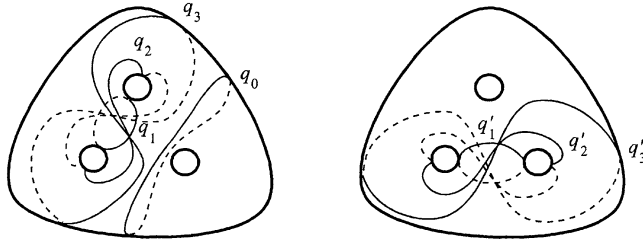


FIGURE 12

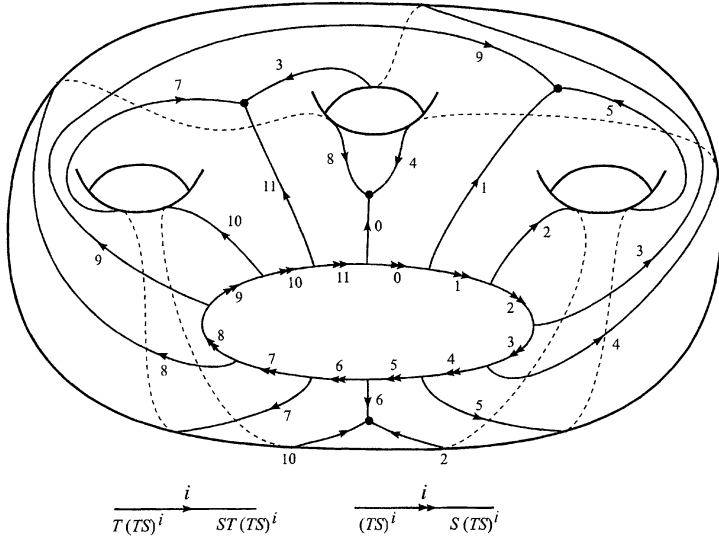


FIGURE 13

Proposition 7. $\mathbb{Z}_2 \ltimes SL_2(3) = \langle T, S \mid T^3 = S^2 = 1, (TS)^3 = (ST)^3 \rangle$ の Σ_3 への作用は $TS = t_{c_6}t_{c_5}t_{c_4}t_{c_3}t_{c_2}t_{c_8}$, $S = t_a t_b t_{d'_3} t_{d'_2} t_{d'_1} t_a t_b t_{d_0}$ で生成される. なお, a, b, c_i, d_0, d'_i は Figure 14 に描かれている曲線である.

2.4. $D_{2,12,5}$, $\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8)$, $\mathbb{Z}_2 \times S_4$ の Dehn twist 表示. ここで, それぞれの群の生成系と関係子を記しておく.

$$D_{2,12,5} = \langle x, y \mid x^2, y^{12}, xyxy^{-5} \rangle$$

$$\mathbb{Z}_2 \ltimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8) = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^8, yzy^{-1}z^{-1}, xyx^{-1}y^{-1}, xzx^{-1}z^{-3}y^{-1} \rangle$$

$$\mathbb{Z}_2 \times S_4 = \langle x, y, z \mid x^2, y^2, z^3, xyx^{-1}y^{-1}, xzx^{-1}z^{-1}, zyzyzyzy \rangle$$

これらの作用は hyperelliptic mapping class group の部分群となっている. 長谷川祐介氏 (東京理科大学理工学研究科数学専攻一年) により, 次の通りに Dehn twist 表

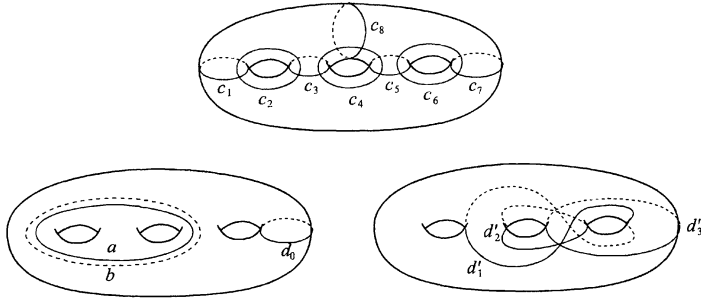


FIGURE 14

示が得られている. なお, k は Figure 2 における単純閉曲線 c_k に沿った Dehn twist t_{c_k} を表し, $\bar{k}$ は $t_{c_k}^{-1}$ を表す.

$D_{2,12,5}$ について :

$$x = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (1 \cdot 2) \cdot 1,$$

$$y = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6.$$

$\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8)$ について :

$$x = (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 3) \cdot 2 \cdot \bar{7} \cdot \bar{6} \cdot \bar{5} \cdot \bar{4} \cdot \bar{3} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1},$$

$$y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7)^4,$$

$$z = \bar{7} \cdot \bar{6} \cdot \bar{5} \cdot \bar{4} \cdot \bar{3} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1}.$$

$\mathbb{Z}_2 \times S_4$ について :

$$x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

$$y = 1 \cdot (\bar{7} \cdot \bar{6} \cdot \bar{5} \cdot \bar{4} \cdot \bar{3})^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

$$z = \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{3} \cdot \bar{4} \cdot \bar{3} \cdot (\bar{7} \cdot \bar{6} \cdot \bar{5} \cdot \bar{4} \cdot \bar{3})^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

3. Σ_3 上の MAXIMAL ではない有限群作用のリスト

この節では, Σ_3 上の有限群作用で maximal でないものが, maximal なもののどのような部分群となっているかをリストアップする. なお, このリストは GAP 4 を用いて構成した. 3.xx は, [2] の表における有限群作用の名前であり, 特に, 3.at は $PSL_2(7)$ の作用 (§2.1), 3.as は $S_3 \times (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ の作用 (§2.2), 3.ao (Broughton の表には無い) は $\mathbb{Z}_2 \times SL_2(3)$ の作用 (§2.3), 3.ap は $\mathbb{Z}_2 \times S_4$, 3.am.1 は $\mathbb{Z}_2 \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8)$, 3.ah は $D_{2,12,5}$ の作用 (§2.4), 3.aa は $\mathbb{Z}_{14}$, 3.t は $\mathbb{Z}_9$ の作用 (§1) を表している.

$$\underline{3.xx} : 3.yy \ni F_1 = ***, F_2 = ***, [\dots]$$

と書かれているのは, 3.xx が 3.yy の部分群作用となっており, 3.yy の生成系の積で表された F_1, F_2 が 3.xx の作用を生成し, $[\dots]$ は $\dots$ が F_1, F_2 の間の関係子であることを意味している.

$$\begin{aligned}
&\underline{3.aq}: 3.as \ni F_1 = P, F_2 = Q^{-2}, [F_1^3, F_2^4, F_2^{-1}F_1^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}, F_2^{-1}F_1F_2^{-1}F_1F_2^{-1}F_1] \\
&\underline{3.am.2}: 3.as \ni F_1 = Q, F_2 = PQ^{-1}P, [F_2^2, F_1F_2F_1^{-2}F_2F_1, F_1^8, F_2F_1F_2F_1F_2F_1F_2F_1] \\
&\underline{3.al}: 3.at \ni F_1 = F^{-3}GF^{-2}, F_2 = FG^2F, [F_1^3, F_2F_1F_2F_1, F_2^4, F_2^2F_1^{-1}F_2F_1^{-1}F_2^{-2}F_1^{-1}F_2F_1^{-1}] \\
&3.as \ni F_1 = QP, F_2 = PQ^2, F_3 = PQ^{-1}P, \\
&[F_1^2, F_2^3, F_2^3, F_1F_2F_3F_2^{-1}, F_3F_1F_2^{-1}F_3F_1F_2^{-1}, F_3F_1F_3F_1F_3F_1] \\
&3.ap \ni F_1 = yx^{-1}, F_2 = z, [F_1^2, F_2^3, F_2F_1F_2F_1F_2F_1F_2F_1] \\
&\underline{3.ak}: 3.ap \ni F_1 = y, F_2 = z, [F_1^2, F_2^3, F_2F_1F_2F_1F_2F_1F_2F_1] \\
&\underline{3.aj}: 3.ao \ni F_1 = T, F_2 = STS^{-1}, [F_1^3, F_2^3, F_2F_1F_2F_1^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}] \\
&\underline{3.ai}: 3.ap \ni F_1 = x, F_2 = z, F_3 = yzy^{-1}, [F_1^2, F_2^3, F_3^3, F_2F_1F_2^{-1}F_1, F_3F_1F_3^{-1}F_1, F_3F_2F_3F_3'] \\
&\underline{3.ag}^\dagger: 3.at \ni F_1 = F, F_2 = GF^{-3}G^{-1}FG^{-1}, [F_2^3, F_1F_2F_1^{-2}F_2^{-1}, F_1F_2F_1F_2F_1F_2, F_1^7] \\
&\underline{3.ad.1}: 3.ap \ni F_1 = x, F_2 = y, F_3 = zyz, [F_1^2, F_2^2, F_2F_1F_2F_1, F_3F_1F_3^{-1}F_1, F_3F_2F_3F_2, F_3^4] \\
&3.am.1 \ni F_1 = x, F_2 = y, F_3 = z^{-2}, [F_1^2, F_2^2, F_1F_3^{-1}F_1F_3^{-1}, F_2F_1F_2F_1, F_3F_2F_3^{-1}F_2, F_3^4] \\
&\underline{3.ad.2}: 3.ao \ni F_1 = S, F_2 = TST^{-1}, F_3 = T^{-1}ST, [F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_1F_3F_2F_1F_2F_3, F_2F_1F_3F_1F_2F_3] \\
&\underline{3.ac.1}: 3.as \ni F_1 = Q^{-2}, F_2 = PQ^{-2}P^{-1}, [F_2^{-1}F_1^{-1}F_2F_1, F_1^4, F_2^4] \\
&\underline{3.ac.2}: 3.am.1 \ni F_1 = zx^{-1}, F_2 = z^{-1}x^{-1}, [F_2^4, F_2^2F_1^2, F_2^{-1}F_1^{-1}F_2^{-1}F_1F_2^{-1}F_1^{-1}F_2^{-1}F_1] \\
&\underline{3.ab.1}: 3.am.1 \ni F_1 = y, F_2 = z, [F_1^2, F_2F_1F_2^{-1}F_1, F_2^8] \\
&\underline{3.ab.2}: 3.as \ni F_1 = Q^{-1}P, F_2 = Q^3P, [F_2F_1^{-1}F_2F_1^{-1}, F_2^2F_1^2, F_2^8, F_1^8] \\
&\underline{3.z}: 3.at \ni F_1 = G^{-1}F^{-1}, F_2 = F^{-3}GF^{-2}, [F_1^2, F_2^3, F_1F_2^{-1}F_1F_2^{-1}F_1F_2^{-1}] \\
&3.as \ni F_1 = PQ^2, F_2 = PQ^{-4}P^{-1}Q^{-2}P^{-1}, [F_2^3, F_1^3, F_2F_1F_2F_1, F_2F_1^{-1}F_2F_1^{-1}F_2F_1^{-1}] \\
&3.ap \ni F_1 = z, F_2 = yzy^{-1}, [F_1^3, F_2^3, F_2F_1F_2F_1] \\
&\underline{3.y}: 3.ap \ni F_1 = x, F_2 = z, F_3 = yzyz^{-1}y^{-1}, [F_1^2, F_2^3, F_2^3, F_2F_3F_2F_3, F_2F_1F_2^{-1}F_1, F_3F_1F_3F_1] \\
&3.ah \ni F_1 = y^{-2}, F_2 = y^2x^{-1}y^{-6}, [F_2^2, F_2F_1F_2F_1, F_1^6] \\
&\underline{3.x}: 3.ah \ni F_1 = yx^{-1}, F_2 = y^{-1}x^{-1}, [F_1^{-2}F_2^2, F_1^{-2}F_2^{-2}, F_2^{-1}F_1^{-1}F_2F_1F_2F_1] \\
&\underline{3.v}: 3.ao \ni F_1 = T, F_2 = STSTS^{-1}, [F_1^3, F_2F_1F_2^{-1}F_1^{-1}, F_1F_2^4] \\
&\underline{3.u}: 3.ah \ni F_1 = y, [F_1^{12}] \\
&\underline{3.s.1}: 3.as \ni F_1 = Q^{-1}PQ^{-2}, F_2 = Q^{-3}P, [F_2F_1^{-1}F_2^{-1}F_1^{-1}, F_2^4, F_2^2F_1^2, F_2^2F_1^{-2}] \\
&3.so \ni F_1 = STS^{-1}T^{-1}, F_2 = ST^{-1}S^{-1}T, [F_2F_1F_2F_1^{-1}, F_1^{-1}F_2F_1^{-1}F_2^{-1}] \\
&\underline{3.s.2}: 3.am.1 \ni F_1 = z^{-2}y^{-1}, F_2 = z^{-2}y^{-1}xz^2, [F_2^2, F_1^4, F_1F_2F_1F_2] \\
&\underline{3.r.1}: 3.ap \ni F_1 = x, F_2 = y, F_3 = yzy^{-1}y^{-1}z, \\
&[F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_2F_3F_2F_3, F_2F_1F_2F_1, F_3F_1F_3F_1, F_2F_3F_1F_2F_3F_1] \\
&3.am.1 \ni F_1 = x, F_2 = y, F_3 = y^{-1}zxzx, \\
&[F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_1F_3F_1F_3, F_3F_2F_3F_2, F_2F_1F_2F_1, F_2F_3F_1F_2F_3F_1]
\end{aligned}$$

[†]branching indices は (3, 3, 7) と思われる

- 3.r.2: $3.at \ni F_1 = F^{-1}GF^{-1}GF, F_2 = GF^{-2}GF^{-2}, [F_1^2, F_2^2, F_1F_2F_1F_2F_1F_2F_1F_2]$
- 3.as $\ni F_1 = PQ^{-1}P, F_2 = PQ^3P, [F_1^2, F_2^4, F_1F_2^{-1}F_1F_2^{-1}]$
- 3.ao $\ni F_1 = TST^{-1}, F_2 = T^{-1}ST, [F_1^2, F_2^2, F_1F_2F_1F_2F_1F_2F_1F_2]$
- 3.am.1 $\ni F_1 = x, F_2 = yz^2, [F_1^2, F_2^{-1}F_1F_2^{-1}F_1, F_2^4]$
- 3.q.1 (x, x, y^{-1}, y) : $3.ap \ni F_1 = x, F_2 = z^{-1}y^{-1}, [F_1^2, F_2F_1F_2^{-1}F_1, F_2^4]$
- 3.am.1 $\ni F_1 = y, F_2 = z^{-2}, [F_1^2, F_2^{-1}F_1F_2F_1, F_2^4]$
- 3.q.1 (x, xy^2, y, y) : $3.as \ni F_1 = Q^{-2}, F_2 = PQ^{-1}P, [F_2^2, F_1^4, F_2F_1F_2F_1^{-1}]$
- 3.ao $\ni F_1 = S, F_2 = TSTS^{-1}T, [F_1^2, F_2^4, F_1F_2F_1F_2^{-1}]$
- 3.q.1 (x, y^2, xy, y) : $3.ah \ni F_1 = yxy, F_2 = y^3, [F_1^2, F_2F_1F_2^{-1}F_1, F_2^4]$
- 3.am.1 $\ni F_1 = y, F_2 = y^{-1}xz, [F_1^2, F_2F_1F_2^{-1}F_1, F_2^4]$
- 3.q.2: $3.ap \ni F_1 = z^{-1}y^{-1}, F_2 = zyz^{-1}x^{-1}, [F_2^2, F_1^4, F_2F_1F_2F_1]$
- 3.am.1 $\ni F_1 = x, F_2 = z^{-2}, [F_1^2, F_2F_1F_2F_1, F_2^4]$
- 3.p (x^6, x, x) : $3.am.1 \ni F_1 = z, [F_1^8]$ 3.p (x^2, x, x^5) : $3.as \ni F_1 = Q^{-1}P, [F_1^8]$
- 3.o (x, x, x^5) : $3.aa \ni F_1 = x^6, [F_1^7]$ 3.o (x, x^2, x^4) : $3.at \ni F_1 = F, [F_1^7]$
- 3.n: $3.ap \ni F_1 = z, F_2 = yzyz^{-1}y^{-1}, [F_2^2, F_1^3, F_1F_2F_1F_2]$
- 3.ah $\ni F_1 = xy^{-2}, F_2 = xy^{-6}, [F_2^2, F_1^2, F_2F_1F_2F_1F_2F_1]$
- 3.m: $3.at \ni F_1 = G^{-1}F^{-1}, F_2 = G^{-1}FG^{-1}F^3G^{-1}F, [F_1^2, F_2^3, F_1F_2F_1F_2]$
- 3.as $\ni F_1 = QP, F_2 = Q^{-1}PQ^3P^{-1}, [F_1^2, F_2^3, F_1F_2F_1F_2]$
- 3.ap $\ni F_1 = z, F_2 = yzyz^{-1}y^{-1}x^{-1}, [F_2^2, F_1^3, F_2F_1^{-1}F_2F_1^{-1}]$
- 3.ah $\ni F_1 = x, F_2 = yx^{-1}y^{-1}x, [F_1^2, F_2^3, F_1F_2^{-1}F_1F_2^{-1}]$
- 3.k: $3.ao \ni F_1 = STST^{-1}S^{-1}TS^{-1}, [F_1^6]$
- 3.j: $3.ap \ni F_1 = x, F_2 = z, [F_1^2, F_2^3, F_2F_1F_2^{-1}F_1]; 3.ah \ni F_1 = y^{-2}, [F_1^6]$
- 3.i.1: $3.at \ni F_1 = F^{-2}GF^{-1}GF^{-3}, [F_1^4]; 3.as \ni F_1 = Q^{-3}P, [F_1^4]$
- 3.ao $\ni F_1 = TSTS^{-1}T, [F_1^4]; 3.am.1 \ni F_1 = yz^2, [F_1^4]; 3.ap \ni F_1 = xyz, [F_1^4]$
- 3.i.2: $3.am.1 \ni F_1 = x, F_2 = y, [F_1^2, F_2^2, F_1F_2F_1F_2]$
- 3.ap $\ni F_1 = yx^{-1}, F_2 = yzyz^{-1}y^{-1}zx^{-1}, [F_1^2, F_2^2, F_1F_2F_1F_2]$
- 3.h (x, x, y, y, xy, xy) : $3.at \ni F_1 = G^{-1}F^{-1}, F_2 = GF^{-2}GF^{-2}, [F_1^2, F_2^2, F_2F_1F_2F_1]$
- 3.as $\ni F_1 = PQ^{-1}P, F_2 = Q^{-4}, [F_1^2, F_2^2, F_1F_2F_1F_2]$
- 3.ao $\ni F_1 = S, F_2 = TST^{-1}STS^{-1}T^{-1}, [F_1^2, F_2^2, F_2F_1F_2F_1]$
- 3.am.1 $\ni F_1 = x, F_2 = zxyz^{-1}, [F_1^2, F_2^2, F_2F_1F_2F_1]$
- 3.ap $\ni F_1 = yzyz^{-1}x^{-1}, F_2 = z^{-1}yz^{-1}y^{-1}, [F_1^2, F_2^2, F_1F_2F_1F_2]$
- 3.h (x, x, y, y, y, y) : $3.ap \ni F_1 = x, F_2 = yzyz^{-1}y^{-1}zy^{-1}, [F_1^2, F_2^2, F_2F_1F_2F_1]$
- 3.am.1 $\ni F_1 = x, F_2 = zxz, [F_1^2, F_2^2, F_1F_2F_1F_2]$
- 3.ah $\ni F_1 = x, F_2 = yxy, [F_1^2, F_2^2, F_2F_1F_2F_1]$
- 3.g: $3.am.1 \ni F_1 = z^{-1}x^{-1}, [F_1^4]; 3.ah \ni F_1 = y^3x^{-1}, [F_1^4]$
- 3.f (x, x, x, x) : $3.as \ni F_1 = PQ^{-2}P^{-1}, [F_1^4]; 3.ao \ni F_1 = STSTS^{-1}T, [F_1^4]$
- 3.f (x, x, x^{-1}, x^{-1}) : $3.ap \ni F_1 = z^{-1}y^{-1}, [F_1^4]; 3.am.1 \ni F_1 = z^{-2}, [F_1^4]$

3.e: $3.at \ni F_1 = GF^{-2}G^{-1}F^2G^{-1}F, [F_1^3]; 3.as \ni F_1 = Q^{-1}PQ^3P^{-1}, [F_1^3]$
3.ap: $3.ap \ni F_1 = z, [F_1^3]; 3.ah \ni F_1 = yxy^{-1}x^{-1}, [F_1^3]$
3.d: $3.ao \ni F_1 = T, [F_1^3]$
3.c: $3.ap \ni F_1 = yzy^{-1}y^{-1}zy^{-1}, [F_1^2]; 3.am.1 \ni F_1 = y, [F_1^2]$
3.b: $3.at \ni F_1 = G^{-1}F^{-1}, [F_1^2]; 3.as \ni F_1 = PQ^{-1}PQ^4, [F_1^2]; 3.ao \ni F_1 = S, [F_1^2]$
3.ap: $3.ap \ni F_1 = xyzyz^{-1}y^{-1}z, [F_1^2]; 3.am.1 \ni F_1 = x, [F_1^2]; 3.ah \ni F_1 = x, [F_1^2]$
3.a: $3.ap \ni F_1 = x, [F_1^2]; 3.am.1 \ni F_1 = zxzx^{-1}, [F_1^2]; 3.ah \ni F_1 = yxy, [F_1^2]$
 Broughton の表に無いもの $\langle b, c \mid b^2 = c^4 = 1, bcb = c^{-1} \rangle$ (order = 16) の作用
 $3.as \ni F_1 = Q^{-2}, F_2 = PQ^{-1}P, F_3 = PQ^3P,$
 $[F_2^2, F_3^{-1}F_1F_3^{-1}F_1, F_3^4, F_3^{-2}F_1^2, F_2F_1^{-1}F_2F_1, F_3F_2F_3F_2]$

謝辞 RIMS 研究集会 (公開型)「変換群を核とする代数的位相幾何学」での講演の機会を
 下さった研究代表者の佐藤隆夫氏 (東京理科大学) に心から御礼申し上げます。

REFERENCES

- [1] T. Ashikaga and M. Ishizaka, *Classification of degenerations of curves of genus three via Matsumoto-Montesinos' theorem*, Tohoku Math. J. (2) 54, (2002), 195–226.
- [2] S.A. Broughton, *Classifying finite group actions on surface of low genus*, Jour. of Pure and Appl. Alg. 69, (1990), 233–270
- [3] M. Dehn, *Die Gruppe der Abbildungsklassen*, Acta Math. 69, (1938), 135–206.
- [4] S. Hirose, *Presentations of periodic maps on oriented closed surfaces of genera up to 4* Osaka J. Math. 47, (2010), 385–421
- [5] M. Ishizaka, *Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families*, Rev. Mat. Complut. 20 (2007), no. 2, 483–495.
- [6] H. Karcher and M. Weber, *The geometry of Klein's Riemann surface*, “The Eightfold Way”, 9–49, MSRI Publications Volume 35, 1998
- [7] S. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem* Ann. Math. 117, (1983), 235–265.
- [8] F. Klein, *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen* Math. Annalen 14, (1879), 428–471, English transl. (by Silvio Levy) in “The Eightfold Way” MSRI Publications Volume 35, 1998
- [9] W.B.R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) 76 (1962), 531–540.
- [10] G. Nakamura and T. Nakanishi, *Presentation of finite subgroups of mapping class group of genus 2 surface by Dehn-Lickorish-Humphries generators*, preprint, 「リーマン面に関連する位相幾何学 2016 予稿集」の中西敏浩氏の予稿 (pp. 60–64) も参照
- [11] J. Nielsen, *The structure of periodic surface transformation*, (原題: *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen*) Math. -fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15, nr.1 (1937) (Jakob Nielsen collected works, Vol.2, 65–102)

〒 278-8510, 千葉県野田市山崎 2 6 4 1, 東京理科大学理工学部数学科
 E-mail address: hirose_susumu@ma.noda.tus.ac.jp