

Topological completion と Realcompactification について

東京学芸大 石 渡 毅

§1 序

与えられた空間 X , またはそれに関連した性質を調べるのに, X を取扱い易い空間 Y に埋蔵して, その Y の助けをかりて考察を進める手法が非常に有効であることは, よく知られている。ある意味でこの表題もそれに関連したことがらである。一般に与えられた完全正則 T_1 空間 X に対して上の Y として βX (Čech の compactification [3]) を用いることは, 位相空間の研究手段としては常套的なものである。特に X 上の有界関数(環)の研究には欠くことのできないものである。しかし非有界な関数(環)に対しては効果的でなく, これについては, 1948 年 Hewitt [11] により Q -空間の概念が導入され, 上の Y として X の realcompactification νX が登場し, 一般の関数(環), および X 自身の性質の研究に対して一応十分な効果をあげた。($X = \nu X$ のとき X は Q -空間, また

は *realcompact space* とよばれている)

最初にも述べたように, X を Y に埋蔵するのに Y として βX か νX をとることが普通であるが, 実は, この νX に関してはいろいろと *delicate* な点があり, 少々扱いにくい面がある。これは次の有名な白田の定理 [26] が簡潔にそれを指摘している: 1) X の各点 *discrete subspace* が非可測濃度をもつとき, $X: \text{realcompact} \iff X: \text{topologically complete}$. 2) X が *discrete* のとき, $X: \text{realcompact} \iff X$ の濃度が非可測, 3) $X: \text{realcompact} \iff X$ 上の *measure* は *trivial* なものに限る。これより *discrete* または *metrizable* な X に対して, 無条件で $X = \nu X$ は主張できないことが分る。

他方 βX , νX 以外に X の *uniform structure* による X の完備化が可能ながことが知られている。その中で X の最精の *uniform structure* による完備化を μX で示し, これを X の *topological completion* とよび, また $X = \mu X$ のとき X は *topologically complete* であるといわれる。この μ に関しては, ν と異り, X が *discrete* または *metrizable* のとき, つねに $X = \mu X$ となる。白田の上記定理より可測濃度が存在しなければ $\mu = \nu$ であり, 存在すれば $\mu \neq \nu$ となることが分る。一般に濃度に関係なく $X = \nu X$ なら $X = \mu X$ が成立している。

可測濃度に関しては論説[1], [2] を参照していただくとして, ここで位相空間論の立場から2つの operator ν, μ についていくつかの類似点と相異点を挙げてあげて, §3 で少々新しい結果 ([15], [16]) を付け加えてみたいと思う。勿論この外に, β と ν の関連性, 写像とのかわりあい (例えば [6], [13]...) 等いろいろな問題点があるが, ここでそれにはふれないことにする。これらの点から可測濃度の存在については勿論何も言えないが, 以下の性質からは半々といったところであろうか?

* * *

文献をすべてあげることは不可能なことで, くれしくはここであげた論文の引用文献をみていただくまい。用語の説明は殆んど省略したが, 大体 [9] にしたがつた。また簡単にするため箇条書きし, $\circ$ のついた番号 (例えば 2°) は ν についての, $*$ のついた番号 (例えば 2^*) は μ についての性質を述べるように心掛けた。つぎに R, N はそれぞれ実数, 自然数の空間またはその copy を示し, *real compact* および

topologically complete は, おのおの *r.c.*, *t.c.* なる記号で表わしてある。" $\cong$ " は同相を示し, $|X|$ は X の濃度を, Π は直積を表わすものとする。なお空間はすべて完全正則で $\mathbb{T}$ とする。 $\mathbb{C} = |\mathbb{R}|$ とする。

§2 類似度と相異度について

$$1) \quad X \subset \mu X \subset \nu X \subset \beta X. \quad [9][20]$$

$$2^0) \quad \nu X \cong \prod_{\alpha} R_{\alpha} \text{ の閉部分集合, } R \cong R_{\alpha}. \quad [26]$$

$$2^*) \quad \mu X \cong \prod_{\alpha} M_{\alpha} \text{ の閉部分集合, } M_{\alpha} : \text{metric space.} [20]$$

3⁰) νX は all countable normal cover よりなる unif. structure による X の完備化である。 [26]

3^{*}) μX は finest uniformity による X の完備化である。 [20]

4⁰) νX は separable metric spaces の inverse system の limit である。

4^{*}) μX は metric spaces の inverse system の limit. [20]

5⁰) X に対して νX は次の Y で characterize される。

- 1) Y は $\tau.c$ で X を dense に含む,
- 2) X から R への任連関は Y へ連続拡大できる。 [9]

5^{*}) X に対して μX は次の Y で characterize される。

- 1) Y は $\tau.c$ で X を dense に含む
- 2) X から任 metric space への連関は Y へ連続拡大できる。 [20]

6°) X に対して νX はつぎの (a), (b) をみたす最小の $\tau.c$ space Y として characterize される.

a) X は Y で "dense" である.

b) X から R への任連関は Y へ連続拡大される。 [19]

6*) X に対して μX はつぎの (a), (b) をみたす最小の $\tau.c$ space Y として characterize される.

a) X は Y で "dense" である

b) X から R への任有界連関は Y へ連続拡大される。 [20]

7°) 次は同値である.

1) X は $\tau.c$ である.

2) $\forall p \in \beta X - X, \exists C \subset \beta X - X, p \in C, C$ は βX の G_δ -closed set.

3) $\forall p \in \beta X - X, \exists$ countable star-finite partition of unity $\Phi = \{ \varphi_n; \sum \varphi_n = 1 \}, p \notin \text{cl}_{\beta X} O(\varphi_n)$. [27]

7*) 次は同値である

1) X は $\tau.c$ である.

2) $\forall p \in \beta X - X, \exists$ partition of unity $\Phi = \{ \varphi_\lambda; \sum \varphi_\lambda = 1 \}$ $p \notin \text{cl}_{\beta X} O(\varphi_\lambda)$. [27]

$X^* = \beta X - X$ の性質については §3 でふれる。

8°) $X: \text{compact} \iff \text{maximal open cover}$ は存在しない。

$X: \text{r.c.} \iff \text{maximal cozero cover}$ は countable subcover をもつ。

8*) $X: \text{t.c.} \iff \text{maximal cozero cover}$ は normal である $\iff \text{maximal open cover}$ は normal. [5]

9°) $X = \bigcup X_\lambda$ (topological sum) のとき

各 X_λ が r.c. ても X は r.c. とは限らない。

9*) 各 X_λ が r.c. なら X も t.c. である。 [20]

以上は popular でかつ割合によく利用されているものと思われる性質である。その他については最後の文献等を参照されたい。

§3. いくつかの考察について

10°) " β " と直積との関係は 1959 年 Glicksberg [10] により最終的な結果が得られたが, " ν " と直積との関係については最初にはのべたように濃度が関係してくるので, 研究がおくれ, 60年代後半にいくつかの結果がでた。そのうち Comfort [4] が主なものである。[19]では $\nu(X \times Y) = \nu X \times \nu Y$ になる必ず条件が与えられているが, これは等号が成立するニ

と自身を条件にかいたもので完全とはいえない ([19] では
このため定理としてのせてはいない)。Comfort の主な結果
はつぎのようなものである。

1) $Y: \text{locally compact, r.c.}, |Y| \text{ が非可測}$ のとき, 任 X に対し
て, $\nu(X \times Y) = \nu X \times \nu Y$.

2) $|X \times Y|$ が非可測のとき,

i) $\nu X: \text{locally compact}, Y: k\text{-space} \Rightarrow \nu(X \times Y) = \nu X \times \nu Y$

ii) $X: \text{pseudocompact}, Y: k\text{-space} \Rightarrow \quad " \quad "$

iii) $\nu X \times Y, \nu X \times \nu Y$ が $k\text{-space} \Rightarrow \quad " \quad "$

$\Rightarrow Y$ の各 compact subsets および νX の各 pseudocompact subsets
が非可測で, $Y: k\text{-space}, \nu X \text{ locally compact} \Rightarrow \nu(X \times Y) = \nu X \times \nu Y$.

10*). さて " μ " と直積との関係については濃度に関係なく
上と同様なことが成立する [15], すなわち上の 2) の条件
" $|X \times Y|$ が非可測" が不要で, i) ~ iii) で ν を μ でかえた
定理が成立するのである。さらに面白いと思われる定理は,
" $\nu(X \times Y) = \nu X \times \nu Y \Rightarrow \mu(X \times Y) = \mu X \times \mu Y$ " が成立する
ことであろう (証明 15*) を利用)。また 2*) は [20] の定理の
一般化でもある。

さて, 10*) でのべたように McArthur [19] も " ν " について
いろいろの結果をだしているが, 11°, 12° をあげておこう。

11°) D : discrete で $|D|$ が可測, $Y \in D$, νD , βD のいずれかをとると $\nu(D \times Y) = \nu D \times \nu Y$ である。これに対して
 すぐ 11*) がえられる (10* より) [197]

$$11^*) \quad \mu(D \times D) = \mu D \times \mu D, \quad \mu(D \times \beta D) = \mu D \times \beta D.$$

この 11) と 10) より “ μ と直積” との関係は “ ν ” のそれより、はるかに求めやすいことが予想される。

$$12^0) \quad \mathcal{R} = \{X : \nu(X \times Y) = \nu X \times \nu Y \text{ for } \forall Y\} \ni X \Rightarrow X: r.c.$$

$$\mathcal{M} = \{X : \nu(X \times Y) = \nu X \times \nu Y \text{ for } \forall r.c. Y\} \ni X \Leftrightarrow X: r.c. \quad [19]$$

$$12^*) \quad \text{上で } \nu \text{ を } \mu \text{ に, } r.c. \text{ を } n.c. \text{ でかえうる} \quad [15]$$

Comfort は “locally compact な空間 X で νX が k -space でないものが存在するか” という問題を提起した。これに対して、肯定的な解、すなわち存在することが示されたが、その空間の濃度は $\aleph_2$ であった。さらに Negrepontis [21] は簡単に濃度 $\aleph_1$ の空間を構成してみせた。この例は色々面白い性質をもっていると思われ、[14] でも利用させてもらった。この問題を一般的に取扱った定理はないように見うけられるので、これを [13] [14] [15] で扱ってみた。主なところはつきのようなものである。

- 13) 1) μX : locally compact, $\mu X \neq \nu X \Rightarrow \nu X$ is not k -space.
 2) νX : locally compact $\Rightarrow \mu X = \nu X$
 3) X : normal $\wedge$ 14 countably compact closed subset of compact, $X \subsetneq Y \subset \nu X \Rightarrow Y$ is not k -space.

これらの結果はもう少し精しくなる。また上より, X が discrete, $|X|$: 可測 のとき $X = \mu X \neq \nu X$ は分っているがさらに νX は k -space でないことが分る。

14). Mandelker は [17], [18] において round subset of βX , round γ -filter なる概念を用いて remote points, Maximal ideals の共通部分 $\bigcap \{M^p; p \in X^*\}$, $C(X)$ の元で compact を support をもつ元の全体 $C_k(X)$ について研究し, さらに stable family なる考え方を入れ, realcompact の概念を一般の空間に拡張している。

i°) $\beta X - \nu X$ は round subset of βX . [17]

i*) $\beta X - \mu X$ は round subset of βX . [16]

ii°) X : r.c $\Rightarrow \bigcap \{M^p; p \in X^*\} = C_k(X)$ [9]

ii*) X : t.c $\Rightarrow$ " " [22]

iii) $\beta X - X$ が round subset of $\beta X \iff$ " " [17]

一般に X : r.c $\xleftrightarrow{\text{(def)}} \text{f.i.p.をもつ閉集合族が stable ならば}$
 $\bigcap \neq \emptyset$ とすると, r.c の殆んどの性質が保たれる。 [18]

つぎに $X^* = \beta X - X$ の性質に関して Rudin [25] の N^* の P -points, Fine and Gillman [7] の R の remote points が発見されて (以来?) 色々と研究され, そのうち $r.c$ でなりたつ性質を Robinson [23] は $\omega.c$ まで拡張し, また Plank [24] は P -points, remote points の概念を β -subalgebra なる考えを導入することにより統一的に扱って, 綺麗なよい結果をえている。以下の (15) ~ (20) ではこれらの定理の改良, 拡張を試みる。そして, いくつかの真では或意味で完全な形が与えられたものと思っている。 X に対して, $X_c = \{x; \exists \text{ locally compact nbd of } x\}$, $X - X_c = R(X)$ とおき, ここで仮りに $\text{int}_X R(X) = \emptyset$ のとき, X は almost locally compact とよんでおく。[12] で X および X^* が σ -compact ならば X は almost locally compact であることが証明されている。($h^\beta \in C(\beta X)$ と以下考える)。

15°) X : locally compact, $r.c \Rightarrow$ 任 zero set $Z \in Z(X^*)$ に対して $\text{cl}_{X^*} \text{int}_{X^*} Z = Z$. [7]

15*) 上で $r.c$ を $\omega.c$ でかえうる。 [23]

[定理] X : not pseudocompact (= $p.c$), $R(X)$: $\omega.c$ のとき

$$\begin{aligned} \text{int}_{X^*} (\text{cl}_{\beta X} R(X) - R(X)) \cap (\beta X - \mu X) &= \emptyset \Leftrightarrow X: \text{almost locally compact} \\ \Leftrightarrow \forall Z(h^\beta) \subset \beta X - \nu X; \text{cl}_{X^*} \text{int}_{X^*} Z(h^\beta) &= Z(h^\beta) \end{aligned} \quad [16]$$

16*) X : locally compact, t.c $\Rightarrow \nu X - X$ は nowhere dense in X^* [23]

[定理] X : not p.c. かつ t.c のとき

X : almost locally compact $\Leftrightarrow \nu X - X$ は nowhere dense in X^* [16]

17^o) X : r.c., $H \subset X^*$ とする

i) $X \cup H$: pseudocompact $\Rightarrow H$ は X^* で dense.

ii) もし X が locally compact なら (i) の逆が成立する [18]

17*) 上で r.c. または t.c. でかえうる. [23]

[定理] X not p.c., $H \subset \beta X - \nu X$ とする

i) $X \cup H$: pseudocompact $\Rightarrow H$ は $\beta X - \nu X$ で dense,

ii) $R(X)$ が relatively pseudocompact なら (i) の逆が成立する [16]

この定理は 17*) を含むことが証明できる。

連続体の仮説を用いる定理には (CH) をつけておくことに
する. Rudin [25] の N に関する定理の一般化として,

18*) (CH). X : locally compact, t.c $\Rightarrow X^*$ は P -points よりなる
dense subset を含む [23]

[定理] (CH). $R(X)$ が relatively pseudocompact $\Rightarrow \beta X - \nu X$
は X^* の P -points よりなる subset K をふくみ, かつ K は
 $\beta X - \mu X$ で dense である [16]

19) Plank は次を証明した.

(CH). X : separable metric, noncompact, 孤立点なし

$\Rightarrow X^*$ は 2^ℵ個の remote points よりなる dense subset を含む [24]

Robinson は上の separability を local compactness でかえ
うることを [23] で示した

[定理](CH). X : almost locally compact, metric, 孤立点なし.

$\Rightarrow X^*$ は remote points の集合 K で K は $X^* - \text{cl}_{\beta X} R(X) \cup \cup X$

で dense, なるものをふくむ

[16]

20) Plank の結果 [24] のうち次のような拡張がえられる.

[定理](CH). X : not p.c., almost locally compact とする.

もし $\{A_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ が $C(X)$ の β -subalgebras の family で

$|A_\alpha| = \mathbb{C}, (\forall \alpha \in \Gamma), |\Gamma| = \mathbb{C}$ ならば X^* は $\beta X - \mu X \cup \text{cl}_{\beta X} R(X)$

で dense な subset K をふくみ, かつ K の各点は各 $\alpha \in \Gamma$ に

対して同時に A_α -point になっている

[16]

最後に P -points と round subsets の関係として

21). $\cup X - X$ の点 P に対して $\{p\}$ が βX の round subset
ならば p は X^* の P -point となる.

[16]

こゝで $p \in \cup X - X$ はおとせないし, また 21) の逆は駄目
な例はたやすくつくれる。

文 献

- [1] 難波完爾: 算術的拡大作用素について. 数学. 22 (1970),
92 ~ 105.
- [2] 竹内外史: 最近の集合論. 数学. 23 (1971). 18 ~ 26.
- [3] E. Čech: On bicomact spaces. Ann. M. 38 (1937), 823 ~ 844.
- [4] W. W. Comfort: On the Hewitt realcompactification of
a product space. Trans. Amer. M. S. 131 (1968). 107 ~ 118.
- [5] N. Dykes: Mappings and realcompact spaces.
Pacif. J. M. 31 (1969). 347 ~ 358.
- [6] _____: Generalizations of realcompact spaces (to appear).
- [7] N. J. Fine and L. Gillman: Extension of continuous function
in βX . Bull. Amer. M. S. 66 (1960). 376 ~ 381.
- [8] _____: Remote points in βR .
Proc. Amer. M. S. 13 (1962). 29 ~ 36.
- [9] L. Gillman and M. Jerison.: Rings of continuous functions.
Van Nostrand, Princeton, N. J. 1960.
- [10] I. Glicksberg: Stone-Čech compactifications of products.
Trans. Amer. M. S. 90 (1959). 369 ~ 382.
- [11] E. Hewitt: Rings of real valued continuous functions.
Van Nostrand, Princeton, N. J. 1960.

- [12] M. Henriksen and J.R. Isbell : Some properties of Compactifications. *Duke. M. J.* 25 (1957). 83 ~ 105.
- [13] T. Isiwata : Mappings and Spaces. *Pacif. J. M.* 20 (1967). 455 ~ 480.
- [14] _____ : Inverse images of developable spaces.
Bull. Tokyo Gakugei Univ. Ser. IV. 23 (1971). 11 ~ 21.
- [15] _____ : Realcompactifications and topological completions
(to appear. *Proc. Japan. Acad.*.)
- [16] _____ : Some properties of the remainder of Stone-Čech compactification.
- [17] M. Mandelker : Round π -filters and round subsets of βX .
Israel J. M. 7 (1969). 1 ~ 8.
- [18] _____ : Supports of continuous functions.
Trans. Amer. M. S. 156 (1971). 73 ~ 83.
- [19] W. G. McArthur : Hewitt realcompactifications of products.
Canad. J. M. 22 (1970). 645 ~ 656.
- [20] K. Morita : Topological completions and M -spaces.
Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku. 10 (1970). 271 ~ 288.
- [21] S. N. Negrepontis : An example on realcompactification.
Arch. M. 20 (1969). 162 ~ 164.
- [22] S. M. Robinson : The intersection of the free maximal
in a complete space. *Proc. Amer. M. S.* 17 (1966). 468 ~ 469.

- [23] S. M. Robinson: Some properties of $\beta X - X$ for complete spaces. *Fund. M.* 64 (1969). 335~340.
- [24] D. Plank: On a class of subalgebras of $C(X)$ with applications to $\beta X - X$. *Fund. M.* 67 (1969). 41~54.
- [25] W. Rudin: Homogeneity problems in the theory of Čech-compactifications. *Duke. M. J.* 23 (1958). 409~419.
- [26] T. Shirota: A class of topological spaces. *Osaka. M. J.* 4 (1952). 23~40.
- [27] H. Tamano: On Compactifications. *J. M. Kyoto Univ.* 1 (1962). 161~193.